B&NaK 2018

Материалы
V Международной научной конференции

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И РОДСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ БИОЛОГИИ, ИНФОРМАТИКИ И ФИЗИКИ

к 80–летию Адама Маремовича Нахушева

4–7 декабря 2018 г.
Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО НАУЧНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
«КАБАРДИНО-БАЛКАРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

МАТЕРИАЛЫ

V Международной научной конференции

«Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики»,

посвященной 80-летию Адама Маремовича Нахушева

4–7 декабря 2018 г.
Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика

УДК 51
Н 49

Н 49 Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы V Международной научной конференции, посвященной 80-летию Адама Маремовича Нахушева. – Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН, 2018. – 253с.

В сборнике представлены материалы V Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», посвященной 80-летию Адама Маремовича Нахушева (Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, 4–7 декабря 2018 г.)

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Проект № 18-01-20097-г.

Все работы напечатаны в авторской версии с незначительной редакторской правкой

АДАМ МАРЕМОВИЧ НАХУШЕВ

Родился 5 декабря 1938 года в селении Заюково Эльбрусского района Кабардино-Балкарской АССР.

Доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный деятель науки Российской Федерации, Кабардино-Балкарской Республики, Карачаево-Черкесской Республики, Республики Адыгея, действительный член Российской академии естественных наук, действительный член Петровской академии наук и искусств, иностранный почетный член Академии наук Абхазии, почетный профессор Абхазского государственного университета, почетный академик Испанской академии наук, технологии и профессионального образования, действительный член Общественной академии наук, культуры, образования и бизнеса Кавказа, почетный член Федеральной национально-культурной автономии адыгов России; почетный гражданин сельского поселения Заюково.

Адам Маремович Нахушев – выдающийся ученый в области прикладной и теоретической математики. Результаты первостепенного значения получены А.М. Нахушевым в области математических проблем трансзвуковой газовой механики и аэродинамики, теории тепловлагообмена, дробного исчисления, лазерного излучения, математической биологии, автоматизированных систем прогнозирования и морской спутниковой связи. А.М. Нахушев впервые ввел понятия краевой задачи со смещением, нелокальных задач, нагруженных уравнений, континуальных дифференциальных операторов, междупредельных разностных уравнений. Его именем назван ряд проблем и эффектов.

А.М. Нахушев является основателем и первым директором (с 1991 по 2010 год) Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук.

А.М. Нахушев является организатором-основателем и первым Президентом (в настоящее время – Почетным Президентом) Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.

В Кабардино-Балкарском госуниверситете А.М. Нахушевым созданы кафедра Теории функций и функционального анализа, кафедра Информатики и математического обеспечения автоматизированных систем и кафедра Вычислительной математики.

Научная школа А.М. Нахушева объединяет более двухсот ученых-математиков, активно работающих во многих научных и образовательных центрах России, стран ближнего и дальнего зарубежья.

А.М. Нахушев является автором более 250 научных работ, том числе 10 монографий, среди которых: "Уравнения математической биологии" (Высшая школа, 1995); "Дробное исчисление и его применение" (Физматлит, 2003); "Задачи со смещением для уравнений в частных производных" (Наука, 2006); "Нагруженные уравнения и их применение" (Наука, 2012).

Активный и плодотворный труд в науке и образовании, организаторская, общественная и просветительская деятельность Адама Маремовича Нахушева неоднократно отмечена отечественными и зарубежными наградами. Среди них: орден Почета, орден Дружбы, медали: "За освоение целинных и залежных земель", "За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В.И. Ленина", "За заслуги перед республикой Адыгея", "За заслуги в развитии науки Республики Казахстан", награда "Лъэпкъым къыбгъэдэкI фIыщIэ" Международной Черкесской ассоциации (Дунейпсо Адыгэ Хасэ), Государственные премии КБР в области науки и техники.

Мировым артийским комитетом и мировой ассамблеей общественного признания присвоено Почетное звание "Человек мира".

Оглавление

Алгоритм построения P-оптимальной потоковой сети

Абазоков М.Б.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; Abazokov@Mukhammed@yandex.ru

Математической моделью задачи проектирования оптимальных распределительных сетей является задача:

$$C(v) = \sum_{ij \in D} c_{ij}(v_{ij}) l_{ij} \to min, \sum_{i \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum_{k \in \Gamma_j^-} v_{jk} = g_j \ \forall j \neq 1 \in B, \quad (1),\ (2)$$

$$\sum_{j \in \Gamma_1^-} v_{1j} = \sum_{i \in B} q_i, \qquad v_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in D, \qquad (3)$$

где $\Gamma(B, D)$ - заданный орграф возможных соединений узлов (вершин) сети; v_{ij}, c_{ij}, l_{ij} - искомое значение величины потока, его удельная стоимость и длина (i,j)-й дуги; q_i - заданное потребление потока в i-м узле сети; $c_{ij}(v_{ij})$ - непрерывная, строго вогнутая возрастающая функция, $c_{ij}(0) = 0$. Задача (1)–(3) существенно многоэкстремальна и относится к классу NP-полных задач [1, 2]. Поскольку в задаче локальные и глобальный экстремум могут достигаться лишь в угловых точках транспортного многогранника (2), (3), в [3] введено понятие экстремума P-го ранга - глобального на выпуклой линейной комбинации всех угловых точек МДР, имеющих смежность к точке экстремума в промежутке $[0, P]$, дано определение фрагмента P-го ранга сети и показано, что сеть только тогда P-оптимальна, когда любой ее фрагмент P-го ранга оптимален.

В докладе представлены: блок-схемы ведущих операций построения сети P-го ранга оптимальности, объединяющиеся в единый алгоритм; программа построения сети 3-го ранга оптимальности на языке программирования Python с ипользованием библиотеки для научной графики Matplotlib; результаты вычислительного эксперимента, показывающие достаточную эффективность алгоритма.

Литература

1. *Михалевич В.С., Трубинин В.А., Шор Н.З.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. М.: Наука, 1986. 260 с.

2. *Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др.* Математическое моделирование и оптимизация система тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.

3. *Кудаев В.Ч.* Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия КБНЦ РАН. 2016. № 4(72). С. 15–23.

Численное решение класса обратных задач для системы нагруженных дифференциальных уравнений

Абдуллаев В.М.

ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; АГУНП, Баку, Азербайджан;
vaqif_ ab@rambler.ru

Рассматривается система нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du(x)}{dx} = A(x)\,u(x) + \sum_{s=1}^{l} B^s(x)\,u(\overline{x}_s) + C(x)\,, x \in [x_0, x_f]$$

с неразделенными точечными и интегральными условиями

$$\sum_{i=1}^{l_1} \beta_{1i} u(\hat{x}_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\breve{x}_j}^{\tilde{x}_j} \beta_{2j}(\tau)\,u(\xi)\,d\xi = \gamma.$$

Здесь $u(x) \in R^n$ – искомое решение; непрерывные матричные функции $A(x)$ размерности $n \times n$, n-мерная вектор функция $C(x)$, β_i, β_{1i}, $\beta_{2j}(.)$ – квадратные матрицы размера n, точки объекта $\hat{x}_i, \breve{x}_j, \tilde{x}_j$ из отрезка $[x_0, x_f]$ – заданы, причем $\breve{x}_j, \tilde{x}_j, \hat{x}_i \notin [\breve{x}_j, \tilde{x}_j]$, $i = 1, 2, \ldots, l_1$, $j = 1, 2, \ldots, l_2$; $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_l)^T$ – места нагружения из отрезка $[x_0, x_f]$, $B(x) = \left(B^1(x), B^2(x), \ldots, B^l(x)\right)$ – соответствующие функции реакции точек объекта на нагружения – не заданы.

Задача заключается в определении оптимальных мест нагружения $\bar{x}_s \in [x_0, x_f]$ и соответствующих непрерывных функций реакции $B^s(x)$, $s = 1, 2, ..., l$, минимизирующих заданный функционал:

$$J(B, \bar{x}) = \alpha_1 \int_{x_0}^{x_f} f^0(u(x), u(\bar{x}), B(x))\,dx + \alpha_2 \Phi_1(\bar{x}) + \alpha_3 \Phi_2(u(\tilde{x}))\,.$$

В работе приводится метод решения задачи оптимизации мест нагружения и функций реакции на нагружения, основанный на численных методах оптимизации первого порядка.

Влияние продольной дисперсии на степень превращения реагента в реакторе

Абдурахимов А.

ТАСИ, Ташкент, Узбекистан; abduraximov1943@mail.ru

Продольное перемешивание в химических реакторах с неоднородным псевдоожиженным слоем существенно влияет на степень превращения реагента, избирательности, выход продукта и другие характеристики. Здесь рассматривается модель проточного реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем, основанную на двухфазной теории течения газа через псевдоожиженный слой. В соответствии с рассматриваемой моделью изменение концентрации реагентов в неоднородном псевдоожиженном слое в одномерном приближении в случае адиабатического реактора для одностадийной химической реакции можно написать в безразмерном виде:

$$\frac{1}{P_e}\frac{d^2C_1}{dx^2} = u_1\frac{dC_1}{dx} + f(C_1) - A\left(C_1 - C_2\right), \tag{1}$$

$$-u_2\frac{dC_2}{dx} = A\left(C_1 - C_2\right), \tag{2}$$

Задача. _Для системы уравнений (1) и (2) граничные условия определяются аналогично условиям Данквертса в случае реактора с продольным перемешиванием: при_ $x = 0$, $C_1 = C_2$

$$\frac{1-\chi}{P_e}\frac{dC_1}{dx} + C_1 = C_f, \tag{3}$$

где χ _– доля объема пузырей;_ C_f _– концентрация смеси на входе реактора; при_ $x = 1$,

$$\frac{dC_1}{dx} = 0. \tag{4}$$

Будем считать, что скорость химической реакции в плотной фазе мала, т.е. $f(C_1) = \varepsilon f(C_1)$ (слабая химическая реакция, $\varepsilon \ll 1$). Решение задачи (3), (4) для концентрации реагентов на выходе из реактора определяется с точностью до членов второго порядка малости.

Здесь обозначения принимаются как в работе [1]. Зависимость степени превращения реагента как в плотной, так и разбавленной фазе от числа Пекле рассчитанного по параметрам плотной фазы оказалась не монотонной. Найден интервал изменения коэффициента продольного перемешивания, в котором обеспечивается оптимальный режим работы химического реактора с неоднородным кипящим слоем.

Литература

1. _Абдурахимов А._ Работа реактора с псевдоожиженном слое // Труды VII международной конференции по мат. модел. Якутск, 2014. С. 114-116.

О решении одной обратной задачи для гиперболического уравнения с интегральными условиями переопределения

Айда-заде К.Р.[1]**, _Рагимов А.Б._**[2]

[1]*БГУ, Баку, Азербайджан; kamil_aydazade@rambler.ru*
[1,2]*ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; anar_r@yahoo.com, anar.rahimov@fresnel.fr*

В докладе предлагается подход к численному решению следующей обратной задачи для линейного гиперболического уравнения:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = a_0(x)\tfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + a_1(x)\tfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} + a_2(x)\tfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} +\\ &+a_3(x)\,v(x,t) + f(x,t) + B(x,t)\,C_0(x),\\ &(x,t)\in\Omega=\{(x,t): 0<x<l,\ 0<t\le T\},\end{aligned} \tag{1}$$

при следующих условиях:

$$\int_0^T e^{k\tau} v(x,\tau)\,d\tau = g(x),\ k = const,\ \ x\in[0,\,l], \tag{2}$$

$$v(x,0) = \phi_0(x),\quad v(x,T) = \phi_T(x),\quad x\in[0,\,l] \tag{3}$$

$$v(0,t) = \psi_0(t),\quad v(l,t) = \psi_1(t),\quad t\in[0,\,T], \tag{4}$$

где функции $a_0(x) > 0$, $a_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, $f(x,t)$, $B(x,t)$, $\phi_0(x)$, $\phi_T(x)$, $g(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ являются заданными и удовлетворяют известным условиям существования и единственности $(v(x,t),\ C_0(x))$ – решения задачи (1)-(4).

Важно отметить, что предлагаемый численный метод решения задачи (1)-(4) не является итерационным и основан на использовании метода прямых. Задача приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами, для решения которых используется специальный подход типа прогонки, предложенный ранее авторами [1,2]. Приводятся некоторые из результатов проведенных численных экспериментов, подтверждающие эффективность предлагаемого подхода.

Литература

1. *Aida-zade K.R., Rahimov A.B.* An approach to numerical solution of some inverse problems for parabolic equations // Journal of Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. V. 22, № 1. P. 96-111.

2. *Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б.* Решение классов коэффициентно-обратных задач и задач с нелокальными условиями для параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 84-94.

Об одном подходе к численному решению краевых задач для эллиптических уравнений в областях сложной структуры

Айда-заде К.Р.[1]**, Талыбов С.Г.**[2]

[1] *БГУ, Баку, Азербайджан; kamil_aydazade@rambler.ru*
[1,2] *ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; saxavat@yahoo.com*

Пусть в двумерной области Ω определена краевая задача относительно эллиптического уравнения :

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \subset R^2,$$

$$u(x) = \gamma(x), \quad x \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Предполагается, что область Ω, определенная системой нелинейных неравенств:

$$\Omega = \{x \in R^2 : g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\},$$

имеет сложную геометрию и построение в ней регулярной сеточной аппроксимации или ее регулярная триангуляция сложна или практически невозможна. Но применяя известные методы решения систем нелинейных неравенств (отыскания точек допустимой области), возможно нахождение (генерация) точек $x_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, N_x$, достаточно плотно распределенных в области Ω. Пользуясь этим множеством точек, предложены различные схемы конечномерной аппроксимации производных, участвующих в краевой задаче, имеющих второй порядок точности. Схемы различаются количеством точек, используемых для аппроксимации производных в текущей точке. В результате аппроксимации краевой задачи получаем систему алгебраических уравнений относительно значений неизвестной функции в сгенерированных точках, порядок которой определяется числом точек N_x и используемой схемой аппроксимации.

Разработана схема метода решения системы алгебраических уравнений, учитывающая специфику структуры (якобиана) системы, основанная на методе сопряженных градиентов.

Изложенный подход иллюстрируется численными результатами решения тестовых задач относительно эллиптических уравнений в областях сложной структуры.

Об одной задаче синтеза управления процессом гашения колебания пластины

Айда-заде К.Р.[1], **Гашимов В.А.**[2]

[1,2]*БГУ, Баку, Азербайджан; kamil_aydazade@rambler.ru*
[2]*ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; vugarhashimov@gmail.com*

Рассматривается задача синтеза управления гашением поперечных колебаний тонкой однородной мембраны, закрепленной по границе:

$$u_{tt}(x,t) = a^2\Delta u(x,t) - \lambda u_t(x,t) + \sum_{i=1}^{N_c} \vartheta_i(t)\delta(x-\eta^i) + \sum_{s=1}^{N_s} q_s\delta(x-\theta^s,t), \quad (1)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad u(\gamma,t) = 0, \quad \gamma \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Здесь Ω – область мембраны; q_s — интенсивность s - го внешнего источника, сосредоточенного в точке мембраны $\theta^s \in \Omega$ из заданного множества размещения Θ^s; $\vartheta_i(t)$ – функция, определяющая режимы гашения колебаний стабилизаторами, установленных в точках $\eta^i \in \Omega$, $i = 1,\dots,N_c$, $t \in [0,T]$.

В точках мембраны ξ^j, $j = 1,\dots,N_o$ установлены датчики замера текущих значений смещения мембраны $u(\xi^j,t)$, которые используются для назначения текущих режимов стабилизаторов. Используем следующую функцию управления, определяющую линейную обратную связь:

$$\vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j\left[u(\xi^j,t) - z_i^j\right], \quad t \in [0,T], \quad i = 1,\dots,N_c. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим нагруженное дифференциальное уравнение:

$$u_{tt}(x,t) = a^2\Delta u(x,t) - \lambda u_t(x,t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N_c} \delta(x-\eta^i)\sum_{j=1}^{N_o} k_i^j\left[u(\xi^j,t) - z_i^j\right] + \sum_{s=1}^{N_s} q_s\delta(x-\theta^s,t). \quad (3)$$

Задача синтеза управления процессом (3) приводится к параметрической задаче оптимального управления с некоторым заданным целевым функционалом с оптимизируемыми параметрами k_j^i, z_j^i, ξ^j, η^i, $i = 1,\dots,N_c$, $j = 1,\dots,N_o$.

Для решения задачи применены численные методы оптимизации первого порядка.

Краевая задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области

Азизов М.С.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; muzaffar.azizov.1988@mail.ru

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$ для уравнения

$$Lu = u_{xxxx} + u_{tt} + \frac{2\gamma}{t} u_t = f\left(x,t\right), \quad \gamma = const \in (0, 1/2), \tag{1}$$

где $f(x,t)$ – заданная непрерывная функция, рассмотрим следующую смешанную задачу:

Задача A. *Найти в области* Ω *решение* $u\left(x,t\right)$ *уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\left(x,0\right) = 0, \quad u\left(x,T\right) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant p, \tag{2}$$

$$u_x\left(0,t\right) = \psi_1\left(t\right), \qquad u_x\left(p,t\right) = \psi_2\left(t\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u_{xxx}\left(0,t\right) = \psi_3\left(t\right), \quad u_{xxx}\left(p,t\right) = \psi_4\left(t\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

где $\psi_k(x)$, $k = \overline{1,4}$ *– заданные непрерывные функции.*

Определение. *Функцию* $u\left(x,t\right) \in C^{3,0}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega\right)$ *назовем регулярным решением задачи A, если она в области* Ω *удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)–(4).*

Задача A при $\gamma = 0$ исследована в работе [1].

Методом спектрального анализа доказана теорема единственности и существования решения задачи А. Регулярное решение поставленной задачи построено в виде суммы двойного ряда Фурье-Бесселя.

Литература

1. *Отарова Ж.А.* Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений смешанного типа четвертого порядка // Автореферат канд. диссер. Ташкент. 2008. 30 с.

Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений с вырождением типа и порядка

Алдашев С.А., Майкотов М.Н.

КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан; aldash51@mail.ru; mukhit777@mail.ru

Корректные постановки краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного проведены в [1, 2].

Пусть $D-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$,ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|-$ длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D области D обозначим через $\Gamma_\alpha,\ S_\alpha,\ S_0$ соответственно.

В области D рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv g_1(t)\Delta_x u + g_2(t)u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \quad (1)$$

где $g_i(t) > 0$ и $g_i(0) = 0$, $g_i(t) \in C([0,\alpha])$, $i = 1, 2$, а Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

Задача (Дирихле). *Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\Big|_{S_0} = \tau(r,\theta),\ u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta),\ u\Big|_{S_\alpha} = \varphi(r,\theta), \quad (2)$$

при этом $\tau(1,\theta) = \psi(0,\theta), \psi(\alpha,\theta) = \varphi(1,\theta)$. Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, ...$ – пространства Соболева.

Литература

1. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 203 с.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

Первая группа необходимых условий для уравнения четвертого порядка с частными производными

Алиев Н.А., Велиева С.Р.

БГУ, Баку, Азербайджан; sevinj_veliyeva@mail.ru

В последнее время большое внимание уделяется исследованию граничных задач относительно уравнений эллиптического типа первого порядка – так называемых уравнений Коши-Римана.

В данной работе рассматривается граничная задача для двухмерного уравнения четвертого порядка, связанная с процессом движения сжимаемой экспоненциально-стратифицированной жидкости. Пользуясь аналогом второй формулы Грина, определяются все линейно-независимые необходимые условия, с помощью которых получен аналитический вид решения рассматриваемой граничной задачи.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^4 u(x)}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + b^2\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} - \omega_0^2\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_x^2} = 0, x \in D, \qquad (1)$$

где c, b, ω_0 – постоянные числа, D – ограниченная выпуклая по направлению x_2 плоская область, граница $\Gamma = \partial D$ является линией Ляпунова.

Фундаментальное решение уравнения (1) имеет вид:

$$U(x-\xi) = -\frac{e(x_1-\xi_1)e(x_2-\xi_2)}{(cb^2)}\sin b(x_2-\xi_2)\sin cb(x_1-\xi_1) -$$
$$-\frac{e(x_1-\xi_1)}{2cb^2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k e(x_2-\xi_2+(-1)^k c(x_1-\xi_1)) *$$
$$* \cos b(x_2-\xi_2+(-1)^k c(x_1-\xi_1)). \qquad (2)$$

Для того, чтобы получить вторую формулу Грина, умножим уравнение (1) на фундаментальное решение (2), результат проинтегрируем по области D, применяя формулу Остроградского-Гаусса. После некоторых преобразований получим основное соотношение, которое состоит из двух частей. Ее первая часть есть общее решение уравнения (1), определенное в области D, а вторая часть отвечает первым необходимым условиям.

Из этого соотношения получим выражения для $1/2u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1))$ и $1/2u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1))$ в качестве первого необходимого условия.

Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха

Аликулов Т.Н.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; tolibaka@mail.ru

В работе рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$\frac{du}{dt} + Lu = 0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{2}$$

где $u = u(t)$ – элемент банахова пространства $W_p^2(R^n)$, зависящий от параметра $t \in [0, T]$. Здесь $L(x, D)$ – эллиптический дифференциальный оператор второго порядка вида

$$L(x, D) = -\Delta + q(x).$$

Предполагаем, что функция $q(x)$ – действительнозначная функция действительного переменного и допускает особенности вида

$$\left| D^\alpha q(x) \right| \leq \frac{C}{|x|^{1+|\alpha|+\tau}}, 0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \leq n, 0 < \tau < 1.$$

Отметим, что дифференциальные уравнения с эллиптическим оператором изучались методами теории полугрупп Э. Хиллом [1], К. Иосида [2] и др. Естественность применения полугрупп при изучении таких уравнений вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы задача (1)-(2) была корректной, необходимо, чтобы оператор L являлся производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t)$ ограниченных операторов. Если L – замкнут, то этого условия достаточно.*

Теорема 2. *Если задача Коши для уравнения (1) корректна, то ее решение дается формулой*

$$u(t) = u_0 U(t), \ \ (u_0 \in D(L)),$$

где $U(t)$ – сильно непрерывная при $t > 0$ полугруппа операторов.

Литература

1. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
2. *Хилл Э.* Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, 1951. 675 с.

Работа выполнена при поддержке РУзФИ, проект № ОТ-Ф4-(36+32).

Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями Стеклова первого класса

Алиханов А.А.[1], _Хамгокова М.М._[2]

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; [1]alikhanov-tom@yandex.ru; [2]hamgokova.madina@yandex.ru

Рассматривается нелокальная краевая задача Стеклова первого класса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k(0)u_x(0,t) = \alpha u(0,t) + \beta u(1,t) - \mu_1(t), \\ -k(1)u_x(1,t) = \gamma u(0,t) + \delta u(1,t) - \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

где $k(x)$ и $f(x,t)$ – заданные достаточно гладкие функции, $0 < c_1 \le k(x) \le c_2$, $k(x) = k(1-x)$ для всех $x \in [0,1]$; α, β, γ и δ - заданные действительные числа; $\mu_1(t)$, $\mu_2(t) \in C[0,T]$.

В [1] получена априорная оценка для решения задачи (1)-(3), для которой выполняются условия $\alpha > 0, \quad (\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta < 0$,

В данной работе получены априорные оценки решения задачи (1)-(3), в случае когда условие $(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta < 0$ не выполняется, а также построены разностные схемы повышенного порядка аппроксимации и проведены расчеты для тестовых задач, подтверждающие эффективность предложенных разностных схем.

В [2] построены разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнения дробной диффузии с нелокальными краевыми условиями Стеклова второго класса.

Отличительной особенностью данной работы от [3, 4] является то, что константы полученных априорных оценок не зависят от T.

Литература

1. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. М.:, 1983.
2. *Alikhanov A.A., Kodzokova I.Z.* A higher order difference scheme for the time fractional diffusion equation with the Steklov nonlocal boundary value problem of the second kind // Lecture Notes in Computer Science. 10187 LNCS. P. 164–171
3. *Алиханов А.А.* Нелокальные краевые задачи в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференц. урав. 2008. Т. 44, № 7. С. 924–931.
4. *Алиханов А. А.* Об устойчивости и сходимости нелокальных разностных схем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 7. С. 942–954.

Определение длины дуги эллипса

Анахаев К.Н.

ЦГИ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; anaha13@mail.ru

Эллиптические кривые широко распространены в очертаниях различных естественных и искусственных тел, траекториях движений планет, спутников, элементарных частиц и др. Однако, до настоящего времени не разработано аналитически доступное для инженерной практики определение длины дуги эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, где x и y – текущие координаты, a и b — большая и малая полуоси эллипса. Ниже приводятся зависимости для нахождения длины дуги эллипса от верхнего конца его малой полуоси b на вертикальной оси Oy до рассматриваемых точек (по часовой стрелке), расположенных в четвертях эллипса: правой верхней l_1 и нижней l_2, левой нижней l_3 и верхней l_4 [1-3]: $l_1 = aE(\varphi \setminus \alpha) = a\left\{\varphi - (\varphi - \sin\varphi)\frac{\alpha}{90^\circ} - \xi\left[\pi - (\pi - 2)\frac{\alpha}{90^\circ} - 2E(\alpha)\right]\frac{\varphi - \varphi^*}{\pi - 2\varphi^*}\right\}$; $l_2 = 2aE(\alpha) - l_1$; $l_3 = 2aE(\alpha) + l_1$; $l_4 = 4aE(\alpha) - l_1$, в которых $\alpha = \arcsin\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$; $\varphi = \arcsin\left|\frac{x}{a}\right|$; $\varphi^* = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\alpha}{65^\circ}\right)$; $\xi = \left\{\begin{smallmatrix} 0 \text{ при } \varphi \le \varphi^* \\ 1 \text{ при } \varphi > \varphi^* \end{smallmatrix}\right\}$. Полный эллиптический интеграл 2-го рода $E(\alpha)$ определяется ($<1\%$) [2, 3]:

$$E(\alpha) = \ln\sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2)\sin^2\alpha} \approx \left[1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha\right]\left(1 + \sqrt{\cos^3\alpha}\right);$$

$$E(\alpha) = \ln\sqrt{e^\pi - (e^\pi - e^2)\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} \approx \left[1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{b}{a}\right]\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{1,5}\right].$$

Последняя используется для определения полной длины эллипса по формуле $L_э = 4aE(\alpha)$ с точными граничными значениями для – окружности ($a = b$) и плиты ($b = 0$) [2,3]. При значениях $0.4 \le \frac{b}{a} \le 1$ длина $L_э$ находится по линейной зависимости $L_э = (1.2a + b)\frac{\pi}{1.1}$. Длина дуги между двумя произвольными точками эллипса находится как разность между их значениями от оси Oy. Сравнение результатов подсчета (с базовой программой «Mathematica») для тестовой задачи дало погрешность $\le 0.5\%$.

Литература

1. _Сикорский Ю.С._ Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.-Л., 1936. 365 с.
2. _Анахаев К.Н._ О методах расчета потенциальных (фильтрационных) потоков на основе эллиптических интегралов Якоби // Гидротехническое строительство. 2008. № 8. С. 7–9.
3. _Анахаев К.Н._ О полных эллиптических интегралах 3-го рода в задачах механики // Доклады Академии наук. 2017. Т. 473. № 2. С. 151–153.

Свойства смешанных дробных интегро-дифференциальных операторов Римана – Лиувилля и некоторые их приложения

Андреев А.А., Огородников Е.Н.

СамГТУ, Самара, Россия;
andre01071948@yandex.ru; *eugen.ogo@gmail.com*

Пусть $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ – n-мерное евклидово пространство; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$; $dt = dt_1 dt_2 \ldots dt_n$; $a_k, b_k \in \mathbb{R}^1$, $-\infty \le a_k < b_k \le \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Область $\Omega^n = \{x : x \in \mathbb{R}^n; x \in (a_k, b_k)\} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ обозначим $\prod_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$.

Пусть a – фиксированная, а x – произвольная точка пространства $\mathbb{R}^n$, тогда $\Omega^n(a, x) = \prod_{k=1}^{n}(a_k, x_k)$.

Через $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ и т. п. обозначим мультииндексы, так что $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \cdot \Gamma(\alpha_2) \ldots \Gamma(\alpha_n)$, где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $m! = m_1! m_2! \ldots m_n!$, $m_k \in \mathbb{N}$. Запись $\alpha \in \mathbb{R}^1$ означает, что $\alpha_k \in \mathbb{R}^1$, запись $\alpha > 0$ эквивалентна $\alpha_k > 0$, а запись $m \in \mathbb{N}$ соответствует $m_k \in \mathbb{N}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$.

Через $|m| = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ обозначим длину мультииндекса. Пусть $D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Тогда $D^m = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}$, а если $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$, то $|m| = n$ и $D^n = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$.

Частный интеграл и частная производная Римана-Лиувилля дробного порядка α_k по k -ой переменной определяются как и в одномерном случае.

Выражение

$$I_{ax}^{\alpha}\varphi = I_{a_1x_1}^{\alpha_1}\varphi \cdots I_{a_nx_n}^{\alpha_n}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\Omega^n(a,x)} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad \alpha > 0,$$

называется левосторонним смешанным дробным интегралом Римана – Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Пусть, например, $0 < \alpha < 1$. Тогда выражение

$$D_{ax}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} D^n \int_{\Omega^n(a,x)} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt = D^n I_{ax}^{1-\alpha}\varphi$$

называется левосторонней смешанной дробной производной порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

В работе приведены доказательства некоторых композиционных тождеств, обсуждается корректность аналогов задачи Гурса для уравнений со смешанными частными дробными производными.

О разрешимости третьей краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

Апаков Ю.П., Жураев А.Х.

НамИСИ, Наманган, Узбекистан; yusupjonapakov@gmail.com; juraevabdulla66@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{U}_{xxx} - U_{yy} + AU_{xx} + BU_x + CU_y + DU = 0, \tag{1}$$

здесь $A, B, C, D \in R$. Заметим, что заменой $U(x, y) = u(x, y)\, e^{-\frac{A}{3}x + \frac{C}{2}y}$ уравнение (1) преобразуется в следующий вид:

$$u_{xxx} - u_{yy} + au_x + cu = 0,$$

где

$$a = -\frac{A^2}{3} + B, \qquad c = \frac{2A^3}{27} + \frac{C^2}{4} - \frac{AB}{3} + D.$$

Пусть $c > 0$, $a > 0$. Уравнение (1) относится к уравнению параболического типа [1, с. 72]. В области $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$ рассмотрим следующую задачу:

Задача B_3. _Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:_

$$\begin{cases} \alpha u(x,0) + \beta u_y(x,0) = 0 \\ \gamma u(x,1) + \delta u_y(x,1) = 0 \end{cases}, \qquad 0 \le x \le 1,$$

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(1, y) = \varphi_2(y), \quad u_{xx}(1, y) = \varphi_3(y),$$

где $\varphi_i(y) \in C^3[0, 1]$, $i = 1, 3$, заданные, достаточно гладкие функции. Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – постоянные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0,\ \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

Теорема 1. _Если $\alpha\beta \leqslant 0$, $\delta\gamma \geqslant 0$, то задача B_3 имеет единственное решение._

Теорема 2. _Если $\varphi_i(y) \in C^3[0, 1]$ и $\alpha\,\varphi_i(0) + \beta\,\varphi_i'(0) = 0$, $\gamma\,\varphi_i(1) + \delta\,\varphi_i'(1) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$, то решение задачи B_3 существует._

Литература

1. _Нахушев А. М._ Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

2. _Апаков Ю.П._ Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных // Узбекский математический журнал. Ташкент. 2007. № 1. С. 14–23.

Нелокальные краевые задачи с условием Бицадзе – Нахушева для одной системы гиперболических уравнений с кратными характеристиками и двумя линиями вырождения

Арланова Е.Ю., Огородников Е.Н.

[1] _СамГТУ, Самара, Россия; earlanova@gmail.com; eugen.ogo@gmail.com_

Рассмотрена система n гиперболических в плоскости переменных x и y уравнений с двумя перпендикулярными линиями параболического вырождения

$$y^2\mathbf{u}_{xx} - x^2\mathbf{u}_{yy} + A(x\mathbf{u}_x - y\mathbf{u}_y) = 0 \tag{1}$$

с действительной числовой $[n \times n]$-матрицей A, вектором искомых функций $\mathbf{u}(x, y) = (u_1; u_2; \ldots; u_n)^T$, в области Ω, ограниченной отрезком $[0, 1]$ линии вырождения $y = 0$, характеристиками $\xi = x^2 - y^2 = 0$ и $\eta = x^2 + y^2 = 1$ $(y > 0)$.

Для системы уравнений (1) нетрудно найти регулярное решение $\mathbf{u}(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup (0, 1)) \cap C^2(\Omega)$ задачи Коши с данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \tau(x^2) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1), \tag{2}$$

$$\mathbf{u}_y(x, 0) = \nu(x^2) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1). \tag{3}$$

Пусть $\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, $\Theta_1(x) = \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}; \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right)$.

В работе показано, что если матрица A инволютивна, то в задачах Коши—Гурса с данными на любой из двух характеристик, ограничивающих область Ω, отсутствует единственность решения.

Хорошо известно, что постановка нелокальных краевых условий позволяет восстановить единственность решения задач с данными на характеристиках.

В работе рассматривается класс нелокальных краевых задач с условием (3) и условием типа Бицадзе – Нахушева

$$A(x)\mathbf{u}[\Theta_0(x)] + B(x)\mathbf{u}[\Theta_1(x)] = H(x)\mathbf{u}(x, 0) + M(x)\mathbf{u}_y(x, 0) + \mathbf{c}(x), \tag{4}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $H(x)$, $M(x)$ – известные функциональные $[n\times n]$-матрицы; $\mathbf{c}$ – заданная вектор-функция, $x \in [0, 1]$. Найдены условия однозначной разрешимости всех рассматриваемых задач в требуемых классах функций.

Отметим, что задачи с условием типа Бицадзе – Самарского являются частным случаем задач с условием (4).

Периодические решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами

Асхабов С.Н.

ЧГПУ; ЧГУ, Грозный, Россия; askhabov@yandex.ru

Методом максимальных монотонных операторов [1] доказываются теоремы существования и единственности решения для различных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки в классе

$$M_p(-\pi,\pi) = \{u(x):\ u(x)\in L_p(-\pi,\pi), u'(x)\in L_{p'}(-\pi,\pi)\},\ p'=p/(p-1),$$

где $L_p(-\pi,\pi)$, $p>1$, есть вещественное пространство Лебега, состоящее из 2π-периодических функций.

Обозначим через $L_p^+(-\pi,\pi)$ множество всех неотрицательных функций из $L_p(-\pi,\pi)$. В частности, доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть $1<p<\infty$, $f(x)\in M_p(-\pi,\pi)$, $h(x)\in L_1(-\pi,\pi)$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot\sin(k\cdot t)\,dt \ge 0$ при всех $k\in\mathbb{N}$. Если для почти всех $x\in[-\pi,\pi]$ и всех $u\in\mathbb{R}$ нелинейность $F(x,u)$ удовлетворяет условиям:*
1) $|F(x,u)|\le g(x)+d_1\cdot|u|^{1/(p-1)}$, где $g(x)\in L_p^+(-\pi,\pi)$, $d_1>0$;
2) $F(x,u)$ строго возрастает по u;
3) $F(x,u)\cdot u\ge d_2\cdot|u|^{p/(p-1)}-D(x)$, где $D(x)\in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_2>0$,
то при любых значениях параметра $\lambda\ge 0$ уравнение

$$u(x)+\lambda\cdot F\left(x,\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\cdot u'(t)\,dt\right)=f(x)$$

имеет единственное решение $u(x)\in M_p(-\pi,\pi)$.

В заключение отметим, что методом максимальных монотонных операторов могут быть изучены также различные классы нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши без ограничений на абсолютную величину параметров [2].

Литература

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
2. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с произвольным параметром // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 1. С. 20–26.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-41-200001.

О существовании, единственности и способах решения нелинейных уравнений с ядрами типа потенциала в весовых пространствах Лебега

Асхабов С.Н.[1,2], **_Джабраилов А.Л._**[2]

[1] *ЧГПУ, Грозный, Россия; askhabov@yandex.ru*
[2] *ЧГУ, Грозный, Россия; ahmed_0065@mail.ru*

Пусть $\rho(x)$ есть неотрицательная, почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля, измеримая на отрезке $[0,1]$ функция. Обозначим через $L^p_{01}(\rho)$, $p \geq 1$, множество всех измеримых на отрезке $[0,1]$ функций $u(x)$ с конечной нормой $\|u\| = \left(\int_0^1 \rho(x) \cdot |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$. Известно, что $L^p_{01}(\rho)$ при $1 < p < \infty$ есть рефлексивное банахово пространство и сопряженным с ним является пространство $L^q_{01}(\rho^{1-q})$, $q = p/(p-1)$. Введем обозначение $\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x){\cdot}v(x)dx$, где $u(x) \in L^p_{0,1}(\rho)$, $v(x) \in L^q_{01}(\rho^{1-q})$. На вес $\rho(x)$ накладываются условия:

$$\int_0^1 [\rho(x)]^{2/(2-p)}\, dx < \infty\,, \quad \text{если} \ \ 2 < p < \infty, \tag{1}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leq x\leq 1} [\rho(x)]^{-1} < \infty\,, \quad \text{если} \ \ p = 2. \tag{2}$$

Скажем, что функция $\varphi(x) \in \Omega(0,1]$, если $\varphi(x)$ есть суммируемая, непрерывная, невозрастающая, выпуклая вниз в промежутке $(0,1]$ функция такая, что $\int_0^1 \varphi(x)dx \geq 0$.

Теорема 1. *Пусть $2 \leq p < \infty$, $\varphi(x) \in \Omega(0,1]$ и выполнены условия (1), (2). Тогда оператор $(P^{\varphi}_{01}u)(x) = \int_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt$ действует непрерывно из $L^p_{01}(\rho)$ в $L^q_{01}(\rho^{1-q})$ и $\langle P^{\varphi}_{01}u, u\rangle \geq 0 \ \ \forall u(x) \in L^p_{01}$.*

Используя теорему 1, методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказываются глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах приближенного решения нелинейных уравнений, содержащих обобщенный оператор типа потенциала P^{φ}_{01}, введенный в работах А.М. Нахушева (см., например, [1]). Ранее авторами были получены аналогичные результаты в частном случае, когда вес $\rho(x) = 1$.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-41-200001.

Краевые задачи для линейного нагруженного строго гиперболического уравнения второго порядка

Аттаев А.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; attaev.anatoly@yandex.ru

В докладе будут изложены результаты исследования задачи Гурса, задачи с данными на параллельных характеристиках и задачи Коши с данными на характеристике для уравнения вида

$$u_{xx} - u_{yy} = \alpha u(\xi, 0) + \beta u(\eta, 0), \tag{1}$$

где $\xi = x - y,\ \eta = x + y$.

Уравнение (1) примечательно тем, что для его определенности в некоторой точке (x, y) нужно знать значение неизвестной функции не только в точке (x, y), но еще в точках $(x - y, 0)$ и $(x + y, 0)$.

Результаты моделирования взаимодействия конвективных облаков с окружающей атмосферой

***Ашабоков Б.А.*[1], *Федченко Л.М.*[2], *Шаповалов А.В.*[3]**

[1,2,3]*ВГИ, Нальчик, Россия; vgikbr@yandex.ru*
[1]*ИИПРУ, Нальчик, Россия; ashabokov.boris@mail.ru*

В работе приводятся результаты моделирования влияния структуры поля ветра в атмосфере на процессы образования и развития облаков. Проведение исследований в этом направлении возможно только на основе численного моделирования с использованием полных трехмерных моделей облаков. Для этой цели в работе использована трехмерная модель конвективных облаков с детальным учетом процессов [1].

Для исследования были выбраны мощные конвективные облака, наблюдавшихся на Северном Кавказе 02.09.2010 г. и 07.06.2012 г. и сопровождавшиеся выпадением града. Проводились расчеты образования и развития облаков для различных структур поля ветра в атмосфере, которые включали реальные и модельные структуры поля ветра, построенные с использованием этих же данных. Остальные параметры атмосферы оставались неизменными.

Результаты расчетов показали, что усложнение структуры поля ветра в атмосфере препятствует развитию конвекции. Это может быть связано с тем, что в этом случае взаимодействие облака и окружающей его атмосферой становится более интенсивным: обмен энергией и массой между ними принимает более интенсивный характер. А поступление в облако более холодного воздуха с меньшим содержанием водяного пара будет препятствовать его развитию.

Литература

1. *Ашабоков Б.А., Шаповалов А.В.* Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии // Известия КБНЦ РАН. 2008. № 1(6).

Метод суммарной аппроксимации для уравнения, описывающего процессы дробления и замерзания капель в конвективных облаках

Ашабоков Б.А.[1], **_Хибиев А.Х._**[2], **_Шхануков-Лафишев М.Х._**[3]

[1] *ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;*

[2,3] *ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; lafishev2014@yandex.ru*

Рассматривается локально-одномерная разностная схема (ЛОС) для уравнения параболического типа общего вида в p-мерном параллелепипеде. Для описания процессов дробления и замерзания капель в конвективных облаках в рассматриваемое уравнение включается нелокальный источник по массе специального вида.

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$, основанием которого служит прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, ..., x_p)\,,\ 0 < x_\alpha < l_\alpha$, $\alpha = 1,\, 2,\, \cdots\,,\ p\}$ с границей Γ рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,m,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0,\ u(x,m,0) = u_0(x,m), \tag{2}$$

где $Lu = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u$, $L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{p} q(x,m,t)u(x,m,t) +$
$+\frac{1}{p}\int\limits_{m}^{m_1} Q\left(m,m'\right) p\left(m'\right) u\left(x,m',t\right) dm'$; $0 < c_0 \leq k_\alpha \leq c_1$; $\left|r_\alpha\right|,\ |q|,$ $\left|Q\left(m,m'\right)\right|,\ \left|p\left(m,m'\right)\right| \leq c_3$.

Краевые задачи для параболического уравнения общего вида (1), (2) возникают при описании функции распределения по массам капель и ледяных частиц с учетом дробления и замерзания капель в конвективных облаках [1], [2]. Для решения задачи (1), (2) построена ЛОС и доказана ее сходимость со скоростью $O\left(|h|^2 + \tau\right)$, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_p^2$, h_α, τ – шаги сетки по пространственным координатам Ox_α и времени t.

Литература

1. *Коган Е.Л., Мазин И.П. и др.* Численное моделирование облаков. М.: Гидрометеоиздат, 1984. 178 с.

2. *Ашабоков Б.А., Шаповалов Л.В.* Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условияхи при активном воздействии. Нальчик: изд-во КБНЦ РАН, 2008. 252 с.

Об одном подходе к моделированию управления процессами осадкообразования в конвективных облаках

Ашабоков Б.А.[1], Шаповалов А.В.[2], Ташилова А.А.[3]

[1,2,3] *ВГИ, Нальчик, Россия; vgikbr@yandex.ru*
[1] *ИИПРУ, Нальчик, Россия; ashabokov.boris@mail.ru*

Задачи, встречающиеся на пути методов активного воздействия на облака, можно сформулировать следующим образом:

– нахождение локальной области в облаке, в которой условия благоприятны для активного воздействия с целью достижения поставленной цели;

– нахождение концентрации частиц реагента, которую следует обеспечить в данной области в каждый момент времени.

Более перспективным для получения методов управления осадкообразованием в облаках является рассмотрение данной проблемы в рамках теории оптимального управления.

Данная задача в работе рассмотрена для модели облака, в которой микрофизические процессы в облаках описываются детально на фоне заданной термогидродинамики [1]. Управлением является функция, описывающая источник искусственных кристаллов, вида $u\left(x, z, m, t\right)$.

Тогда задача оптимального управления микроструктурой облака формулируется следующим образом: для рассматриваемой управляемой системы найти допустимый вид управляющей функции, доставляющей минимум функционалу вида:

$$F\left[f_2, u\right] = \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} \int_{m_k}^{\infty} \int_0^{T} f_2\left(x, z, m, t\right)\, dx\, dz\, dm\, dt \to \min, \qquad (1)$$

где m_k – масса градины, достигающей поверхности земли и способной принести ущерб.

Результаты расчетов показывают, что положение в облаке зоны засева отличается от положения зон, которые засеваются согласно существующим технологиям. Существенными являются эти отличия и в случае технологии, которая используется в РФ для воздействия на градовые облака.

Литература

1. *Ашабоков Б.А., Шаповалов А.В.* Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии // Известия КБНЦ РАН. 2008. № 1 (6).

Задача расчета состояния сложных дискретных процессов со связанными краевыми условиями

Ашрафова Е.Р.

БГУ, Баку, Азербайджан; ashrafova.yegana@gmail.com

Исследуется задача расчета состояния сложного дискретного процесса, описываемого системой, состоящей из подсистем линейных алгебраических уравнений блочной структуры.

Дискретный процесс состоит из L подпроцессов:

$$A_i^k y_{i+1}^k - C_i{}^k y_i^k + B_i^k y_{i-1}^k = -F_i^k, k = 1, ..., L, i = 1, ..., n_k - 1, \qquad (1)$$

связанных между собой посредством $m = 2L$ начальных и конечных состояний в виде:

$$\sum_{j=1}^{L} \left[g_l^{sj} y_{n_j}^j + q_l^{sj} y_{n_j-1}^j \right] + \sum_{j=1}^{L} \left[g_0^{sj} y_1^j + q_0^{sj} y_0^j \right] = r^s, s = \overline{1,m}. \qquad (2)$$

Здесь $y^k = (y_0^k, \dots, y_{n_k}^k)^* \in R^{n_k} - n_k$-мерный вектор, определяющий состояние k-го процесса; A_i^k, B_i^k, $C_i^k \neq 0$ и F_i^k – заданы; n_k- длительность k-го процесса, $k = 1, \dots, L; y_0 = (y_0^1, ..., y_0^L)^*$, $y_1 = (y_1^1, ..., y_1^L)^* \in R^{2L}$ и $y_{n-1} = (y_{n_1-1}^1, \dots, y_{n_L-1}^L)^* \in R^{2L}$, $y_n = (y_{n_1}^1, \dots, y_{n_L}^L)^*$ – соответственно состояния всех подпроцессов в начальные и конечные (индивидуальный для каждого подпроцесса) моменты времени; $G = (g_l^{sj}, q_l^{sj})$ и $Q = (g_0^{sj}, q_0^{sj}), j = \overline{1,L}, s = \overline{1,m}$ – заданные матрицы размерности $m \times m$, $r = (r^1, ..., r^m)^*$ – заданный m-мерный вектор. Будем предполагать, что $\mathrm{rang}\ (G, Q) = m$, а в целом система уравнений (1), (2) имеет решение, причем единственное.

Математическая модель рассматриваемого процесса характеризуется следующими особенностями: 1) большим числом подпроцессов L; 2) большой размерностью вектора состояния подпроцессов или большой длительностью их функционирования n_k, $k = \overline{1,L}$; 3) слабыми и произвольными взаимосвязями между подпроцессами, т. е. слабой и произвольной заполненностью матриц G, Q.

Предлагаются схемы и соответствующие формулы, основанные на разработанном поблочном методе переноса условий, учитывающие особенности якобиана системы и слабую заполненность матрицы Якоби (условий связи между подсистемами).

Приводятся результаты численных экспериментов на тестовых задачах, связанных с гидравлическим расчетом нефтепроводной сети сложной структуры.

Компьютерное проектирование потоковой сети Штейнера 2-го ранга оптимальности

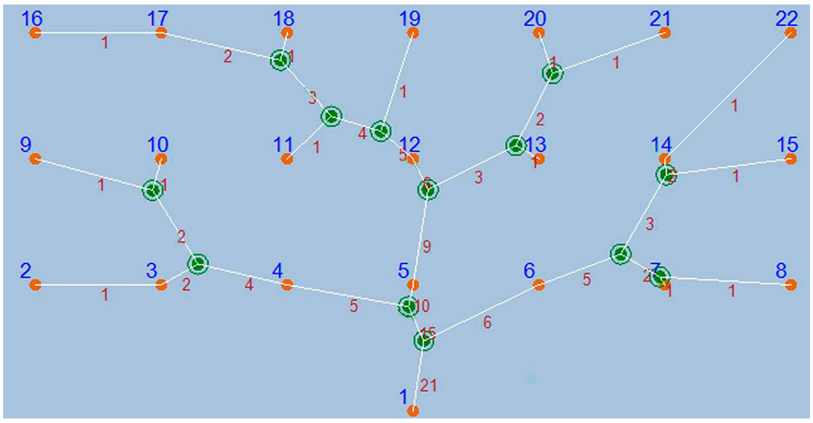
Багов М.А., Кудаев В.Ч.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; maratniipma@mail.ru

Сетевая задача Штейнера (СЗШ), являющаяся наиболее общей математической моделью задач синтеза оптимальных распределительных сетей, была представлена в работах [1, 2]:

$$\begin{cases} C = \sum\limits_{ij \in D} f_{ij}(v_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \to min, \\ \sum\limits_{ij \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum\limits_{k \in \Gamma_j^-} v_{jk} = q_j \quad \forall_j \in B; \quad \sum\limits_{j \in \Gamma_1^-} v_{1j} = \sum\limits_{j \in B_\text{ф}} q_j, \\ v_{ij} \geq 0 \quad \forall_{ij} \in D; \quad x_i = a_i, \quad y_i = b_i \quad \forall_i \in B_\text{ф}. \end{cases}$$

СЗШ, как и классическая задача Штейнера [3], является существенно многоэкстремальной и относится к классу NP-полных задач. Вследствие этого в [1, 2] введено определение ранга экстремума сети. В докладе представлены: алгоритм синтеза сети Штейнера P-го ранга, основанный на динамической декомпозиции; программа на языке C# проектирования потоковой сети Штейнера 2-го ранга оптимальности; результаты вычислительного эксперимента, показывающие эффективность алгоритма и программы. Ниже на рисунке представлена 2-оптимальная сеть.



Литература

1. *Багов М.А., Кудаев В.Ч.* Преобразование терминальной сети в сеть Штейнера // Извести КБНЦ РАН. 2015. № 6 (68). С. 31–37.

2. *Багов М.А., Кудаев В.Ч.* Сетевая задача Штейнера с учетом энергетических затрат // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1 (16). С. 85–92.

3. *Гордеев Э.Н., Тарасцов О.Г.* Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. Вып. 2, № 5. С. 3–28.

Алгоритм и программа построения базового графа терминальной сети

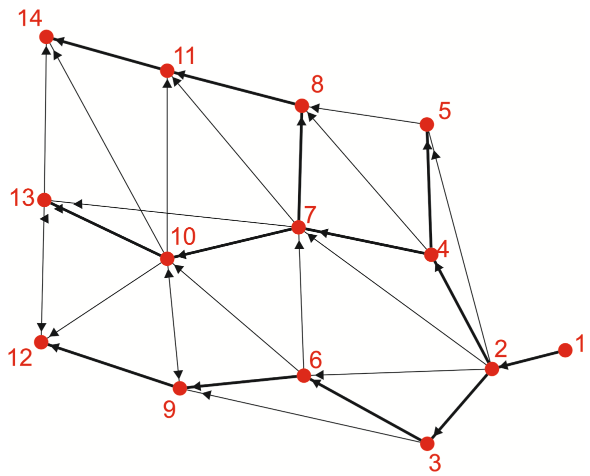
Багов М. А., Скорикова Л. В.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; mila.skorikova.67@mail.ru

Проблема состоит в построение такого связного избыточного геометрического графа соединений заданных узлов сети, который не содержит нерациональных соединений (дуг графа) [1]. Базовый граф (БГ) позволяет снизить размерность задачи синтеза оптимальной потоковой сети, являющейся существенно многоэкстремальной и относящейся к классу NP-полных задач. Метод построения БГ сети основан на следующем. Перспективность включения в БГ любой дуги (i, j) полного графа оценивается разностью затрат на подключение узлов i и j потребления потока непосредственно к источнику и подключения узлов через дугу:

$$\Phi_{ij} = \left(f\left(g_i\right) l_{1i} + f\left(g_j\right) l_{1j}\right) - \left(f\left(g_i + g_j\right) l_{1i} + f\left(g_j\right) l_{ij}\right),$$

где g_i и g_j – потребности узлов i и j, $f(g)$ – удельная стоимость потока g, l_{ij} – длина дуги (i, j). В БГ включаются по $m < (n-1)$ дуг наибольшего веса, входящих в каждый узел. Поскольку каждой дуге (i, j) БГ поставлен в соответствие вес Φ_{ij}, то в качестве начального решения задачи синтеза сети на БГ может быть построено дерево наибольшего веса. На языке C# разработана программа построения БГ сети и начального решения задачи синтеза оптимальной сети. Ниже на рисунке представлены БГ и начальное остовное дерево сети (выделено).



Литература

1. _Кудаев В. Ч., Скорикова Л. В._ Построение базового графа для задачи синтеза оптимальной потоковой сети // Известия КБНЦ РАН. 2017. № 6 (80). С. 42–48.

Об одной краевой задаче со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка

Балкизов Ж.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; Giraslan@yandex.ru

В области Ω евклидовой плоскости точек x, y рассмотрим уравнение

$$f(x,y) = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \\ u_{xxx} - u_y, & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f(x,y)$– заданная функция; $u = u(x,y)$ – искомая функция; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$, $\Omega_1 = \{(x,y) : -y < x < y + r, \, -r/2 < y < 0\}$, $\Omega_2 = \{(x,y) : 0 < x < r, \, 0 < y < h\}$ и $J = \{(x,0) : 0 < x < r\}$.

В работе изучена краевая задача для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка вида (1), когда в качестве одного из граничных условий задана линейная комбинация производных от значений искомой функции на двух независимых характеристиках с переменными коэффициентами. Получены необходимые и достаточные условия единственности и существования регулярного в области Ω решения исследуемой краевой задачи.

Отметим, что подобные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа второго порядка были изучены в работах [1]–[4].

Литература

1. *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Ученые записки Казанского государственного университета. 1962. Т. 122, № 3. С. 3–16.

2. *Нахушев А.М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.

3. *Нахушев А.М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.

4. *Килбас А.А., Репин О.А.* Задача со смещением для параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 799–805.

Моделирование явлений обтекания неровностей поверхности земли и катастрофических ветров типа боры

Беданоков М.К., Берзегова Р.Б., Шевякова О.П.

МГТУ, Майкоп, Россия; kaf_vmatsa@mkgtu.ru

В настоящее время становится все более актуальным знание особенностей влияния горных систем на атмосферные потоки, так как значительная часть мезомасштабных (местных) циркуляций возникает в результате взаимодействия крупномасштабного атмосферного потока с орографическими неоднородностями подстилающей поверхности. Это важно для исследования природы катастрофических ветров типа боры и их прогноза, разработки методов локального прогноза погоды, искусственного воздействия на погоду и климат, определения степени опасности полетов авиации в горных районах.

В работе рассматриваются двумерные задачи обтекания неровностей поверхности земли следующих видов: нелинейные и линеаризованные, многослойные и однослойные, ограниченные и неограниченные. Обсуждаются основные механизмы возникновения боры, в рамках которых рассматриваются исследования боры на основе аналитических нелинейных моделей и на основе применения различных численных моделей.

Литература

1. *Кожевников В.Н.* Возмущения атмосферы при обтекании гор. М.: Научный мир, 1999. 160 с.

2. *Шестакова А.А., Моисеенко К.Б., Торопов П.А.* Гидродинамические аспекты эпизодов Новороссийской боры 2012-2013 гг. // Изв. РАН, ФАО. 2015. Т. 51, № 4. С. 1–13.

3. *Bedanokov M.K., Berzegova R.B., Kuizheva S.K.* Atmospheric disturbances in the airflow around mountains and the problem of flight safety in the mountains of the Republic of Adygeya. // Ecologica Montenegrina. 2017. T. 14. P. 136–142.

4. *Беданоков М.К. Берзегова Р.Б., Кожевников В.Н.* Численное моделирование новороссийской боры // Геопоиск–2017: Материалы II Всероссийского конгресса молодых ученых географов, Тверь: Изд-во ТвГу, 2017. С. 322–332.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-55-40015.

Математические модели водного режима, учитывающие фрактальную структуру почвы

Беданокова С.Ю.

МГТУ, Майкоп, Россия; kaf_vmatsa@mkgtu.ru

Важную роль в почвообразовании играет вода, которая способствует протеканию различных химических реакций. В совокупности поступление воды в почву, ее передвижение, изменение физического состояния и расход воды называют водным режимом почвы. При изучении структурных свойств почв была установлена их фрактальная организация.

В связи с этим, большой интерес представляет разработка математических моделей, учитывающих влияние фрактальной структуры почвы на ее водный режим. В основе этих моделей лежат дифференциальные уравнения дробного порядка по временной и по пространственной переменной.

В работе рассмотрены математические модели водного режима в почвах, представляющих собой фрактально-коллоидное образование. Выведено базовое уравнение движения почвенной влаги на основе уравнения М. Аллера.

Посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности получены уравнения влагопереноса, учитывающие фрактальные свойства почвенных коллоидов.

Для прогнозирования динамики объемной влажности почвы предложено линейное уравнение смешанного типа.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. *Шейн Е.В.* Курс физики почв. М.: Изд-во МГУ, 2005. 432 с.
3. *Полубаринова-Кочина П.Я., Пряженская В.Т., Эмих В.Н.* Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969.
4. *Федотов Г.И., Третьяков Ю.Д., Иванов В.К., Куклин А.И., Пахомов Е.И., Исламов А.Х., Початкова Т.Н.* Влияние влажности на фрактальные свойства почвенных коллоидов // ДАН. 2006. Т. 409, № 2. С. 199–201.

Численное исследование процессов теплопереноса в горных породах

Бейбалаев В.Д.[1], Эмиров С.Н.[2], Аливердиев А.А.[3], Амирова А.А.[4], Якубов А.З.[5]

[1,5]*ДГУ, Махачкала, Россия; kaspij_03@mail.ru*;
[2,3]*ИПГ ДНЦ РАН, Махачкала, Россия;* [4]*ИФ ДНЦ РАН, Махачкала, Россия*

Для количественного анализа барической и температурной зависимостей эффективной теплопроводности гранита и песчаника на основании экспериментальных данных получено уравнение [1]

$$\lambda(T,P)=\lambda_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{0.132\Delta\lambda_P}{\lambda_0}}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-\frac{1.54\Delta\lambda_T}{\lambda_0}\left(\frac{P}{P_0}\right)^{0.65\ln(\lambda_0/(\lambda_0+\Delta\lambda_P))}}, \qquad (1)$$

где $\lambda(T,P)$ – теплопроводность горных пород, $\Delta\lambda_P$ – среднее суммарное приращение теплопроводности при постоянном давлении, $\Delta\lambda_T$ – среднее суммарное приращение теплопроводности при постоянной температуре. В работе в качестве математической модели теплопереноса в горных породах численно исследована задача.

Задача. *Найти решение уравнения*

$$\partial_{0t}^{\alpha}T(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\right), \qquad (2)$$

$$T(x,0)=\varphi(x), \quad T(0,t)=\mu_1(t), \quad T(1,t)=\mu_2(t),$$

где $\lambda(T)$ – определяется равенством (1) при фиксированном давлении, $0<\alpha<1$, $\partial_{0t}^{\alpha}T(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{T_t'(x,s)}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s$ – частная дробная производная Caputo [2].

Литература

1. *Эмиров С.Н., Бейбалаев В.Д., Рамазанова А.Э., Давудов И.А., Амирова А.А., Аливердиев А.А.* О температурных и барических закономерностях изменения теплопроводности композитных материалов // Известия РАН. Серия физическая. 2018. Т. 82, № 7. С. 979–982.

2. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик. 2003. 299 с.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-08-00059а.

Численное моделирование ослабления монохромного излучения ИК диапазона в дисперсной среде

Беккиев К.М., Шаповалов А.В.

ВГИ, Нальчик, Россия; atajuk@mail.ru

Работа оптико-электронных систем зависит как от их технических характеристик, так и от состояния атмосферы, содержащей аэрозольные частицы, и конденсированной воды в виде капель и кристалликов. Исследование условий и характеристик распространения электромагнитных волн в дисперсных средах в атмосфере является актуальной научно-технической задачей [1]. Как известно физические свойства дисперсных сред зависят от размеров частиц, их концентрации, фазового состояния. Исследованию этих вопросов посвящено множество работ в нашей стране и за рубежом. Для изучения различных прикладных вопросов, связанных с прохождением электромагнитного излучения (ЭМИ) в таких средах, необходима информация о микроструктуре дымки и туманов. Для получения такой информации используются данные измерений и результаты численного моделирования спектров частиц по микрофизическим моделям туманов и облаков.

Целью данной работы являлись расчеты микроструктурных характеристик туманов и облаков и анализ влияния дисперсной среды различного фазового состава на распространение сигнала от источника ЭМИ инфракрасного диапазона длин волн. Для расчета аэрозольного ослабления разработано программное обеспечение, в котором входными параметрами являются: длина волны излучения, размер частиц дисперсной (аэрозольной) среды, концентрация частиц, комплексный показатель преломления. Процессы распространения и ослабления оптического излучения в атмосфере описывают с помощью оптических характеристик: коэффициентов ослабления, поглощения и рассеяния, оптической толщи среды, индикатрисы излучения, геометрических параметров, связанных с обратным рассеянием, поляризационных характеристик.

Были проведены расчеты факторов ослабления, рассеяния и поглощения капель и ледяных частиц радиусом от 0,001 мкм до 10 мкм в ИК диапазоне длин волн 3 – 5 и 8 – 13 мкм. Использование в модели функций распределения капель и кристаллов по размерам позволяет рассчитывать ослабление, поглощение и рассеяние электромагнитного излучения в дисперсной среде с учетом фактических спектров частиц.

Литература

1. _Лисаков С.А., Павлов А.Н., Сыпин Е.В., Леонов Г.В._ Моделирование ослабления оптического излучения в газодисперсной системе «угольная пыль–воздух» // Фундамент. исслед. 2015. Т. 2. № 12. С. 288–296.

Об одной краевой задаче для вырождающегося псевдопараболического уравнения с дробной производной Герасимова – Капуто

Бештоков М.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; beshtokov-murat@yandex.ru

Задача. *В замкнутом цилиндре* $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ *рассмотрим краевую задачу*

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{x^m}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^m \eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) +$$

$$+ r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t),\ 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} x^m \Pi(x,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \tag{4}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau$ *– дробная производная в смысле Герасимова – Капуто порядка* α, *где* $0 < \alpha < 1,\ c_i > 0, i = 0,1,2,\quad 0 \le m \le 2$, $\Pi(x,t) = ku_x + \partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(x)u_x\big)$.

$$0 < c_0 \le k(x,t), \eta(x) \le c_1,\ |r(x,t), r_x(x,t), k_x(x,t), q(x,t)| \le c_2, \tag{5}$$

Справедлива следующая [1]

Теорема. Если $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0,l]$, $r(x,t), q(x,t), f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{(2,0)}\big(Q_T\big) \cap C^{(1,0)}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(Q_T)$ и выполнены условия (5), то для решения $u(x,t)$ задачи (1)–(4) справедлива оценка

$$\|x^{m/2}u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{m/2}u_x\|_0^2 \le$$

$$\le M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|x^{m/2}f\|_0^2 + \|x^{m/2}u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big),$$

где $M > 0$, зависящая только от входных данных задачи (1)–(4), $D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана – Лиувилля.

Литература

1. *Алиханов А.А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // ДУ. 2010. Т. 46. №5. С. 658–664.

Краевые задачи для квазилинейных уравнений параболо-гиперболического типа в теплофизике

Бжихатлов Х.Г.

Нальчик, Россия

В работе рассматриваются краевые и начально-краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа в контактирующей области, возникающие при решении ряда фундаментальных прикладных задач.

Для отыскания частных решений применяются специальные приемы, основывающиеся на преобразовании зависимых и независимых переменных, позволяющие линеаризовать исходные уравнения и краевые условия.

Далее доказывается единственность и существование решения полученных линеаризованных задач.

Процессы различной физической природы объединяются общностью математической модели для определения функции, описывающей эти процессы. Температура неравномерно нагретого тела, концентрация вещества в растворах, диффузия газа, процессы фильтрации и другие могут быть описаны функцией, являющейся решением уравнения одного типа, а именно параболического типа.

Математическая модель и уравнения в модели зависят от свойств среды. В случае большой скорости проводимости применяется уравнение параболического типа, а в случае малой проводимости уравнение гиперболического типа. Для получения этих уравнений учитываются общие законы сохранения и теплофизические характеристики среды, в которой протекают эти процессы. В общем случае эти характеристики зависят от температуры и от градиента температуры. В таких случаях приходится рассматривать нелинейные уравнения.

Математической моделью такого сложного теплообмена в контактирующей среде с различными тепловыми характеристиками является квазилинейное уравнение смешанного типа

$$0 = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{1+\gamma\frac{\partial U}{\partial z}}\right] - \frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial z}, & y > 0, \\ y^2U_{xx} - U_{yy} + \lambda U_x, & y < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Работа посвящена постановке и исследованию некоторых начально-краевых задач для уравнения (1) в контактирующей среде с различной проводимостью.

О разрешимости уравнения в частных производных первого порядка с производной Джрбашяна – Нерсесяна

Богатырева Ф.Т.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; fatima_bogatyreva@bk.ru

В области $D =]0, l[\times]0, T[$, $0 < l, T \leq \infty$ рассмотрим уравнение

$$u_x(x,y) + aD_{0y}^{\{\alpha,\beta\}}u(x,y) + bD_{0y}^{\{\gamma,\delta\}}u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $D_{0y}^{\{\alpha,\beta\}}, D_{0y}^{\{\gamma,\delta\}}$ – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна порядков $\mu = \alpha + \beta - 1 > 0$, $\nu = \gamma + \delta - 1 > 0$, соответственно, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0, 1], a, b$ – const, $f(x,y)$ – заданная действительная функция.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна (секвенциальная дробная производная) порядка α, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n\}$, определяется соотношением [1]

$$D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n\}}u(x,y) = D_{0y}^{\gamma_n - 1}D_{0y}^{\gamma_{n-1}} ... D_{0y}^{\gamma_1}D_{0y}^{\gamma_0}u(x,y), \tag{2}$$

где D_{0y}^{γ} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля порядка γ [2].

В работе изучены вопросы влияния распределения параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ на разрешимость уравнения (1).

Литература

1. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика. 1968. С. 3–28.

2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462-А.

О приближенно-аналитическом методе решения дифференциальных уравнений в частных производных со степенной нелинейностью

Бозиев О.Л.

ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; boziev@yandex.ru

Для нахождения в одномерной области $(0,T)\times\Omega$ приближенных решений начально-краевых задач для нелинейных ДУЧП

$$Lu + F(u) = f, \tag{1}$$

где Lu – линейный дифференциальный оператор гиперболического или параболического типа, $F(u)$ – функция со степенной нелинейностью, предлагается процедура:

1. Замена (1) ассоциированным нагруженным уравнением

$$Lu + \bar{F}(u) = f, \tag{2}$$

где $F(u)$ имеет вид $\bar{F}(u) = \int_\Omega u^p dx$, и установление в $L_p(\Omega)$ оценки

$$\|u\|_p^p \leqslant K(t). \tag{3}$$

2. Переход от (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое в гиперболическом случае имеет вид

$$\bar{u}'' + a\|u\|_{p,\Omega}^p \bar{u}' + b\bar{u} = \Phi(t), \tag{4}$$

где $\bar{u}(t) = \int_\Omega u dx$; линеаризация (4) путем выбора в (3) равенства:

$$\bar{u}'' + aK(t)\bar{u}' + b\bar{u} = \Phi(t), \tag{5}$$

и нахождение решения задачи Коши для (5), которое позволяет записать функцию u, являющуюся решением исходной задачи для уравнения (2).

3. Нахождение приближенных решений задачи для уравнения (1) последовательной аппороксимацией решения исходной задачи:

$$Lu^{(k)} + F(u^{(k-1)}) = f.$$

В [1] метод изложен для гиперболического уравнения при натуральном p, в [2] -– для параболического уравнения при $p \in (0,1)$.

Литература

1. *Бозиев О.Л.* Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом // Вестник Томского гос. университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 5–14.

2. *Бозиев О.Л.* Аппроксимация решений нелинейных параболических уравнений решениями ассоциированных нагруженных уравнений // Нелинейный мир. 2018. № 4. С. 3–10.

Об одной математической модели охлаждения биологической ткани

Буздов Б.К.

ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; beslan.buzdov@yandex.ru

Вопросы прогнозирования результатов криогенного воздействия на биологические ткани приводят к исследованию краевых задач, отличительной особенностью которых является существование стационарных решений. Стабилизация во времени поля температуры к решению соответствующей стационарной задачи связана с тем, что отводимый поток тепла компенсируется возникающими в биоткани нелинейными источниками тепла специального вида, обусловленными крово- и лимфотоком, метаболизмом, окислительными химическими реакциями. Характерной особенностью процесса теплопроводности при охлаждении биологической ткани является реально наблюдаемый эффект пространственной локализации температурного поля.

В работе приводится постановка и метод численного исследования трехмерной краевой задачи, соответствующей отводу тепла с поверхности биологической ткани плоским аппликатором прямоугольной формы. Искомое поле температуры и граница влияния холода определяется с использованием методики «сквозного счета» [1]. Модель учитывает реально наблюдаемый на практике эффект пространственной локализации тепла и имеет приложение в криомедицине.

Для численного решения поставленной задачи построена локально-одномерная разностная схема [2].

Литература

1. *Самарский А.А., Моисеенко Б.Д.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. № 5. С. 816–827.

2. *Самарский А.А.* Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. № 3. С. 431–466.

Моделирование взаимодействия молекулы фуллерена C_{60} со свободным и эпитаксиальным графеном

Бухурова М.М.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

Графен имеет многообещающие перспективы применения в современной электронике — это контакты и теплоотводы различных электронных компонентов, функциональные слои в оптоэлектронике и интегральных схемах. При этом графен может быть получен путем механического расслоения графита, различных химических реакций (в частности, на поверхностях карбида кремния и металлов), CVD-процесса и контролируемой поверхностной сегрегации атомов углерода. Направленное изменение физико-химических свойств графена достигается за счет внедрения примесных атомов и/или молекул из газовой фазы, что аналогично роли легирования в технологии объемных полупроводниковых материалов. В настоящем докладе анонсируются результаты работ [1, 2]. С использованием парного потенциала Леннарда – Джонса выведены формулы для потенциала и силы взаимодействия молекулы фуллерена C_{60} со свободным и эпитаксиальным графеном, который адсорбирован на толстой подложке. Проведено численное моделирование падения молекулы фуллерена на свободный и эпитаксиальный графен. Показано, что вблизи поверхности молекула совершает колебательное движение, характер которого зависит от начальных условий и параметров взаимодействия. Получена формула для удельной энергии адгезии графена.

Литература

1. *Рехвиашвили С.Ш., Бухурова М.М.* Моделирование взаимодействия молекулы фуллерена C_{60} с графеном // Физикохимия поверхности и защита материалов. 2017. Т. 53, № 6. С. 569–571.

2. *Рехвиашвили С.Ш., Бухурова М.М.* Моделирование взаимодействия фуллерена C_{60} с эпитаксиальным графеном // Журнал физической химии. 2018. Т. 92, № 10. С. 1562–1566.

К вопросу о типах спектральных задач для обыкновенного дифференциального пучка данного порядка с различными характеристиками

Вагабов А.И., Ибрагимов М.Г.

ДГУ, Махачкала, Россия; vahabov@mail.ru; murad.ibragimov72@mail.ru

В случае кратности корней характеристических уравнений соответствующих спектральных задач, скажем порядка 12, мы сталкиваемся с разнообразными их типами:

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)^{12}, \ \left(\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\right)^{6}, \ \left(\frac{d^3}{dx^3}-\lambda^3\right)^{4}, \ \left(\frac{d^4}{dx^4}-\lambda^4\right)^{3}, \ldots$$

и связанными с ними краевыми условиями регулярного типа. Так в [1], в случае простого дифференциального пучка $\left(\dfrac{d}{dx}-\lambda\right)^{n}$ с единственным n–кратным корнем -1, установлена теорема n–кратной разложимости n произвольных функций в ряды Фурье по корневым элементам пучка. Отдельные частные задачи рассмотрены в статьях [2], [3].

В случае пучков, приведенных выше, устанавливается

Теорема. *Для любой двенадцатикратно непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, $0 < x < 1$, равной нулю вместе с производными, при распадающихся краевых условиях ранга не меньше двух, справедливо разложение в двенадцатикратные ряды по собственным элементам этих пучков.*

Литература

1. *Вагабов А.И.* n–кратная формула разложения в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с n–кратной характеристикой // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 555–560.
2. *Вагабов А.И.* Спектральная задача с двумя двукратными корнями характеристического уравнения дифференциального пучка четвертого порядка // Успехи современной науки. 2016. Т. 3, № 5. С. 115–120.
3. *Вагабов А.И.* Ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка десятого порядка с пятикратными корнями характеристического уравнения // Известия Вузов, Поволжский регион, физ.-матем. науки. 2017. № 1 (41). С. 44–50.

Об одном классе начально-краевых задач в аэрогидроупругости

Вельмисов П.А., Покладова Ю.В.

УлГТУ, Ульяновск, Россия; velmisov@ulstu.ru; pokladovau@inbox.ru

Исследуется динамика и устойчивость деформируемых элементов конструкций, находящихся во взаимодействии с потоком газа или жидкости. Рассматриваются математические модели динамики деформируемых элементов (упругих пластин), являющихся составными частями вибрационных устройств, защитных экранов, датчиков давления. Математические модели представляют собой начально-краевые задачи для связанных систем дифференциальных уравнений с частными производными для гидродинамических функций и функций деформаций упругих элементов (см., например, [1–3]).

Исследуется динамика и устойчивость деформируемых элементов механических систем при внешнем (защитные устройства) и внутреннем (датчики давления, вибрационные устройства) обтекании потоком жидкости (газа). Рассматриваются дозвуковой и сверхзвуковой режимы обтекания. Для описания динамики упругих элементов используются как линейные, так и нелинейные модели твердого деформируемого тела. Аэрогидродинамическое воздействие на конструкции определяется из асимптотических или точных уравнений газовой динамики в модели идеальной или вязкой среды (уравнений Лапласа, уравнений Навье – Стокса и др). Численно-аналитическое решение основано на методе Бубнова – Галеркина. Проведен численный эксперимент с целью определения характера колебаний.

Литература

1. *Вельмисов П.А., Покладова Ю.В.* Математическое моделирование динамики защитной поверхности резервуара // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2018. № 2. С. 27–35.

2. *Вельмисов П.А., Покладова Ю.В.* Математическое моделирование динамики упругих элементов, взаимодействующих с потоком газа // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2018. № 3. С. 22–30.

3. *Вельмисов П.А., Покладова Ю.В.* О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод - датчик давления»// Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (29). С. 137–144.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области, проект № 18-41-730015.

Метод сопряженных градиентов с предобуславливанием для решения задач квантовой химии

Винокурский Д.Л., Кононова Н.В., Ванина А.Г.

СКФУ, Ставрополь, Россия; dlvinokursky@gmail.com; knv_fm@mail.ru; hnykina_ anna@mail.ru

Метод функционала электронной плотности широко используется для моделирования многоэлектронных систем. В данной работе представлено использование проекционного метода для решения уравнений метода функционала электронной плотности взаимодействующих многоэлектронных систем.

В данной модели полная энергия многоэлектронной системы может быть определена следующим образом [1, 3]:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int |\nabla\psi_i|^2 \cdot dV + \int \rho(r)\cdot V_{ion}(r)\cdot dV + \\ + \frac{1}{2}\iint \frac{\rho(r)\cdot\rho(r')}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\cdot dV\cdot dV' + E_{xc}\left(\rho(r)\right)$$

Здесь ψ_i, $i = 1, 2 \ldots, N$ – одночастичная волновая функция, обладающая свойством ортогональности $\int \psi_i^* \psi = \delta_{ij}$. В данной работе решение представленной задачи предложено проводить с применением проекционных методов с предобуславливателем [3]. Данный метод позволяет существенно сократить время решения задачи Кона – Шэма для многоэлектронной системы.

Литература

1. *Gunnarsson O. and Lundqvist B.I.* Exchange and correlation in atoms, molecules, and solids by the spin-density-functional formalism // Phys. Rev. B. 1976. Vol. 13. P. 4274–4298.

2. *Капорин И.Е., Милюкова О.Ю.* MPI+OpenMP параллельная реализация метода сопряженных градиентов с некоторыми явными предобусловливателями.Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. 28 с.

3. *Richard M.M.* Electronic structure: basic theory and practical methods. Cambridge University Press, 2004.

Обобщение теоремы Ли – Янга в статистической механике решеточных систем

Вирченко Ю.П., Данилова Л.П.

НИУ БелГУ, Белгород, Россия; virch@bsu.edu.ru

Рассматривается классическая решеточная система статистической механики, которая называется решеточным газом. Гиббсовское распределение вероятностей $\mathsf{P}(A) = \Pr\{A \subset \Omega\}$ этой системы задается на множестве $\{\rho(\mathbf{x}) \in \{0,1\}; \mathbf{x} \in \Omega\}$ двузначных функций, определенных на дискретном подмножестве $\Omega = \{\mathbf{x} = a(n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3); n_j = 0, 1, ..., L; j = 1, 2, 3\}$, $a > 0$ евклидова пространства. При этом вероятность для случайного множества $A = \{\mathbf{x} \in \Omega : \rho(\mathbf{x}) = 1\}$ определяется формулами

$$\mathsf{P}(A) = Z^{-1}\exp(-\mathsf{H}[\rho]/T)\,, \qquad Z = \sum_{\{\rho(\mathbf{x})\}} \exp(-\mathsf{H}[\rho]/T)\,, \quad T > 0\,,$$

с параметром $T > 0$, называемом температурой системы, где функционал $\mathsf{H}[\rho]$, называемый гамильтонианом, имеет вид

$$\mathsf{H}[\rho] = -\mu \sum_{\mathbf{x}\in\Omega} + \sum_{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\subset\Omega} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})\,,$$

с суммируемой на $a\mathbb{Z}^3$ функцией U, $\|U\| = \lim_{L\to\infty}\sum_{\mathbf{x}\in a\mathbb{Z}^3}|U(\mathbf{x})| < \infty$. Функция $P(\rho, T) = (T/|\Omega|)\ln Z$ называется давлением решеточного газа. Фазовым переходом в системе решеточного газа называется скачок функции $\rho(P,T)$ при изменении давления $P \in \mathbb{R}_+$, где ρ – значение математического ожидания случайной функции $\rho(\mathbf{x})$ по распределению вероятностей $\mathsf{P}(\cdot)$. Критической точкой в квадранте положительных компонент векторов на плоскости $\langle\rho, T\rangle$ называется такая точка, в которой имеет место $\partial P/\partial\rho = 0$, $\partial^2/\partial\rho^2 = 0$. Доказано следующее обобщение известной в статистической механике теоремы Ли и Янга.

Теорема. _Пусть T_c – наибольшая из возможных для системы решеточного газа критических температур. Если T принадлежит интервалу температур (T_c, T_*), свободном от таких значений температуры, которые соответствуют критическим точкам системы, то значение μ, при котором происходит скачок плотности при температуре T, равно_

$$\mu = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}\in a\mathbb{Z}^3} U(\mathbf{x}).$$

Уравнения динамики конденсированных сред с локальным законом сохранения

Вирченко Ю.П., Субботин А.В.

НИУ БелГУ, Белгород, Россия; virch@bsu.edu.ru

В докладе обсуждается общая проблема математической физики, которая возникает в связи с решением некоторых проблем неравновесной термодинамики сложных конденсированных сред, у которых, для описания их локальной термодинамики, необходимо привлечение т.н. параметров порядка. Эта проблема состоит в построении адекватных эволюционных уравнений $\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathsf{L}[\boldsymbol{\zeta}]$ дивергентного типа для набора $\boldsymbol{\zeta} = \langle \zeta^{(\alpha)}(\mathbf{x}); \alpha = 1 \div n \rangle$ полей на $\mathbb{R}^3$, описывающих релаксацию неравновесных состояний в таких средах к термодинамическому равновесию. Значения полей $\zeta^{(\alpha)}$ преобразуются по представлениям группы $\mathbb{O}_3$ (в общем случае, приводимым). В связи с решением этой проблемы возникает

Задача. *Описать все возможные операторы* $\mathsf{L} = \langle \mathsf{L}^{(\alpha)}; \alpha = 1 \div n \rangle$, *которые являются нелинейными дифференциальными по векторному аргументу* $\mathbf{x}$ *дивергентного типа и имеют порядок не выше второго. Таким образом, они действуют в пространстве* $\left(\mathrm{C}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)\right)^n$ *и имеют вид* $\mathsf{L}^{(\alpha)} = \nabla_j \mathsf{S}_j^{(\alpha)}$,

$$\mathsf{S}_j^{(\alpha)}[\boldsymbol{\zeta}] = \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{k=1}^{3} a_{jk}^{(\alpha,\beta)}(\boldsymbol{\zeta}) \nabla_k \zeta^{(\beta)} + b_j^{(\alpha)}(\boldsymbol{\zeta}) , \qquad \alpha = 1 \div n . \tag{1}$$

Кроме того, коэффициенты $a_{jk}^{(\alpha,\beta)}(\boldsymbol{\zeta})$ *и* $b_j^{(\alpha)}(\boldsymbol{\zeta})$, $\alpha, \beta 1 \div n$, $j, k = 1 \div 3$ *операторов не зависят явным образом от* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ *и* $t \in \mathbb{R}_+$.

Отдельно анализируется эта задача в сферически симметричном случае, когда $\boldsymbol{\zeta}$ является векторным $\mathbf{p}$, либо псевдовектрным $\mathbf{m}$ полем. В частности, доказано важное для физики ферромагнетизма утверждение.

Теорема. *Класс всех дифференциальных операторов* $\mathsf{L}^{(i)}[\cdot]$ *в пространстве* $\left(\mathrm{C}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)\right)^3$, *которые обладают потоками (1) и: 1) инвариантны относительно трансляций* $\mathbb{R}^3$; *2) поля* $\mathsf{L}^{(i)}[\mathbf{m}]$, $i = 1, 2, 3$ *являются псевдовекторными; 3) обладают инвариантами движения* $\mathbf{m}^2(\mathbf{x}, t) = m^2$, $(\nabla, \mathbf{m}) = 0$, *состоит из тех только тех операторов, у которых*

$$\mathsf{S}_j^{(i)}[\mathbf{m}] = \sum_{k,l=1}^{3} m_k \left[\gamma(\varepsilon_{ikl}\nabla_j - \varepsilon_{jkl}\nabla_i) m_l - \gamma'(\varepsilon_{ikl}\nabla_l m_j - \varepsilon_{jkl}\nabla_l m_i) \right]$$

с постоянными γ *и* γ', ε_{ijk} *– символ Леви – Чивита.*

Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с операторами Римана – Лиувилля в краевом условии

Водахова В.А., Бештоков И.Х.

КБГУ, Нальчик, Россия; v.a.vod@yandex.ru

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y, \quad y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m = const > 0$, в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x, y) : \ 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, а Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный характеристиками

$$AC: \ x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0, \ BC: \ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1) и отрезком $I \equiv AB = (0, 1)$ прямой $y = 0$.

Задача. *Требуется определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:*

1) *при $y \neq 0$ функция $u(x, y)$ является решением уравнения* (1);
2) $u(x, y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega) \cap C^{3,1}_{x,y}\left(\bar{\Omega}_1\right) \cap C^{2,2}_{x,y}\left(\Omega_2\right)$;
3) *функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям*

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \alpha(x) D^a_{0x} \delta(x) u\left[\theta_0(x)\right] + \beta(x) D^b_{x1} \omega(x) u\left[\theta_1(x)\right] + \\ + \gamma(x) u(x, 0) + c(x) u_y(x, 0) = d(x), \quad \forall x \in I, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\varphi_i(y) \in C\left(\overline{I}\right) \left(i = \overline{1,3}\right)$; a, b – вещественные числа; $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $\delta(x)$, $\omega(x) \in C^1\left(\overline{I}\right) \cap C^2(I)$, причем $\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) + c^2(x) \neq 0$; $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), *выходящих из точки $(x, 0)$ с характеристиками AC и BC, соответственно; D^l_{ax} – оператор дробного, в смысле Римана – Лиувилля, интегро-дифференцирования порядка l.*

Доказана теорема единственности решения задачи (1)–(3).

Вопрос существования решения задачи редуцирован к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно производной от следа искомого решения $u_y(x, 0) = \nu(x)$, безусловная разрешимость которого в требуемом классе функций следует из единственности решения задачи (1)–(3).

Переопределенная краевая задача для уравнения Лапласа

Волчков Валерий В., Волчков Виталий В.

ДонНУ, Донецк, Украина; valeriyvolchkov@gmail.com; volna936@gmail.com

В настоящее время хорошо известен ряд утверждений, характеризующих круг как множество точек на плоскости с различными экстремальными свойствами (см., например, [1] и библиографию к этой работе). Отдельные результаты такого вида формулируются в терминах теории функций, интегральной геометрии, математической физики. В данной работе показано, что круг является единственной областью, для которой имеет решение некоторая внешняя переопределенная граничная задача Неймана. Этот результат (см. теорему 1 ниже) интересно сравнить со старой гипотезой Шиффера, связанной с описанием множеств Помпейю [2].

Пусть Γ – замкнутая гладкая жорданова кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, G – ограниченная область в $\mathbb{C}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Как обычно, символом $\frac{\partial}{\partial n}$ будем обозначать оператор дифференцирования в направлении внешней (по отношению к G) нормали к Γ.

Теорема 1. _Пусть функция f гармонична в области $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, непрерывна в $\mathbb{C} \setminus G$ и выполнены следующие условия: 1) $f = 0$ на Γ; 2) $\frac{\partial f}{\partial n} = 1$ на Γ; 3) $f(z) = o\left(|z|^2\right)$ при $z \to \infty$. Тогда G – круг и $f(z) = R \ln \frac{|z-z_0|}{R}$, где z_0, R – центр и радиус круга G._

Обозначим $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, $\Phi(z) = z - \frac{2}{3z} - \frac{1}{27z^3}$, $\Phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in A\}$. Нетрудно видеть, что функция Φ однолистна в A и область $G = \mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(A)}$ имеет гладкую границу и не является кругом. Пусть g – обратная к Φ функция, действующая из $\Phi(A)$ на A. Тогда имеют место следующие утверждения: 1) функция $f_1 = \ln |g|$ удовлетворяет условиям 1, 3 теоремы 1; 2) функция $f_2 = \frac{10}{9} \ln |g| - \frac{1}{3} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{g^2}\right)$ удовлетворяет условиям 2, 3 теоремы 1; 3) функция $f_3 = \frac{10}{9} \ln |g| + \frac{1}{6} \mathrm{Re}\left(g^2 - \frac{1}{g^2}\right)$ удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 1 и $f(z) = O(|z|)$ при $z \to \infty$; 4) функции f_1, f_2, f_3 гармоничны в области $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ и непрерывны в $\mathbb{C} \setminus G$.

Указанные примеры показывают необходимость условий 1, 2 и точность условия 3 в теореме 1.

Литература

1. _Бляшке В._ Круг и шар. М.: Наука, 1967.

2. _Volchkov V. V._ Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht: Kluwer, 2003. 454 p.

Нелокальная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования

Гадзова Л.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; macaneeva@mail.ru

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_j \in]1,2[$, $\beta_1 > 0$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_m$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ – производная Капуто [1, с. 11].

В работе [2] для уравнения (1) исследуется краевая задача с локальным смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования, связывающим значение искомого решения на концах рассматриваемого интервала со значениями во внутренних точках.

В настоящей работе получено решение нелокальной задачи с интегральным смещением для уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u(0) = u_0, \quad u(1) - \int_0^1 K(t)u(t)dt = u_1,$$

где $K(t) \in C[0,1]-$ заданная функция, u_0, u_1- заданные постоянные.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Гадзова Л.Х.* Краевая задача со смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 149. С. 25–30.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462-А.

Соотношение типа Гаусса № 8 для функции Горна H_3

Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М.

КФУ, Казань, Россия; ilnur_garipov@mail.ru; mavly72@mail.ru

В теории оси симметрического уравнения Гельмгольца используется конфлюэтная функция Горна [1]

$$H_3(\alpha,\beta;\delta;z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n-m}(\beta)_n}{(\delta)_n}\frac{z^n}{n!}\frac{t^m}{m!}.$$

В работе [2] была доказана формула

$$(\delta-\beta-\alpha)H_3(\alpha,\beta;\delta;z,t)=(\delta-\beta)H_3(\alpha,\beta-1;\delta;z,t)-$$

$$-\alpha(1-z)H_3(\alpha+1,\beta;\delta;z,t)+\frac{t}{\alpha-1}H_3(\alpha-1,\beta,\delta;z,t),$$

из которой при $t=0$ как частный случай следует

$$(\delta-\alpha-\beta)F(\alpha,\beta;\delta;z)=(\delta-\beta)F(\alpha,\beta-1;\delta;z)-\alpha(1-z)F(\alpha+1,\beta;\delta;z).$$

В этой работе доказана формула

$$\delta(1-z)H_3(\alpha,\beta;\delta;z,t)-\delta H_3(\alpha-1,\beta;\delta;z,t)+(\delta-\beta)\,zH_3(\alpha,\beta;\delta+1;z,t)=$$

$$=\frac{-\delta t}{(1-\alpha)(2-\alpha)}H_3(\alpha-2,\beta;\delta;z,t),$$

из которой при $t=0$ как частный случай следует

$$\delta(1-z)F(\alpha,\beta;\delta;z)-\delta F(\alpha-1,\beta;\delta;z)+(\delta-\beta)\,zF(\alpha,\beta;\delta+1;z)=0.$$

Литература

1. *Капилевич М.Б.* О конфлюэнтных функциях Горна // Дифференциальные уравнения. 1966. Т. 2, № 9. С. 1239–1254.
2. *Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б.* Гауссово соотношение № 3 для функций Горна H_3 // Актуальные проблемы прикладной математики: Материалы IV Международной научной конференции. Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. 165 с.

Нагрев твердых вязкоупругих тел при динамическом трении

Гасанов А.Б.

БГУ, Баку, Азербайджан; hesenli_ab@mail.ru

Разработана математическая модель и теоретически исследован процесс нагрева от трения трущихся пар при эксплуатации промышленных машин.

Известно, что в металлах при повышенных температурах преобладают вязкие свойства, поэтому вязкоупругая модель, описываемая дробно-дифференциальными выражениями более точно отражает поведение твердых тел под воздействием высоких температур. В момент времени $t = 0$ два вязкоупругих стержня с разными физическими параметрами прижимаются друг к другу с постоянной торцевой нагрузкой $P_0H(t)$ и один из стержней вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$.

Вследствие наличия трения в стыке двух тел (в сечении $x = 0$) осуществляется нагрев торцов стержней, т.е. действует источник тепла постоянной мощности. Продолжительность протекания процесса очень мала (10-30 сек.), поэтому выделяемая тепловая энергия накапливается в области трения и способствует интенсивному нагреву материала в зоне стыка и можно пренебречь отводом тепла путем конвекции от боковой поверхности стержней.

Математическая задача сводится к решению систем уравнений, состоящих из уравнений движения, уравнения теплопроводности, определяющие соотношения для сред фрактальной структуры и соответствующих начальных и краевых условий в различных вариантах. Предложенный аналитический метод решения нестационарных динамических задач ТВУ с произвольной реологией, позволяет получение материалов с заданными эксплуатационными свойствами, путем нахождения значений реологических функций. Наличие математической модели физического процесса и аналитическое решение соответствующей математической задачи позволяет оптимальный выбор значений энергосиловых параметров. В отличие от металлов полимерные детали можно легко сварить при периодическом знакопеременном нагружении с использованием продольных (или поперечных) сдвиговых напряжений и эта особенность позволяет упростить конструкцию машин сварки трением. На основе полученных результатов разработано захватывающее термофрикционное устройство для освобождения прихваченных колонн нефтяных скважин.

Об одной задаче Коши для дифференциального уравнения дробного порядка

Гачаев А.М.[1], **_Хасамбиев М.В._**[2]

[1] *ЧГУ, КНИИ РАН, Грозный, Россия; gachaev_chr@mail.ru*
[2] *ГГНТУ, Грозный, Россия; hasambiev@mail.ru*

Для уравнения

$$u''(x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{0x}^{\alpha_i} u(x) + p(x)u(x) = \mu(x), \tag{1}$$

где $0 < \alpha_i < 1$, $i = \overline{1,n}$, $p(x) \in C[0,1]$, $\mu(x) \in C[0,1]$, $0 < x < 1$, $\partial_{0x}^{\alpha_i}$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто порядка α_i [1]-[3]:

$$\partial_{0x}^{\alpha_i} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)} \int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\alpha_i}} dt.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = \beta, u'(0) = \gamma. \tag{2}$$

Показано, что для задачи (1)-(2) имеет место теорема существования и единственности решения.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Алероев Т.С.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка // Доклады АМАН. 1994.

3. *Гачаев А.М.* Задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка // Вестник ЧГУ. 2009. № 1.

Задача Жевре для смешанно-параболического уравнения с дробными производными различного порядка

Геккиева С.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; gekkieva_ s@mail.ru

Пусть $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup AB$, где $\Omega^- = \{(x,y): \ -l < x < 0, \ 0 < y < h\}$, $\Omega^+ = \{(x,y): \ 0 < x < l, \ 0 < y < h\}$, $AB = \{(0,y): \ 0 < y < h\}$.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} = \begin{cases} D_{0y}^{\alpha} u, \ x > 0, \\ D_{hy}^{\beta} u, \ x < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где D_{ts}^{γ} – оператор Римана – Лиувилля порядка γ, $0 < \alpha, \ \beta < 1$ [1].

Задача. *Найти функцию*

$$u(x,y) = \begin{cases} u^+(x,y), \ (x,y) \in \Omega^+, \\ u^-(x,y), \ (x,y) \in \Omega^-, \end{cases}$$

удовлетворяющую уравнению (1) *в областях* Ω^+, Ω^-, *граничным условиям*

$$u^+(l,y) = \psi_1(y), \ 0 \le y \le h, \quad u^-(-l,y) = \psi_2(y), \ 0 \le y \le h,$$

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u^+(x,y) = \varphi_1(x), \ 0 \le x \le l,$$

$$\lim_{y \to h} D_{hy}^{\beta-1} u^-(x,y) = \varphi_2(x), \ -l \le x \le 0,$$

и условиям сопряжения

$$u^+(0,y) = u^-(0,y) \quad u_x^+(0,y) = u_x^-(0,y), \quad 0 < y < h,$$

где $\varphi_1(x) \in C[0,l]$, $\varphi_2(x) \in C[-l,0]$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y) \in C[0,h]$.

Единственность решения задачи следует из принципа экстремума для оператора дробного дифференцирования [1].

Вопрос разрешимости редуцируется к вопросу разрешимости обобщенного уравнения Абеля в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

Аппроксимация функции средними Валле Пуссена в пространствах H_{ω^*}

Голава М.Р.

АГУ, Сухум, Абхазия; marianagolava@yandex.ru

Пусть $S[f]$ – тригонометрический ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции с нормой $\|f\|_C := \max\limits_x |f(x)|$. $\sigma_{n,p}(f,x)$ – средние Валле Пуссена ряда $S[f]$,

$$H_{\omega^*} := \left\{ f \in C : \|f\|_{\omega^*} := \|f\|_C + |f|_{\omega^*} \right\},$$

где

$$|f|_{\omega^*} := \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h f\|_C}{\omega^*(h)},\ \Delta_h f := f(x+h) - f(x),\ h > 0,$$

$\omega^*(t)$ – положительная и неубывающая при $t > 0$ функция, (см., например, [1]).

Уточняется один результат С.А. Теляковского [2] относительно порядка приближения средних Валле Пуссена $\sigma_{n,p}$, при $\frac{n}{2} \le p \le n-1$, в пространствах H_{ω^*}.

Теорема. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 1$, $\frac{n}{2} \le p \le n-1$. *Тогда* $\forall f \in H_\omega \subset H_{\omega^*}$ *справедливо неравенство*

$$\|\sigma_{n,p}(f) - f\|_{\omega^*} \le \|f\|_\omega \left(2^{\frac{\beta}{\eta}} + 2\sup_{h>0} \frac{\omega^{\frac{\beta}{\eta}}(h)}{\omega^*(h)} \right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{2}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \omega^{1-\frac{\beta}{\eta}} \left(\frac{1}{k} \right) + O(1)\, \omega^{1-\frac{\beta}{\eta}} \left(\frac{1}{n} \right) \right\},$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n.

Литература

1. *Ласурия Р.А.* Аппроксимация и группы отклонений рядов Фурье в обобщенных Гёльдеровых пространствах. Сухум: АГУ, 2017. 288 с.

2. *Теляковский С.А.* О скорости приближения функций в липшицевых нормах // Труды инст. мат. и мех. УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 297–299.

Об одной нелокальной краевой задаче для многомерного нагруженного уравнения смешанного типа первого рода

Джамалов С.З., Ашуров Р.Р.

ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; e-mail:siroj63@mail.ru; ashurov@gmail.com

Пусть $Q = (0,T) \times \Omega = (0,T) \times \prod\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)$, $(n+1)$-мерный параллелепипед Евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ точек $(t, x_1, ..., x_n)$, $0 < \alpha_i < \beta_i < +\infty$, $\forall i = \overline{2,n}$, $\quad \alpha_1 < 0 < \beta_1$. В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x)u_{tt} - (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \alpha(x,t)u_t + c(x,t)\,u = f(x,t) + P[u(x,0)], \quad (1)$$

где $x_1 \cdot K(x) > 0$ при $x_1 \neq 0$, где $x_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$, $\alpha_1 < 0 < \beta_1$,

$$P[u(x,0)] = d_0(x,t)u_t(x,0) + d_1(x,t)u_{tt}(x,0) + [b_i u_{x_i}(x,0) + b_{ii}u_{x_i x_i}(x,0)].$$

Всюду ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n и будем предполагать, что все коэффициенты уравнения, встречающиеся в работе, вещественнозначные и достаточно гладкие функции. Предположим:

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_{ij}(\alpha_k) = a_{ji}(\beta_k), \forall i,j,k = \overline{1,n;}\ x \in \overline{\Omega,}\ \xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Кроме того, пусть выполнено одно из условий для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \bar{\Omega}$.
(a) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, где $a_0 - const > 0$,
(b) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a_1|\xi|^2$, где $a_1 - const < 0$.

Нелокальная краевая задача. Найти решение уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^3(Q)$, удовлетворяющее следующим нелокальным краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$\eta_i D_{x_i}^p u|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u|_{x_i=\beta_i}, \quad (3)$$

при $p = 0, 1; \gamma\ \eta_i - const \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n;}$ где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$.

В данной работе, в случае, когда $P[u(x,0)] \neq 0$ и при выполнении некоторых условий на коэффициенты нагруженного уравнения (1) доказывается однозначная разрешимость решения задачи (1)–(3) в пространстве Соболева $W_2^3(Q)$.

Литература

1. _Нахушев А.М._ Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № ОТ-Ф4-88.

Об одной коэффициентной обратной задаче теплопроводности в вырождающейся области

Дженалиев М.Т.[1], Ергалиев М.Г.[2], Рамазанов М.И.[3]

[1] *ИММM, Алматы, Казахстан; muvasharkhan@gmail.com*

[2] *КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан; ergaliev.madi.g@gmail.com*

[3] *КарГУ им. Е.А.Букетова, Караганды, Казахстан; ramamur@mail.ru*

Задача. *В области* $G_T = \{(x,t) | \ 0 < x < t, \quad 0 < t < T,\}$, $T < +\infty$, *найти решение обратной задачи о нахождении коэффициента* $\lambda(t)$ *и функции* $u(x,t)$ *для уравнения теплопроводности:*

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - \lambda(t)u(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=t} = 0, \ 0 < t < T, \tag{2}$$

$$\int_0^t u(x,t)dx = E(t), \quad |E(t)| \geq \delta > 0, \ 0 < t < T, \tag{3}$$

где $E(t) \in L_\infty(0,T)$ *– заданная функция.*

Теорема (основной результат)[1]. *Обратная задача (1)–(3) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\operatorname{sign}\{E(t)\} = \operatorname{sign}\{I[\varphi_0(t),t]\}, \ \forall t \in (0,T),$$

$$I[\varphi_0(t),t] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \left[2\exp\left\{-\frac{\tau^2}{4(t-\tau)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4(t-\tau)}\right\}\right.$$

$$\left. - \exp\left\{-\frac{(t-\tau)}{4}\right\}\right] \varphi_0(\tau)d\tau, \ t \in (0,T),$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t}{4}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\right], \ t \in (0,T).$$

Более того, решения $\{u(x,t), \lambda(t)\}$ *принадлежат классам*

$$t^{1/2}u(x,t) \in L_\infty(G_T), \ t\lambda(t) \in L_\infty((0,T)).$$

Литература

1. *Jenaliyev M., Ramazanov M., Yergaliyev M.* On the coefficient inverse problem of heat conduction in a degenerating domain // Applicable Analysis (An International Journal). 2018: https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1518523. Published online: 18 Sep 2018. P. 1–16.

Работа выполнена при поддержке грантовых проектов AP05130928 (2018–2020) и AP05132262 (2018–2020), а также проекта программно-целевого финансирования BR05236693 (2018–2020) Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Метод обучения логических нейронных сетей

Димитриченко Д.П.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, России dimdp@rambler.ru

В настоящей работе предложен метод обучения логических нейронных сетей, основанный на свойствах построения переменнозначной логической функции, выявленных при добавлении новых продукционных правил. Эти свойства служат основой для предлагаемого в настоящей работе метода конструктивного обучения логических нейронных сетей, построенных на основе переменнозначных предикатов.

Нейронные сети хорошо зарекомендовали себя при решении задач распознавания образов и диагностики [1]. В ряде случаев Основой для построения эффективных процедур обучения являются конструктивные методы обучения нейронных сетей [2]. В случаях, когда свойства анализируемых объектов задаются при помощи переменнозначных предикатов, а основные причинно-следственные связи фиксируются при помощи системы продукционных правил, то эффективным методом описания объектов и выявления на их основе скрытых закономерностей является метод построения переменнозначных логических функций [3]. В [4, 5] показана возможность представления переменнозначных логических функций при помощи логических нейронных сетей [6].

Литература

1. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс, 2-е издание. Москва. Издательский дом Вильямс, 2008. 1103 с.
2. *Шибзухов З.М.* Конструктивные методы обучения нейронных сетей. М.: Наука, 2006. 159 с.
3. *Лютикова Л.А.* Моделирование и минимизация баз знаний в терминах многозначной логики предикатов. Нальчик. Препринт, 2006. 33 с.
4. *Димитриченко Д.П.* Использование нейронных сетей для повышения эффективности переменнозначных логических функций // Вестник ИрГТУ. 2015. № 10 (105). С. 12–16.
5. *Димитриченко Д. П.* Применение переменнозначных логических функций и нейронных сетей в системах принятия решений // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 93–100.
6. *Барский А.Б.* Логические нейронные сети. Интернет-Университет Информационных Технологий, 2007. 352 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00050.

Определение матричного ядра системы уравнений вязкоупругости

Дурдиев Д.К.[1], Тотиева Ж.Д.[2]

[1] *БухГУ, Бухара, Узбекистан; durdiev65@mail.ru*
[2] *ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия; jannatuaeva@inbox.ru*

Объектом исследования является интегро-дифференциальная система уравнений вязкоупругости с источником возмущений типа взрыва. Из работ, использующих подобный вид источника, можно отметить [1]. Рассмотрим при $x = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in R^3,\ t \in R,\ x_3 > 0$ систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\rho(x_3)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + F_i(x,t),\ i = 1,2,3; \tag{1}$$

$$u_i\ |_{t<0} \equiv 0, \quad T_{3j}|_{x_3=+0} = 0,\ j = 1,2,3, \tag{2}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ – вектор смещений; $T_{ij}(x,t) = \sigma_{ij}[u](x,t) + \int_0^t k_i(t-\tau)\sigma_{ij}[u](x,\tau)d\tau,\ \sigma_{ij}[u](x,t) = \mu(x_3)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda(x_3)divu,$

$$\begin{pmatrix} F_1(x,t) \\ F_2(x,t) \\ F_3(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \nabla\delta(x)\delta(t). \tag{3}$$

Здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, δ_{ij} – символ Кронекера. Правая часть системы (1), представленная в виде (3), моделирует направленный взрыв, $A_{11} \neq 0$ (или $A_{22} \neq 0$) и $A_{33} \neq 0,\ A_{12} \neq 0,\ A_{21} \neq 0$. *Обратная задача заключается в определении матричного ядра* $k(t) = (k_1, k_2, k_3)(t),\ t > 0$, *входящего в (1) , причем* $k_3(t) \equiv k_2(t)$, *если относительно решения системы (1), (2) известна дополнительная информация* $\left.\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \nu_2}\right|_{x_3=\nu_1=\nu_2=0} = g_j(t), \quad t > 0$, *где* $g_j(t)$ *– заданные функции,* $\tilde{u}_j(\nu_1, \nu_2, x_3, t, \nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_j(x_1, x_2, x_3, t)e^{i(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)}d\,x_1\,d\,x_2,\ j = 1,2.$ Решение задачи сводится к последовательной серии обратных задач для скалярных гиперболических уравнений. Доказаны теоремы однозначной глобальной разрешимости и приведены оценки устойчивости.

Литература

1. *Karchevsky A.L., Yakhno V.G.* One-dimensional inverse problems for systems of elasticity with a source of explosive type // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 1999. Vol. 7, № 4. P. 347–364.

О задаче с нелокальными условиями для уравнения IV порядка

Дюжева А.В.

Самарский университет, Самара, Россия; aduzheva@rambler.ru

В ограниченной области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - a(x,t)u_{xx} - b(x,t)u_{xxtt} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

и поставим для него следующую задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \int_0^l G(x)u(x,t)dx. \tag{4}$$

Будем считать, что выполняются следующие условия:

1) $a(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $b(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $c(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$;

2) $b(x,t) \neq 0$, $\forall (x,t) \in Q_T$; 3) $f(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $G(x) \in C([0,l])$.

Обозначим через:

$$M = \max\{\max_{\bar{Q}_T}|A(x,t)|, \quad \max_{\bar{Q}_T}|B(x,t)|, \quad \max_{\bar{Q}_T}|C(x,t)|\},$$

$$\gamma = \max_{[0,l]}|G(x)|, \quad R = \max_{\bar{Q}_T}|F(x,t)|;$$

$C_p^2(Q_T)$ – класс функций $u(x,t)$, таких что $u(x,t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка в $\overline{Q}_T$ и

$$\max|u| \leq p, \ \max|u_{tt}| \leq p, \ \max|u_{xx}| \leq p;$$

$C_p^{2,4}(Q_T)$ – класс функций из $C_p^2(Q_T)$, имеющих производные u_{xxtt}, непрерывные в Q_T.

Теорема. _Если выполняется:_ $2l^2p\gamma + k(T^2l^2 + l^2 + T^2) < p$;

$$l^2\gamma + l^2MT < \frac{1}{3}; \quad l^2\gamma + l^2M < \frac{1}{3}; \quad T^2M < \frac{1}{3},$$

то существует единственное решение задачи (1)-(4) в $C_p^2(Q_T)$.

Литература

1. _Byszewski L._ Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlocal Problems for Hyperbolic Equation $u_{xt} = F(x,t,u,u_x)$ // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1990. Vol. 3, № 3. P. 163–168.

$s-r$ пути на графе-решётке. Случайные блуждания.

Ерусалимский Я.М.

ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия; ymerusalimskiy@sfedu.ru

Граф-решетка имеет вершины в точках с неотрицательными целыми координатами. Из каждой вершины выходит две дуги: горизонтальная дуга и вертикальная дуга в соседние вершины (правую и верхнюю). Рассмотрена задача о достижимости по $s-r$ путям. $s-r$ путь состоит из чередующихся отрезков горизонтальных или вертикальных дуг, каждый из отрезков горизонтальных дуг (за исключением, быть может, заключительного отрезка) имеет длину кратную s , а каждый отрезок вертикальных дуг (за исключением, быть может, заключительного отрезка) имеет длину кратную r. Получены формулы для количества $s-r$ путей, ведущих из вершины в вершину. Рассмотрена задача о случайных блужданиях по вершинам графа-решётки, когда блуждание происходит по $s-r$ путям. Получены формулы для количества $s-r$ путей, ведущих из вершины в вершину. Процесс случайного блуждания по $s-r$ путям не является Марковским процессом. Показано, что он локально сводится к Марковскому процессу на подграфе, определяемом вершиной, в которой начинается процесс.

Решение задачи классификации при помощи логических нейронных сетей

Жилов Р.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; zhilov91@gmail.com

Задачи классификации возникают в различных областях знаний в процессе интеллектуальной обработки данных и решаются с целью построения прогнозной модели. Задача классификации встречается в различных системах имеет практическую значимость [1]. Существует огромное количество алгоритмов классификации, применяющиеся в решении определенных задач. Требуется построить классификатор, подходящий под более широкий круг задач и обладающий возможностью обучения и дообучения в изменяющихся условиях. При решении этой задачи предлагается использовать нейронные сети.

В этой связи хорошо зарекомендовал себя особый подкласс нейронных сетей: логическая нейронная сеть с булевыми выходами, которую при необходимости легко можно адаптировать для работы с нечеткой логикой [2]. В такой нейронной сети на выходном слое нейронов столько, сколько классов, и принадлежность объекта классификации к данному классу определяется 1 на выходе данного нейрона и 0 на всех остальных. При решении задачи классификации сетью Ванга – Менделя появляются некоторые трудности при увеличении количества классов, так как данная сеть имеет один выходной нейрон. Это приводит к увеличению вероятности ошибки.

При построении логической нейронной сети для задачи классификации выходные нейроны будут соответствовать классам, а входные нейроны будут соответствовать характеристикам объектов, подлежащих классификации. Обучение нейронной сети будет проводиться методом трассировки. Применяя алгоритм трассировки к полученной нейронной сети, мы устанавливаем связи между всеми нейронами входного слоя и нейронами выходного слоя либо напрямую, либо через скрытый слой. При обучении проводится отсеивание тех связей, которые не ведут к нужному (требуемому) выходному нейрону.

Литература

1. *Тимофеев А.В., Косовская Т.М.* Нейросетевые методы логического описания и распознавания сложных образов // Труды СПИИРАН. 2013. Вып. 27. С. 144–155.

2. *Димитриченко Д. П.* Применение переменнозначных логических функций и нейронных сетей в системах принятия решений // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 93–100.

Единственность решения нелокальной задачи для уравнения Пулькина

Зайцева Н.В.

КФУ, Казань, Россия; n.v.zaiceva@yandex.ru

Пусть $D = \{(x, y)|\, 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$ – прямоугольная область, где l, α, β – заданные положительные действительные числа. Введем обозначения: $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ и $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Рассмотрим в области D уравнение С.П. Пулькина

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \frac{p}{x}u_x = 0,$$

где $|p| < 1$, $p \neq 0$ – заданное действительное число.

В работе методом спектрального анализа [1, 2] установлен критерий единственности решения краевой задачи с интегральным условием Самарского-Ионкина.

Задача. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-),$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-,$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\lim_{x \to 0+} x^p u_x(x, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta,$$

$$\int\limits_0^l x^p u(x, y)\, dx = A = \text{const}, \quad -\alpha \leq y \leq \beta,$$

где A – заданное действительное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_0^l x^p \varphi(x)\, dx = \int\limits_0^l x^p \psi(x)\, dx = A.$$

Литература

1. *Сабитов К.Б.* Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 10. С. 1468–1478.
2. *Зайцева Н.В.* Начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием первого рода в прямоугольной области // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучн. сер. 2016. № 3–4. С. 51–62.

Разрешимость смешанной задачи с интегральным условием для уравнения третьего порядка

Зикиров О.С., Сагдуллаева М.М.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; zikirov@yandex.ru

В докладе приводятся результаты по разрешимости нелокальной задачи с интегральным условием для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части.

А.М. Нахушевым предложен эффективный метод решения нелокальных задач для уравнений в частных производных – метод редукции к интегро–дифференциальным уравнениям (см. например [1], [2]).

В области $D = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $c(x,t),\ f(x,t)$ – заданные функции.

Уравнение (1) относятся к первому каноническому виду относительно старших производных, указанных в работе [3].

В работе для уравнения (1) исследуется следующая задача: *найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

граничным

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u_x(l,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и интегральному условиям

$$\int_0^l u(x,t)dx = \int_0^t h(t,\tau)u(l,\tau)d\tau + \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\mu_i(t)$, $(i=\overline{1,3})$, $h(t,\tau)$ – заданные, непрерывные на $[0,l]$ и $[0,T]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi'(l) = \mu_2(0); \quad \int_0^l \varphi(x)dx = \mu_3(0).$$

Работа выполнена при поддержке Международного Российско–Узбекского проекта MRU–OT–1/2017.

Заметим, что в поставленной задаче в краевых условиях содержится нелокальность по времени, впервые рассмотренная А.И. Кожановым.

Через $C^{k,s}(D)$ обозначен класс функций $u(x,y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,y)/\partial x^m \partial y^n$ для всех $m = \overline{0,k}$, $n = \overline{0,s}$; $C^{0,0}(D)$ обозначим через $C(D)$.

Под классом $C^{(k,\nu)}(D)$ понимаются определенные в области D функции, у которых все частные производные порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем ν, $0 < \nu < 1$.

Определение. *Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x,t)$, из класса $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.*

Задачу (1)–(4) исследуем в пространстве $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, при этом будем требовать выполнения следующих условий:

Условие 1. *Коэффициент и правая часть уравнения (1) удовлетворяют условиям*

$$c(x,t), \quad f(x,t) \in C(\overline{D}).$$

Условие 2. *Заданные функции $\varphi(x)$, $\mu_i(y)$, $(i = 1,2,3)$ и $h(t,\tau)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi(x) \in C^2[0,l]; \quad \mu_1(t), \quad \mu_3(t) \in C^1[0,T], \quad \mu_2(t) \in C[0,T].$$

В работе доказана следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи (1)–(4).

Теорема. *Пусть выполнены условие 1 и условие 2. Тогда существует единственное регулярное решение нелокальной задачи (1)–(4).*

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

2. *Нахушев А.М.* Задачи со смешением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

3. *Джураев Т.Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1734–1745.

Решение начальной задачи для системы n дифференциальных уравнений с производной Капуто

Ибавов Т.И.

ДГУ, Махачкала, Россия; ibavov94@mail.ru

Рассмотрим на отрезке $[0,T]$ задачу Коши для системы n дифференциальных уравнений с производными дробного порядка вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha} X = AX, \tag{1}$$

где $0 \leq \alpha < 1$, A – матрица коэффициентов системы, X – вектор искомых функций, $\partial_{0t}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s)ds}{(t-s)^{\alpha}}$ – дробная производная Капуто.

Задача: *Найти решение $X(t)$ системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям $X(0) = (x_1(0), ..., x_n(0))$.*

Пусть $D_{\alpha} \subset AC^2[0,T]$ – область определения ∂_{0t}^{α}, тогда для любых функций $X(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \in D_{\alpha}$, справедливы равенства

$$D_{0t}^{\alpha} x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \frac{x_i(0)}{(1-\alpha)t^{\alpha}}. \tag{2}$$

Пусть $X(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \in D_{\alpha}$ – решение системы (2). Тогда применяя преобразование Лапласа к системе (2) получим решение

$$x_i(t) = \frac{1}{\prod_{i,j=1, i\neq j}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)} [t^{n-1} x_i(0) \sum_{m=1}^{n} \prod_{\substack{i,j=1,\\ i\neq m}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j) E_{\alpha, 1-\alpha(1-n)}(\lambda_m t^{\alpha}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} t^{n-(k+1)} b_{ij} \prod_{\substack{i,j=1,\\ i\neq m}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j) E_{\alpha, 1-\alpha(1-n)}(\lambda_m t^{\alpha})], \tag{3}$$

где λ_i – корни характеристического уравнения, b_{ij} – коэффициент соответствующий вычислению i-го определителя системы линейных алгебраических уравнений.

Механизм образования укручения волн

Ивлев Г.А.

АГУ, Сухум, Абхазия

Механизм образования укручения волн будим рассматривать на модельном уравнении Бюргерса

$$v_t + v v_x = \nu v_{xx}, \tag{1}$$

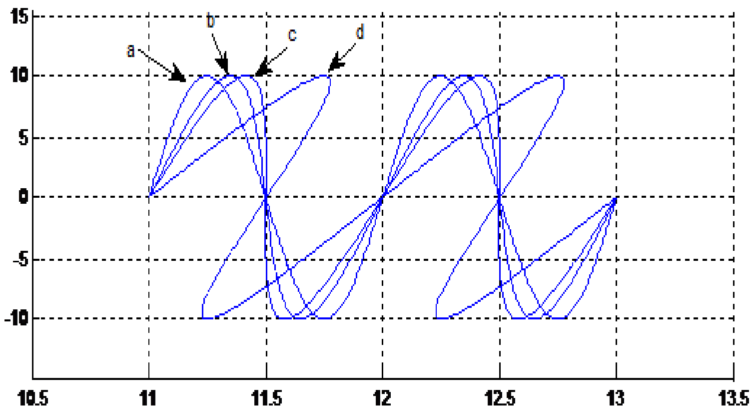
где v – скорость частицы жидкости и ν – коэффициент вязкости жидкости.

В случае, когда вязкость $\nu = 0$ уравнение (1) примет вид

$$v_t + v v_x = 0. \tag{2}$$

Частное решение уравнения (2) представляет бегущую волну

$$v = A\sin{(x - vt)}. \tag{3}$$



Расчёты по формуле (3) представлены на рисунке. Здесь представлены четыре графика, расчитанные в различные моменты времени и совмещены по времени с графиком (a). Здесь (a) представляет начальный профиль волны, (b) – укручённый профиль волны, (c) – укручение переходит в ударную волну и (d) укручённая волна переходит в многозначную функцию. Если рассматривать уравнение (1), то многозначность функции не наблюдается.

Литература

1. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. Москва: Наука, 1988.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. Москва: МИР, 1977.

Краевая задача для уравнения Лаврентьева – Бицадзе четвертого порядка с общими краевыми условиями

Иргашев Б.Ю.

НамИСИ, Наманган, Узбекистан: bahromirgasev@gmail.com

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu \equiv D_x^4 u\left(x,y\right) + (\mathrm{sgn} y)\ D_y^4 u\left(x,y\right) = 0,$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < l, -a < y < a\}$, где l, a – заданные положительные действительные числа. Пусть $\Omega_+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_- = \Omega \cap (y < 0)$.

Задача D. *Найти в области Ω функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую условиям:*

$$u \in C^3\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^4\left(\Omega_+ \cup \Omega_-\right),\ Lu\left(x,y\right) \equiv 0,\ (x,y) \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

$$D_x^0 u\left(0,y\right) = D_x^0 u\left(l,y\right) = D_x^2 u\left(0,y\right) = D_x^2 u\left(l,y\right) 0,\ \ -a \le y \le a,$$

$$\sum_{j=0}^{3} a_{1j} D_y^j u\left(x,a\right) = \varphi_1\left(x\right),\ \ \sum_{j=0}^{3} a_{2j} D_y^j u\left(x,a\right) = \varphi_2\left(x\right),\ 0 \le x \le l,$$

$$\sum_{j=0}^{3} a_{3j} D_y^j u\left(x,-a\right) = \varphi_3\left(x\right),\ \ \sum_{j=0}^{3} a_{4j} D_y^j u\left(x,-a\right) = \varphi_4\left(x\right),\ \ 0 \le x \le l,$$

где $\varphi_s\left(x\right),\ s = 1,2,3,4$ – заданные достаточно гладкие функции.

Получены необходимые и достаточные условия единственности решения. Решение построено в виде ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей. Получены условия отделимости малого знаменателя от нуля, которые оказались идентичными условиям полученным в работах [1-3].

Литература

1. *Сабитов К.Б.,Хаджи И.А.* Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 5. С. 44–52.

2. *Хаджи И.А.* Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе // Математические заметки. 2012. Т. 91, № 6. С. 908–919.

3. *Сабитов К.Б., Новикова В.А.* Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 6. С. 61–72.

Краевая задача для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа с оператором обобщенного интегро-дифференцирования дробного порядка

Исломов Б.И.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; islomovbozor@yandex.ru

Рассмотрим уравнение

$$x^{-n}u_{xx} + \operatorname{sign} y|y|^{-m}u_{yy} - \mu^2 F_{0x}\begin{bmatrix} a, & b \\ c; & x \end{bmatrix} u(x,0) = 0,$$

где $m > n > 0, \mu, a, b, c \in (-\infty, +\infty)$, а $F_{0x}[\cdot]$ – оператор обобщенного интегро-дифференцирования дробного порядка [1].

Пусть Ω – область в плоскости переменных (x, y) ограниченная линиями: $\Gamma_0 : x^{2q}/x^{2q}q^2 + y^{2p}/p^2 = 1, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$, $\Gamma_1 : x = 0, 0 < y < h_2$, $\Gamma_2 :\ x^q/q - (-y)^p/p = 0,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0$, $\Gamma_3 :\ x^q/q + (-y)^p/p = 1, x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, здесь $2p = m + 2$, $2q = n + 2$, $h_2 = p^{1/p}$.

Введем обозначения: $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup J_1$, $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x, y) :\ x > 0,\ y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$, $J_1 = \{(x, y) : 0 < x < h_1, y = 0\}$,

Задача T_F. *Требуется найти функцию* $u(x, y)$, *обладающую следующими свойствами:* 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, u_x *и* u_y *соответственно могут обращаться бесконечность порядка меньше единицы и* $\frac{n+2}{m+2}$ *на концах интервала* Γ_1 *и* J_1; 2) $u(x, y)$ – *дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в областях* Ω_0 *и* Ω_1; 3) $u(x, y)$ *удовлетворяет краевым условиям* $u|_{\Gamma_0} = \varphi_0(x, y), (x, y) \in \overline{\Gamma}_0$, $u_x|_{\Gamma_1} = \varphi_1(y), (0, y) \in \overline{\Gamma}_1$, $u|_{\Gamma_2} = \psi(x), 0 \leqslant x \leqslant (q/2)^{1/q}$, *где* $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi(x)$ – *заданные функции, причем*

$$\varphi_0(x, y) = (x \cdot y)^{\varepsilon_0+1}\bar{\varphi}_0(x, y),\ \bar{\varphi}_0(x, y) \in C(\bar{\Gamma}_0),\ \varepsilon_0 > 0, \tag{2}$$

$$\varphi_1(y) = y^{\varepsilon_1+1}\bar{\varphi}_1(y), \quad \bar{\varphi}_1(y) \in C(\bar{\Gamma}_1), \quad \varepsilon_1 > 0, \tag{3}$$

$$\psi(x) \in C^3\left[0;\ (q/2)^{1/q}\right], \psi(0) = \varphi_1(0), \varphi_0(0; h_2) = \varphi_1(h_2)\,. \tag{4}$$

Единственность решения задачи A_F доказывается с помощью принципа экстремума.

Существование решения задачи A_F при определенных ограничениях параметров a, b, c с учетом (2)–(4) доказывается методом интегральных уравнений.

Литература

1. *Салахитдинов М.С., Исломов Б.* // ДАН СССР. 1986. Т. 289, № 3. С. 549–563.

Задача Коши для одного класса дифференциальных уравнений n-го порядка

Исраилов С.В.[1], _Сагитов А.А._[2]

[1] _ЧГУ, ЧГПУ, КНИИ РАН, Грозный, Россия;_
[2] _ЧГУ, Грозный, Россия; segitov@mail.ru_

Изучается дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})x^{\gamma}, \tag{1}$$

где функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ определена и непрерывна в области D: $\{x \in [0, a],\ a \leqslant 1,\ |y^{(i)}| \leqslant d,\ i = 0, 1, \ldots, n-1\}$, $\gamma \geqslant 0$. Кроме того, функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ удовлетворяет в области D условиям:

$$0 < m \leqslant \left|f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)\right| \leqslant M, \tag{2}$$

существуют $N > 0$ и α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ такие, что если промежуток $[y_1^{(i)}, y_2^{(i)}]$ не содержит нуля ($i = 0, 1, \ldots, n-1$), то справедливо неравенство

$$\left|f\big(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\big) - f\big(x, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}\big)\right| \leqslant N \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|y_1^{(i)} - y_2^{(i)}|}{\min\big(|y_1^{(i)}|^{\alpha}, |y_2^{(i)}|^{\alpha}\big)}. \tag{3}$$

Теорема. _При выполнении условий (2) и (3) уравнение (1) имеет единственное решение $y(x)$ с непрерывными производными $y_{(x)}^{(i)}$, $i = 1, \ldots,$ $n-1$, при $x \in [0, a]$, удовлетворяющее условиям $y_{(0)}^{(i)} = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$, и условиям $|y_{(x)}^{(i)}| \leqslant d$, $i = 0, \ldots, n-1$, при $x \in [0, a]$ и $d \geqslant M$._

В статье исследуется краевая задача Коши для специального дифференциального уравнения n-го порядка, когда правая часть постоянного знака и удовлетворяет обобщенному условию типа Липщица. Задача преобразуется в интегро-дифференциальную систему относительно неизвестной функции и ее производных, доказывается теорема существования и единственности решения.

Литература

1. _Петропавловская Р.В._ О существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений некоторого класса // Матем. сборник. 1955. Т. 36, № 1. С. 149–162.

2. _Исраилов С. В., Юшаев С. С._ Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик: Издательский центр «Эль-Фа», 2004. 445 с.

3. _Исраилов С. В._ Исследование нестандартных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Махачкала: «Алеф», 2014. 440 с.

О существовании решения одного интегроалгебраического уравнения

Исраилов С.В.[1], _Гачаев А.М._[2]

[1] *ЧГУ, КНИИ РАН, Грозный, Россия;*

[2] *ЧГПУ, КНИИ РАН, Грозный, Россия; gachaev_ chr@mail.ru*

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y(x)) = \int_a^x f(x, s, y(s))ds, \tag{1}$$

где функции F, f непрерывны в области $\bar{D} = \{x, s \in [a, b], |y| \le d\}$ по всем аргументам, при условии $F(a, y(a)) = 0$. Считается, что существуют частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, непрерывные также в области D, причем

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0. \tag{2}$$

Ищется непрерывно дифференцируемое решение $y(x)$ уравнения (1). Если такое существует, то оно удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'(x) = f(x, x, y(x)) + \int_a^x \frac{\partial f(x,s,y(s))}{\partial x} ds$ или дифференциальному уравнению

$$y'(x) = \frac{f(x, x, y(x)) - \frac{\partial F(x,y(x))}{\partial x} + \int_a^x \frac{\partial f(x,s,y(s))}{\partial x} ds}{\frac{\partial F(x,y(x))}{\partial y}}. \tag{3}$$

И, наоборот, любое решение дифференциального уравнения (3) $y(x)$ удовлетворяющее условию задачи Коши $y(a) = 0$ при выполнении условия

$$F(a, y(a)) = 0, \tag{4}$$

также является решением функционально-интегрального уравнения (1). Доказана [1], [2]

Теорема. *При выполнении условий (2), (4) функционально-интегральное уравнение (1) имеет единственное решение.*

Литература

1. *Исраилов С.В., Джабраилов А.Л.* О существовании решения нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода // North, Charlston, USA, 22–23 август 2016. С. 156–159.

2. *Исраилов С.В.* Исследование нестандартных краевых задач для ОДУ. Махачкала: Издательство «Алеф», 2014. 439 с.

Метод взвешенной коррекции процедуры обучения нейронных сетей

Казаков М.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; f_wolfgang@mail.ru

При проектировании искусственных нейронных сетей возникает важная задача построения топологии сети, а также задача оценки оптимального количества нейронов в сети. При обучении нейронных сетей с использованием методов градиентного спуска возникают побочные явления, снижающие эффективность обучения. Одним из таких нежелательных явлений является впадание в локальные минимумы, которое препятствует дальнейшему уменьшению оценочной функции. Среди множества методов решения этих проблем при построении искусственных нейронных сетей, используется конструктивный метод обучения [1]. Другая проблема связана с тем, что при обучении уже обученной нейронной сети на новом классе данных, качество работы сети на ранее использованном классе данных снижается.

Конструктивный метод обучения искусственных нейронных сетей заключается в том, что на начальном этапе обучения берется относительно небольшое количество нейронов, и в дальнейшем, по мере необходимости добавляются новые нейроны в слоях. Такой подход позволяет бороться с впаданием в локальные минимумы и при этом позволяет контролировать масштаб нейронной сети. В данной работе предлагается конструктивный метод обучения искусственных нейронных сетей, при котором скорость обучения тех или иных нейронов будет зависеть от того, на каком этапе они были добавлены. Предполагается, что такой метод, сохраняя преимущества стандартного конструктивного метода, позволяя контролировать масштаб сети и избегать впадание в локальные минимумы, позволит так же снизить влияние процесса обучения на новом классе данных на эффективность работы нейронной сети на классах, которым сеть обучалась на ранних этапах. В работе приводятся статистические данные, полученные разными методами обучения нейронной сети на примерах MNIST.

Литература

1. *Шибзухов З.М.* Конструктивные методы обучения $\Sigma\Pi$ - нейронных сетей. Москва: Наука, 2006. 159 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00050.

Моделирование антикоррупционной жизнеспособности системы

Казиев В.М., Казиева Б.В.

КБГУ, Нальчик, Россия; kkvkvm@yandex.ru

Задачи моделирования коррупционных (антикоррупционных) процессов актуальны, но их исследование осложнено латентностью процессов, отсутствием релевантных оценок, критериев. Важно иметь несложно идентифицируемые адаптивные модели. Жизнеспособность понимаем как сохранение адаптационных системных возможностей в течение периода прогнозирования, наличие эволюционного, адаптационного потенциала, способствующего сохранению системного разнообразия.

Рассматривается общая модель типа Ферхюльста – Вольтерра:

$$\frac{dy}{dx} = ay - by^2 - cyy(x-l) + wy\sin vx - dy\int\limits_0^x y(s)f(x-s)ds, \quad y(0) = y_0,$$

где $y(x)$ – численность (плотность) охвата коррупционными связями, x – ключевой фактор роста, развития (например, время), $a(x)$ – коэффициент прироста («притягательности») схем, $b(x)$ – сопротивляемость (например, институциального, СМИ), $c(x)$ – влияние запаздывания (на l) фактора x, $w(x)$ – коэффициент антикоррупционных межпериодных колебаний среды, v – их периодичность, $d(x)$ – влияние регионально-национальных и иных периодических факторов, $f(x-s)$ – функция терпимости населения (институтов, СМИ) к коррупции, y_0 – начальная численность $(t=0)$, $0 < x < L$.

В задаче о коррупции, параметры – вероятностные, нечеткие, часто и неопределенные. Важна прогнозная жизнеспособность при случайных колебаниях факторов среды: параметры – случайны, как и y_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Предложен подход к прогнозированию, в зависимости от дисперсии случайных колебаний условий и «емкости» среды.

Локально одномерный метод решения двумерной задачи фильтрации

Кайгермазов А.А.[1], Кудаева Ф.Х.[2], Саиег Т.Х.[3]

[1,2]*КБГУ, Нальчик, Россия;* [3]*СКФУ, Ставрополь, Россия;*
[1]*arslan1961@yandex.ru;* [2]*kfatimat@yandex.ru*

Задача. *Найти непрерывное, неотрицательное в области* $\Omega = \{(\tau, t) : 0 < \tau < l,\ 0 < t < T\}$ *решение уравнения*

$$u_\tau(\tau, t) + u_t(\tau, t) = a(\tau, t)u(\tau, t) - b(\tau, t)u^\beta(\tau, t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(\tau, 0) = \varphi(\tau), \tag{2}$$

и граничному условию [1]

$$u(0, t) = \int\limits_0^l c(\tau, t)u(\tau, t)d\tau. \tag{3}$$

Здесь $u(\tau, t)$ *– плотность численности (биомассы) популяции,* $a(\tau, t)$ *– неотрицательная функция (коэффициент смертности),* $b(\tau, t)$ *– коэффициент убыли возраста* τ *вследствие конкурентного воздействия на них особей того же возраста,* $c(\tau, t)$ *– неотрицательная функция (коэффициент рождаемости),* β *– известная постоянная.*

Отметим, что если в некоторых точках (τ, t) функция $b(\tau, t) \leq 0$, то внутривозрастная конкуренция оказывает положительное влияние на динамику популяций [2].

Для задачи (1)–(3) исследованы стационарные состояния и доказана теорема существования и единственности решения [3]. Разработан численный метод решения задачи и проведены тестовые расчеты на ЭВМ.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.

2. *Кайгермазов А.А., Сайег Т.Х.* Об одной математической модели с возрастной структурой // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики. 1997. С. 130–132.

3. *Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х.* Дискретные и непрерывные модели математической биологии. Нальчик, 2008. 114 с.

Некоторые общие свойства нелинейных и линейных управляемых систем с учетом карлемановского сдвига временного аргумента

Калажоков Х.Х., Увижева Ф.Х.

ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; khasan_kalazhokov@mail.ru; fatimauvizheva@mail.ru

Представлены полученные в результате исследования общие свойства сложных управляемых систем с учетом карлемановского сдвига временного аргумента. В работе использованы методы пространства состояний, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разностных уравнений [1].

Для качественного анализа влияния сдвига времени на динамические характеристики системы предлагается использовать гомеоморфизм типа карлемановского сдвига [2], когда величина временного аргумента со сдвигом заменяется функцией от времени, обладающей определенными свойствами.

Получена задача с начальными данными для уравнений с карлемановским сдвигом временного аргумента, которая может служить модельной задачей для исследования влияния сдвига временного аргумента на качественные свойства характеристик состояния системы.

Предложен обобщенный принцип дуальности для линейных систем с карлемановским сдвигом аргумента и показано также, что функция времени, реализующая карлемановский сдвиг аргумента, является решением функционального уравнения Беббиджа. Уравнение такого типа может быть решено приближенно на нейронной сети со специальной топологией и правилом обучения [3].

Литература

1. *Калажоков Х.Х., Ашабоков Б.А.* К теории уравнений социальной экономической динамики // Известия КБНЦ РАН. № 1(6), 2001.

2. *Carleman T.* Sur la théorie des equations integrales et ses applications. Zürich: Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. 1932. P. 138–151.

3. *Киндерманн Л., Процелл П.* Основы решения функциональных уравнений с помощью нейронных сетей. Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2005. С. 12–16.

Исследование неравновесных процессов в монетарной экономике методом погружения в дифференциальный процесс

Калажоков Х.Х., Увижева Ф.Х.

ИИПРУ, Нальчик, Россия; khasan_kalazhokov@mail.ru; fatimauvizheva@mail.ru

Рассмотрены задачи исследования неравновесных процессов в монетарной экономике с помощью базовой модели Фридмена и Фишера, а также уравнение для зависимости цены от времени [1]. Предложены различные варианты метода погружения в дифференциальный процесс: регулярный, сингулярный, смешанный вариант и метод погружения в дробный дифференциальный процесс.

Математическая постановка задачи рассмотрена в виде [2]. Для описания динамики цен использованы четыре варианта уравнений: линейное уравнение Вальраса и три варианта нелинейных уравнений для зависимости цены от времени. Далее погружаем различными способами основные уравнения задачи в дифференциальный процесс, преобразовываем их к безразмерному виду и получаем нелинейную задачу с начальными данными для системы уравнений в частных производных гиперболического типа с новыми параметрами.

Рассмотрены также различные примеры модельных задач монетарной экономики. Например, сингулярная модельная задача, задача для УЧП 1-го порядка, задача с использованием операторов дробного дифференциального процесса [3]. Таким образом, показано, что метод погружения в дифференциальный процесс представляется эффективным инструментом теоретической и практической экономики.

Литература

1. *Friedman M., Schwartz A.J.* Monetary Trends in the United States and the United Kingdom: Their Relation to Income, Prices and Interest Rates, 1876-1975, University of Chicago Press, Chicago, 1982.

2. *Накоряков В.Е., Гасенко В.Г.* Уравнения макроэкономики в частных производных // Экономика и математические методы. 2008. Т. 44, № 3. С. 79–91.

3. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Искусственное рассеяние теплых туманов высокотемпературными источниками тепла

Калов Х.М., Калов Р.Х.

_ВГИ, Нальчик, Россия; ruslan_kalov@mail.ru_

Проблема искусственного рассеяния туманов и низких слоистых облаков остро стоит для авиации, наземного и морского транспорта, а так же при применении оптико-электронных и тепловизионных систем наведения авиационной техники и т.д. К настоящему времени эта проблема доведена до уровня технологий, которые успешно используются как в России, так и за рубежом, лишь касательно к переохлажденным туманам. Но переохлажденные туманы составляют лишь 5% от общего количества. В связи с этим актуальной задачей в борьбе с туманами является разработка методов рассеяния теплых туманов.

В работе проведены теоретические исследования и натурные эксперименты по рассеянию теплых туманов с использованием высокотемпературных источников тепла. В качестве источников использовались взрывы тепловых зарядов, при которых в тумане возникает облако расширяющихся взрывных газов, на некотором расстоянии R от заряда приобретающее в целом правильную шарообразную форму, причем газы начинают вихреобразно смешиваться с окружающим туманом за счет турбулентной диффузии и механизма неустойчивости Рихтмайера-Мишкова.

Масса расширяющихся взрывных газов действует как сферический поршень, вытесняющий воздух из зоны взрыва. От взрывных газов отделяется сферическая ударная волна или волна сжатия. В волне сжатия температура, давление и плотность повышаются по сравнению с их значениями в невозмущенном тумане. Эти изменения параметров тумана способствуют испарению капель тумана в ударной волне и в поле излучения взрывных газов, нагретых до высокой температуры (2000–3000°C). Под влиянием этих факторов в тумане образуются зоны просветления, имеющие в общих чертах форму шара. Радиус такого просветленного шара R зависит, в основном, от мощности теплового заряда и водности тумана. Теоретические расчеты [1] и многочисленные эксперименты [2] показали, что радиус просветления R составляет $\geq$100 м в зависимости от величины водности, размеров капелек тумана и мощности взрыва теплового заряда.

Литература

1. _Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П._ Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 687 с.
2. _Калов Х.М., Калов Р.Х._ Физические основы, методы и средства активных воздействий на грозо-градовые облака и туманы. 2010. 220 с.

Полнота корневых векторов регулярных граничных расширений минимального эллиптического оператора

Кальменов Т.Ш., Арепова Г.Д.

ИМММ, Алматы, Казахстан; kalmenov.t@mail.ru; arepovag@mail.ru

Изучение корректных краевых задач и их спектральных вопросов для классических дифференциальных уравнений представляет большой теоретический и прикладной интерес. Особенно, такое направление достаточно хорошо развита для эллиптических уравнений, который является непосредственным аналогом уравнения Штурма – Лиувилля, для которого развиты многочисленные методы исследований. В то же время эффективное описание общих регулярных краевых задач и полнота корневых векторов этих задач для эллиптических уравнений остаются малоисследованными.

Описанию регулярных краевых задач для эллиптических уравнений посвящены основополагающие работы М.И. Вишика [1], М. Отелбаева [2], где в работе М.И. Вишика для общих эллиптических уравнений построено описание всех корректных краевых задач методом корректных расширений минимальных эллиптических операторов, а в работе М. Отелбаева дано описание всех корректных расширений и сужений линейных операторов. Важный класс корректных, но не краевых задач для уравнения эллиптического типа впервые начал изучать А.В. Бицадзе и А.А. Самарский [3], задачи такого типа в настоящее время называют задачами типа Бицадзе-Самарского.

Наиболее общий подход для изучения полноты корневых векторов общих линейных операторов разработан М.В. Келдышем [4], который носит название - метод оценки резольвенты линейных операторов.

В настоящей работе, пользуясь граничными условиями Ньютонового потенциала из работы Т.Ш. Кальменова и Д. Сурагана [5] и методом регулярных расширений линейных операторов, получено представление решения коэрцитивных регулярных краевых задач для уравнения Лапласа в виде обобщенной свертки, далее используя собственные векторы Ньютонового потенциала методом оценки резольвенты доказана полнота корневых векторов рассматриваемых задач.

Литература

1. *Вишик М.И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Математический сборник. 1954. Т. 35, № 3. С. 513–568.

Работа выполнена при поддержке проектов (AP05133239, AP05134615, BR05236656) Комитета Науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

2. *Отелбаев М., Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н.* К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады АН СССР. 1983. Т. 80, № 6. С. 1307–1311.

3. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.

4. *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, № 4(160). С. 15–41.

5. *Kal'menov T.Sh., Suragan D.* On spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics. 2009. Vol. 80, № 2. P. 646–649.

Моделирование взаимодействия и синхронизации ревербераторов и пейсмекеров в приповерхностном слое магнитной жидкости

Кандаурова Н.В. [1], **_Чеканов В.С._** [2], **_Шевченко М.Ю._** [3], **_Мирзаханов С.Р._** [4]

[1,2]*РТУ МИРЭА, Ставрополь, Россия; candaur18@yandex.ru*
[3]*ООО «Оптосистемы», Москва, Троицк, Россия; xpohoc@gmail.com*
[4]*СКФУ, Ставрополь, Россия; mirzhn@gmail.com*

В приповерхностном слое (тонкой пленке) наноструктурированной магнитной жидкости («магнетит в керосине») наблюдался автоволновой процесс, который мы рассматриваем с позиции колебаний связанных осцилляторов с глобальной связью.

Наблюдались различные режимы, в том числе спиральные волны (ревербераторы).

Ревербератор устойчив и вращается вокруг топологического дефекта. Он обладает способностью синхронизировать волны от других источников. Это происходит потому, что ревербератор – это волна с наименьшим возможным периодом для данной среды. И если в автоволновой среде появляется ревербератор, то он, как более быстрая волна, подстроит частоту окружающих «медленных» волн под себя. Произойдет согласование частот, фаз или других характеристик сигналов, генерируемых взаимодействующими колебательными системами.

В работе проведено компьютерное моделирование синхронизации ревербератором других источников (пейсмекеров). Получено решение, при котором ревербератор подстраивает под себя частоту пейсмекера и вытесняет его. Показано, что два ревербератора не синхронизируются друг с другом, но могут вызывать взаимное движение и изменение скоростей центров друг друга.

Проведено моделирование взаимодействия спиральной волны с границей ячейки и с неоднородностью среды.

Компьютерная симуляция реализована в среде COMSOL Multiphysics 5.2. Адекватность результатов компьютерного моделирования доказана соответствием результатам натурного эксперимента.

Литература

1. *Pertsov A.M., Ermakova E.A.* Mechanism of the drift of a spiral wave in an inhomogeneous medium // Biofizika. 1988. P. 338–342.
2. *Elkin Yu.E., Biktashev V.N.* Drift of large-core spiral waves in inhomogeneous excitable media // J. Biol. Phys. 1999. № 2. P. 129–147.

Задача в неограниченной области для уравнения в частных производных высокого четного порядка с дробной производной

Карашева Л.Л.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; k.liana86@mail.ru

Рассмотрим в области $D = \{(x,t) : 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$ уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} + (-1)^n \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}} = f(x,t), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ – дробная производная порядка α [1, с.9], $0 < \alpha \leq 1$.

Уравнение (1) при $n = 1$ совпадает с диффузионно-волновым уравнением, которое широко исследовано (см. [2] и библиографию там). В частности, в работе [3] исследована краевая задача в полубесконечной области для однородного уравнения (1) при $n = 1$ с дробной производной Римана – Лиувилля. Для уравнения (1) в работе [4] построено фундаментальное решение и решена задача Коши. В работе [5] для уравнения (1) исследована краевая задача в полуполосе.

В данной работе исследована краевая задача для уравнения (1), когда в краевых условиях задана связь искомого решения и его производных до порядка $2n - 1$.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

2. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

3. *Геккиева С.Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной в полубесконечной области // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2002. № 1(8). С. 6–8.

4. *Карашева Л.Л.* Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 696–706.

5. *Карашева Л.Л.* Задача в полуполосе для параболического уравнения высокого порядка с оператором Римана-Лиувилля по временной переменной // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2018. № 3(23). С. 57–66.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект 16-01-00462.

Моделирование температурного поля в алмазосодержащем композите

Карданова М.Р.

КБГУ, Нальчик, Россия; mrk1911@mail.ru

Алмазосодержащие композиты составляют рабочую часть широкого класса инструментов для машиностроения, камнеобработки и разведочного бурения скважин. Эффективность изделий из этих материалов в значительной степени определяется износом, обусловленным выпадением кристаллов из матрицы. Поэтому раскрытие физических явлений, происходящих в системе алмаз-матрица при действии силовых и температурных факторов процесса эксплуатации, позволяет определить эффективные пути повышения работоспособности этих изделий.

Данная работа посвящена моделированию температурного поля в системе алмаз-матрица алмазосодержащего композита. Для этого решается двухмерная задача теории упругости с использованием метода конечных элементов [1, 2]. В качестве расчетной схемы принято единичное зерно эллипсоидной формы, как наиболее приближенной к реальной форме алмазного зерна. Таким образом, расчётная схема представляется в виде плоской пластины, состоящей из алмазного зерна, переходного слоя для моделирования покрытий на зерно и матрицы. Задача решается с учётом зависимости удельной теплоёмкости и коэффициента теплопроводности элементов исследуемой системы от температуры. Такая постановка необходима в связи с существенной зависимостью теплофизических свойств алмаза от температуры [3].

Разработаны конечноэлементные формулировки и алгоритмы решения задач стационарной и нестационарной теплопроводности. Алгоритмы реализованы в виде программ на алгоритмическом языке Turbo-C.

Проведено моделирование влияния свойств матрицы на температурное поле системы. Показано, что увеличение теплопроводности матрицы приводит к существенному уменьшению температур в системе.

Литература

1. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
2. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
3. *Kardanova M.R., Ligidov M.K., Shkhanukov-Lafishev M.Kh., Yakhutlov M.M.* Modelling of the temperature field in a diamondcontaining composite material with organic matrix // International Polymer Science and Technology. 2011. Vol. 38, № 7. P. 25–30.

Нелокальная задача для трехмерного уравнения эллиптического типа с сингулярными коэффициентами

Каримов К.Т.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; karimovk80mail.ru

В области $\Omega = \{(x, y, z):\ 0 < x < 1,\ 0 < y < b,\ 0 < z < 1\}$ рассмотрим трехмерное эллиптическое уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{y} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0, \tag{1}$$

где $\beta, \gamma \in R$, причем $0 < \beta < 1/2,\ -\infty < \gamma < 1/2$.

Спецификой нелокальных задач является несамосопряженность пространственного дифференциального оператора и, как следствие, неполнота системы собственных функций, которую приходится пополнять присоединенными функциями. Фундаментальные результаты относительно базисности системы собственных и присоединенных функций получены в работе [1].

В данной работе исследована следующая

Нелокальная задача. Найти функцию

$$u(x, y, z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\left(\bar{\Omega} \cap (\{x = 0\} \cup \{x = 1\})\right) \cap C^2(\Omega),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$u(0, y, z) = u(1, y, z),\ \ u_x(1, y, z) = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

$$u(x, y, 0) = u(x, y, 1) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant b,$$

$$u(x, 0, z) = f_1(x, z),\ u(x, b, z) = f_2(x, z),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

где f_1, f_2 – заданные непрерывные функции.

Доказана следующая

Теорема. Пусть функции $f_j(x, z)$, $j = \overline{1,2}$ удовлетворяют условиям

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left| z^{\gamma-(1/2)} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^{-2\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(z^{2\gamma} f_{j\,xxxz}(x, z) \right) \right] \right| dxdz < +\infty,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[z^{2\gamma} f_{j\,xxz}(x, z) \right] \in C([0,1] \times [0,1]),\ f_{jxx}(1, z) - f_{jxx}(0, z) = 0,$$

$$\lim_{z \to 1} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^{2\gamma} f_{jz}(x, z) \right] = 0,\ \lim_{z \to 0} z^{-2\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^{2\gamma} f_{jz}(x, z) \right] = 0, j = \overline{1,2}.$$

Тогда решение поставленной задачи существует и единственно.

Литература

1. *Ильин В.А.* // Докл.АН СССР. Т. 273, №5. 1983. С. 1048–1053.

Аналог задачи Гурса для псевдогиперболического уравнения с оператором Бесселя

Каримов Ш.Т.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; shaxkarimov@gmail.com

Данная работа посвящена исследованию вопросов разрешимости в классическом смысле аналога задачи Гурса для уравнения

$$L^{\lambda}_{\alpha,\beta}(u) \equiv P_{\alpha,\beta}(u) - \lambda^2 h^{\lambda}_{\alpha,\beta}(u) = 0, \tag{1}$$

где

$$P_{\alpha,\beta}(u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{4\alpha\beta}{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$h^{\lambda}_{\alpha,\beta}$ – дифференциальный оператор обобщенного двуосесимметрического уравнения гиперболического типа вида

$$h^{\lambda}_{\alpha,\beta}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 u.$$

Задача G. *В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ требуется найти функцию $u(x,y) \in C^1(\bar{\Omega})$ удовлетворяющую уравнению (1) и условиям*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad \lim_{x\to 0} x^{2\alpha} u_x(x,y) = \varphi_2(y), \ \ 0 \leqslant y \leqslant h;$$

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad \lim_{y\to 0} y^{2\beta} u_y(x,y) = \psi_2(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant l;$$

где $\varphi_k(y)$, $\psi_k(x)$, $(k = 1, 2)$ – заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(0) = 0$.

Применяя, двумерный обобщенный оператор Эрдейи-Кобера [1], нами получена явная формула решения поставленной задачи в виде

$$u(x,y) = \psi_1(x)\bar{I}_{\beta-1/2}(\lambda y) + \varphi_1(y)\bar{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x) - \varphi_1(0)\bar{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x)\,\bar{I}_{\beta-1/2}(\lambda y) +$$

$$+\psi_2(x)\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta}\bar{I}_{\beta+1/2}(\lambda y) + \varphi_2(y)\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\bar{J}_{\alpha+1/2}(\lambda x),$$

где $\bar{I}_\nu(z) = \bar{J}_\nu(iz)$, $\bar{J}_\nu(z)$ – функция Бесселя — Клиффорда, которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле $\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu + 1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z)$.

Литература

1. *Karimov Sh.T.* Multidimensional generalized Erdélyi-Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients // Fract. Calc. Appl. Anal. 2015. Vol. 18, № 4. P. 845–861.

Локально одномерный метод решения двумерной задачи фильтрации

Кармоков М.М.[1], Керефов Б.М.[2]

КБГУ, Нальчик, Россия; [1]mkarmokov@yandex.ru; [2]kerefov-1997@mail.ru

Рассматривается конечно-разностная модель для уравнения Буссинеска нестационарной фильтрации к системам скважин с неоднородными краевыми условиями.

Для решения этой задачи при общих предположениях, накладываемых на вид области фильтрации, применяются численные методы, основанные на локально-одномерном методе А. А. Самарского.

Для решения конечно-разностных уравнений применяется метод прогонки, причем прогонка осуществляется сначала в одном, а затем в другом направлении. Последовательно меняя направление прогонки, построен итерационный метод двумерной задачи подземной гидродинамики.

По этому алгоритму составлена программа, по которой дается динамика изменения грунтовых вод. Для получения хороших результатов решения задачи необходимо как можно полнее воспроизвести природные условия объекта, а именно, коэффициент фильтрации водоносных горизонтов и их мощности, свободную водоотдачу грунта зон аэрации и определить начальное условие в виде естественной поверхности грунтовых вод.

Расчеты показывают, что при отсутствии притока извне в результате испарения со свободной поверхности уровень воды понижается равномерно.

Определение границ слов слитной речи на основе значений энтропии речевого сигнала в условиях различных эмоциональных состояний диктора

Карпов А.С.

СКФУ, Ставрополь, Россия; andrey_revol125@mail.ru

Актуальность. Самым важным этапом распознавания речи, является верное определение границ слов в речевом потоке. Наиболее перспективный подход к решению этой задачи предполагает использование энтропии речевого сигнала для поиска границ слов [1]. Кроме зашумления речевого сигнала, корректному определению границ слов может мешать эмоциональное состояние диктора или речевые дефекты. Задача. Провести исследование на применимость подхода, использующего значение энтропии речевого сигнала, для определения границ слов произнесенных с различными эмоциональными интонациями. Ситуация в предметной области. Использование метода, основанного на значении энтропии речевого сигнала, дает высокие показатели определения границ слов, как в идеальных условиях, так и в условиях зашумления [2, 3]. Гипотеза. Устойчивость метода к зашумлению речевого сигнала может означать и устойчивость к перепадам интонации. Предполагаемые исследования. Для подтверждения выдвинутой гипотезы необходимо провести ряд тестов, суть которых заключается в определении границ слов тестовой фразы, произнесенной с различными интонациями. Вывод. Метод, основанный на значениях энтропии речевого сигнала, может решить поставленную задачу.

Литература

1. *Алюнов Д.Ю.* О методах оценивания параметров сигнала // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6.

2. *Бождай А.С., Гудков П.А., Гудков А.А.* Встраиваемая система идентификации по голосовым биометрическим показателям // Открытое образование. 2011. № 2-2.

3. *Obin N., Liuni M.* On the Generalization of Shannon Entropy for Speech Recognition // IEEE workshop on Spoken Language Technology. United States. 2012.

Об однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи в классах Соболева для уравнения с частными производными дробного порядка и оператором Лапласа

Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; shokiraka@mail.ru

В данной работе изучается вопрос об однозначной разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева. Доказана теорема о базисности системы собственных функций оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями.

Рассматривается уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\Delta u(x,t)+f(x,t),(x,t)\in\Pi\times(0,\infty),l-1<\alpha\le l,\ l\in N \quad (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-k}u(x,t)=\varphi_k(x),\quad k=1,2,...,l, \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha_j u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=0}+\beta_j u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\mid_{x_j=\pi}=0, \\ \beta_j\frac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}\mid_{x_j=0}+\alpha_j\frac{\partial u(x_1,...,x_j,...,x_N,t)}{\partial x_j}\mid_{x_j=\pi}=0, \\ 1\le j\le N. \end{cases} \quad (3)$$

Теорема. *Пусть* $\alpha_j\ne 0,\ \beta_j\ne 0,\mid\alpha_j\mid\ne\mid\beta_j\mid$ *действительные числа при каждом* $1\le j\le N$ *и* $\rho=\max\limits_{1\le j\le p}\sqrt{\theta_j^2+2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}}+(\varphi_j+1)^{s_j}-1\right)^2}\sigma(s_j)<1$, *где* $\sigma(0)=\frac{1}{\sqrt{2}},\sigma(s_j)=1$, *при* $s_j>0,\theta_j=\sqrt{2}\cdot\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi_j x}-1\right|,\lambda_{m_j}=2m_j+\varepsilon_{m_j}\varphi_j$, $\varphi_j=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j^2+\beta_j^2}$, $\varepsilon_{m_j}=\varepsilon_{-m_j}=\pm 1$ *при* $m_j\in Z$, $s_j>k+\frac{N}{2}$, $k\ge 0$, $k\in Z$ *и* $\varphi_j(x)\in W_2^{s_1+j-\frac{N}{2},s_2+j-\frac{N}{2},...,s_N+j-\frac{N}{2}}(\Pi)$, $f(x,t)\in W_2^{s_1,s_2,...,s_N,s_{N+1}}(\Pi\times(0,+\infty))$. *Тогда решение задачи (1)–(3) существует, единственно и представимо в виде разложения по собственным функциям* $v_{m_1,...,m_N(x)}$ *спектральной задачи*

$$\begin{cases} \Delta v(x)=\lambda v(x), \\ \alpha_j\ v(x)|_{x_j=0}+\beta_j\ v(x)|_{x_j=\pi}=0, \\ \beta_j\ \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big|_{x_j=0}+\alpha_j\ \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big|_{x_j=\pi}=0, \\ 1\le j\le N. \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке РУзФИ, проект № ОТ-Ф4-(36+32.)

О сходимости средних спектральных разложений, соответствующих ПДО для распределений из классов Соболева – Лиувилля

Касимов Ш.Г., Бабаев М.М.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; sokiraka@mail.ru

В данной работе изучается сходимость средних спектральных разложений, соответствующих положительным самосопряженным эллиптическим псевдодифференциальным операторам для распределений из классов Соболева-Лиувилля.

Пусть $A \in OPS^m(\Omega)$ - эллиптический положительный самосопряженный оператор со скалярным однородным символом степени $m \geq 1$ и с постоянными коэффициентами, где Ω- произвольная N-мерная ограниченная область с гладкой границей класса C^∞, либо $\Omega = R^N$. Определим оператор средних спектральных разложений

$$p(tA)f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p}(z)exp(iztA)f(x)dz. \qquad (1)$$

Теорема. _Пусть функция $p(\lambda)$, определенная в $\overline{R}_+ = [0, \infty)$, удовлетворяет условиям_

1) $\int\limits_0^\infty |p(\lambda)|\lambda^{\frac{N-\alpha}{m}-1}d\lambda < \infty$ и $p(0) = 1$;

2) $p(\lambda) \in C^l(\overline{R}_+)$ и $|p^{(j)}(\lambda)| \leq C_j(1+\lambda)^{-j}$, $j = 0, 1, .., l$, где $l-$ неотрицательное целое число;

3) $l > \frac{N}{2} + \alpha$, $\alpha = \frac{N}{p}$, $p \geq 2$.

Тогда для любого распределения $f \in E^{'}(\Omega)$ из класса $\dot{L}_q^{-\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ с компактным носителем равномерно выполняется равенство $\lim\limits_{t \to +0} p(tA)f(x) = f(x)$ при любом компакте $M \Subset \Omega$.

Работа выполнена при поддержке РУзФИ, проект № ОТ-Ф4-(36+32.)

Вторая краевая задача для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова

Керефов М.А.[1], **Керефов Б.М.**[2]

КБГУ, Нальчик, Россия; [1]*kerefov@mail.ru;* [2]*kerefov-1997@mail.ru*

В основе математических моделей, описывающих процессы переноса почвенной влаги в зоне аэрации с учетом ее движения против потенциала влажности, лежат уравнения в частных производных третьего порядка [1, с. 261]. Для описания процессов испарения и инфильтрации Кулик В. Я. [2] предлагает привлекать гибридное уравнение, совмещая два известных подхода Аллера и Лыкова:

$$A_1 u_{tt} + u_t = u_{xx} + A u_{xxt} + f\left(x, t\right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \tag{1}$$

где A_1, $A = const > 0$.

В области $\Omega = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассматривается вторая краевая задача для уравнения (1):

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть $f(x,t) \in C^2\left(\bar{\Omega}_T\right)$, $f(0,t) = f(l,t) = 0$ и при любом фиксированном $t \geq 0$ имеет кусочно-непрерывную производную по x с точками разрыва первого рода, а также существует ограниченная производная $f_{xx}(x,t)$. Тогда единственное регулярное решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3) представимо в виде:*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

где $G(x,\xi,t-\tau) = 1 - e^{\frac{\tau - t}{A_1}} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} U_k(t-\tau)\cos\frac{\pi k}{l}x\cos\frac{\pi k}{l}\xi$, а $U_k\left(t\right)$ – решение однородного уравнения $U_k''(t) + \frac{l^2 + A\pi^2 k^2}{A_1 l^2}U_k'(t) + \frac{\pi^2 k^2}{A_1 l^2}U_k(t) = 0$ с начальными условиями $U_k(0) = 0$, $U_k'(0) = 1$.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

2. *Кулик В. Я.* Исследование движения почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований // В сб. Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе почва-растение-воздух. Л.: Наука, 1972.

Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью

Керефов М.А.[1]**_, Нахушева Ф.М._**[2]**_, Геккиева С.Х._**[3]

[1,2]*КБГУ, Нальчик, Россия; kerefov@mail.ru; fatima_ nakhusheva@mail.ru*

[3]*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; gekkieva_ s@mail.ru*

В работе исследована краевая задача для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + A D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x,t\right), \qquad (1)$$

где D_{0t}^{α} – оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля [1, с. 9], $0<\alpha<1$, A_1, $A = const > 0$, $u=u(x,t)$.

Регулярным решением уравнения (1) в области $Q_T = \{(x,t)\colon 0<x<l,\ 0<t\le T\}$ назовем функцию $u(x,t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right)$; $D_{0t}^{\alpha+1}u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t) \in C\left(Q_T\right)$, которая удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(x,t)\in Q_T$.

Задача. *Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Q_T, удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{cases} \Pi(x,t) = \chi_1(t) D_{0t}^{\alpha}u(x,t) - \mu_1(t), & x=0, \\ -\Pi(x,t) = \chi_2(t) D_{0t}^{\alpha}u(x,t) - \mu_2(t), & x=l, \end{cases} \qquad (2)$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \tau(x), \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \nu(x),\ 0\le x\le l, \qquad (3)$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – заданные функции, $\Pi(x,t) = k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}$ – поток влаги через сечение x в единицу времени, χ_1, χ_2 – сосредоточенная теплоемкость на границах области по направлению x.

Теорема. *Если $k_x(x,t)$, $k_t(x,t)$, $f(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, $\nu(x)\in C[0,l]$, $\tau(x)\in C^2[0,l]$, $k\ge c_1>0$, $k_t\le 0$, χ_1, $\chi_2\ge 0$, $\chi_1+\chi_2>0$ всюду на $\bar{Q}_T$ и выполнено условие $\tau(0)=\tau(l)=\tau'(0)=\tau'(l)=0$, тогда для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка:*

$$\|D_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}u_x\|_{2,Q_t}^2 + \|D_{0t}^{\alpha}u\|_{2,Q_t}^2 \le$$

$$\le M_1(t)\left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \left\|\tau'(x)\right\|_0^2 + \left\|\tau''(x)\right\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2 + \int_0^t \left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)d\tau\right),$$

из которой следует единственность решения задачи (1)–(3).

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Математическое моделирование осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка

Ким В.А.[1]**, Паровик Р.И.**[2]

[1]*КамчатГТУ, Петропавловск-Камчатский, Россия;*

[2]*КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;*

[2]*ИКИР ДВО РАН, Паратунка, Россия;*

valentinekim@mail.ru, romanparovik@gmail.com.

Рассмотрим следующую задачу Коши для смещения $x(t) \in C^2(0,T)$ [1]:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha D_{0t}^{q(t)} x(\tau) - x(t) + x^3(t) = \delta\cos(\omega t), x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где $D_{0t}^{q(t)} x(\tau) = \dfrac{d}{dt}\int\limits_0^t \dfrac{x(\tau)d\tau}{\Gamma(1-q(\tau))(t-\tau)^{q(\tau)}}$ – производная переменного дробного порядка $0 < q(t) < 1$, α – коэффициент затухания, δ и ω – амплитуда и частота колебаний внешнего периодического воздействия, x_0 и y_0 – заданные константы, начальные условия, T – время моделирования.

В данной работе были проведены аналогичные исследования, что и в работах [1]-[3], только вместо дробного оператора Римана-Лиувилля переменного порядка использовался оператор, представленный в задаче Коши (1). Было найдено численное решение задачи (1) и построены фазовые траектории по аналогии с работой [1]. Произведено сопоставление полученных результатов с результатами работ [1]-[3].

Литература

1. *Kim V.A.* Duffing oscillator with external harmonic action and variable fractional riemann-liouville derivative characterizing viscous friction // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016. Vol. 13, № 2. P. 46–49.

2. *Ким В.А., Паровик Р.И.* Математическая модель нелинейного осциллятора Дуффинга с памятью // Тезисы докладов «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложений». Ташкент. 2017. С. 253-254.

3. *Ким В.А., Паровик Р.И.* Расчет максимальных показателей Ляпунова для колебательной системы Дуффинга со степенной памятью // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 98–105.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-1152.2018 и НИР КамГУ имени Витуса Беринга "Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов"№ АААА-А17-117031050058-9.

О решении аналога задачи А.А. Дезина для уравнения смешанного типа методом функции Грина

Киржинов Р.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; kirzhinov.r@mail.ru

В области $\Omega = \{(x,\, y)\colon 0 < x < r,\ -\alpha < y < \beta\}$ евклидовой плоскости точек $(x,\, y)$ рассматривается аналог задачи А.А. Дезина [1, с. 174] для уравнения в частных производных смешанного параболо—гиперболического типа второго порядка

$$f(x,\, y) = \begin{cases} u_{xx}(x,\, y) - u_y(x,\, y), & y > 0, \\ u_{xx}(x,\, y) - u_{yy}(x,\, y), & y < 0 \end{cases}$$

с неоднородными нелокальными условиями

$$u(0,\, y) - u(r,\, y) = \varphi_1(y), \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta,$$
$$u_x(0,\, y) - u_x(r,\, y) = \varphi_2(y), \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta,$$
$$u_y(x,\, -\alpha) - \lambda u(x,\, 0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r,$$

где r, $\alpha = mr$ и β – действительные положительные числа; m – натуральное число; $u(x,\, y)$ – неизвестная функция; $f(x,\, y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции своих аргументов.

В данной работе методом функции Грина выписано решение $u(x,\, y)$ исследуемой задачи. Результаты данной работы обобщают результаты, полученные в работах [2–4].

Литература

1. *Нахушева З.А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: Издательство Учреждения Российской академии наук Кабардино—Балкарского научного центра РАН. 2011. 196 с.

2. *Киржинов Р.А.* Аналог задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо—гиперболического типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 2. С. 41–46.

3. *Киржинов Р.А.* О единственности решения аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо—гиперболического типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 3. С. 28–30.

4. *Киржинов Р.А.* О решении аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного типа второго порядка методом функции Грина // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 36–41.

Краевые задачи для уравнений соболевского типа с меняющимся направлением эволюции

Кожанов А.И.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия; kozhanov@math.nsc.ru

Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для уравнений соболевского типа вида

$$Au_t + Bu + æ(x,t)Cu = f(x,y,t),$$

$$Au_{tt} + Bu + æ(x,t)Cu = f(x,y,t)$$

с эллиптическими операторами A и B второго порядка, действующими по переменным x_1, $\ldots$, x_n, эллиптическим оператором C второго порядка, действующим по переменным y_1, $\ldots$, y_m, и со знакопеременной функцией $æ(x,t)$. Для изучаемых задач обсуждаются вопросы существования, единственности и устойчивости регулярных решений.

Краевая задача для одного класса дифференциальных уравнений с кратными характеристиками

Кожанов А.И.[1], **Кодзоков А.Х.**[2]

[1]*ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия; kozhanov@math.nsc.ru*
[2]*КБГУ, Нальчик, Россия; kodzoko@mail.ru*

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства R^m переменных $y_1, \ldots, y_m$ с гладкой границей Γ, Q есть область из пространства R^{m+2} переменных (x, y, t) таких, что $x \in (0,1)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \Omega$, $t \in (0,T), 0 < T < +\infty$. Пусть $f(x,y,t)$ есть заданная функция при $(x,y,t) \in \bar{Q}$, α, β и γ есть заданные действительные числа, Δ_y – оператор Лапласа по переменным $y_1, \ldots, y_m$, k – целое неотрицательное число.

В области Q рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}}(u_t - \alpha u_x) + \beta \Delta_y u + \gamma u = f(x,y,t), \tag{1}$$

при $k = 1, \alpha = 1$. Это уравнение в случае $k = 0, \alpha \neq 0$ представляет собой модель линеаризованного уравнения Линя-Рейснера-Цзяня [1, 2].
Задача. *Найти функцию $u(x,y,t)$, являющуюся в области Q решением уравнения*

$$L_1 u = f(x,y,t)$$

такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in (0,1) \times \Omega,$$

$$u(0,y,t) = u_x(0,y,t) = 0, \quad (y,t) \in \Omega \times (0,T),$$
$$u_{xx}(1,y,t) = u_{xxx}(1,y,t) = 0, \quad (y,t) \in \Omega \times (0,T),$$
$$u(x,y,t)|_{x\in(0,1), y\in\Gamma, t\in(0,T)} = 0,$$

где $L_1 v = v_{xxxt} - v_{xxxx} + \beta \Delta_y v + \gamma v$.

В работе доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи.

Литература

1. *Lin C.*On Two-Dimensional Non-Steady Motion of a Slender Body in a Compressible Fluid // J. Math. Physics. 1948. V. 27, № 3. P. 220–231.
2. *Глазатов С.Н.* О разрешимости пространственно-периодической задачи для уравнения Линя–Рейсснера–Цзяня трансзвуковой газовой динамики // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 137–140.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект № 18-51-41009.

Исследование колебаний элементов климата в горных районах республик Северного Кавказа методами математической статистики

Корчагина Е.А.

ЦГИ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; helena.a.k@mail.ru

Условия формирования экзогенных опасных природных процессов имеют различные составляющие (геоморфологические, гидрологические, метеорологические). Геоинформационная методология оценки природной опасности, разрабатываемая для оценки подверженности геосистем совокупности опасных экзогенных процессов, включает, в том числе, и изучение изменений климата в районе образования опасности.

Параметры климата рассчитаны на основе обработки результатов многолетних инструментальных измерений характеристик атмосферы на метеостанциях. Методами математической статистики исследована динамика таких элементов климата как атмосферное давление, упругость водяного пара, приземная температура воздуха, суммы атмосферных осадков в горной зоне Карачаево-Черкесской и Кабардино - Балкарской Республик.

Рассчитаны характеристики трендов и показатели колеблемости составленных рядов уровней метеопараметров атмосферы в горной зоне КЧР и КБР по данным метеостанций Клухорский перевал, Терскол, Шаджатмаз. Оценена степень полноты устойчивости выявленных тенденций непараметрическим методом корреляции рангов Ч. Спирмэна. Дополнительно проведены тесты на их статистическую значимость, дана качественная характеристика степени полноты устойчивости по шкале Чеддока (подробнее в [1, 2]).

Литература

1. *Корчагина Е.А.* Исследование температурного режима в высокогорье Карачаево - Черкесской Республики с 1951-го по 2016 гг. // Известия Кабардино - Балкарского научного центра РАН. 2017. № 6(80). С. 73–81.

2. *Корчагина Е.А.* Исследование динамики приземной температуры воздуха и сезонных сумм осадков в Приэльбрусье (середина XX - начало XXI в.) // Грозненский естественнонаучный бюллетень. 2016. № 4(4). С. 34–40.

Реализация задачи моделирования распространения упругих волн деформации в мясном сырье средствами программирования среды Mathcad Prime

Крахоткина Е.В.

СКФУ, Ставрополь, Россия; elena-stv@yandex.ru

Для ускорения процесса производства цельномышечных соленых мясопродуктов применяется дополнительная механическая обработка мясного сырья, которая может осуществляться двумя способами — тумблирование и массирование в устройствах барабанного типа.

В работе проведена визуализация задачи моделирования распространения упругих волн деформации в пористых средах средствами MATLAB. Целью данной работы является разработка модели распространения упругих волн деформации в мясном сырье (пористой среде) и численное решение задачи средствами программирования среды MATLAB [1, 2].

Результаты, полученные в процессе выполнения программы, разработанной средствами программирования MATLAB [2], совпадают с экспериментальными данными, приведенными в [3].

Литература

1. *Крахоткина Е.В.* К вопросу визуализации решения уравнения распространения упругих волн деформации в мясном сырье // Материалы XII Всероссийской школы-коллоквиума по стохастическим методам и VI Всероссийского симпозиума по приклад-ной и промышленной математике. Тезисы доклада. Часть II. Москва, «ОП и ПМ». С. 1002–1003.

2. *Воскобойников Ю.Е., Задорожный А.Ф.* Основы вычислений и программирования в пакете MATLAB: Учебное пособие. 2-е изд., стер. СПб.: Изд-во «Лань», 2018. 224 с.

3. *Гуц В.С., Коваль О.А.* Распространение упругих волн деформации в мясе // Известия ВУЗов. Пищевая технология. 1990. № 2-3. С. 76–77.

Применение MatLab при исследовании сферически-симметричной гипотермии и криодеструкции биоткани

Кудаева Ф.Х.[1]**_, Кайгермазов А.А._**[2]**_, Саиег Т.Х._**[3]

[1,2]_КБГУ, Нальчик, Россия; kfatimat@yandex.ru; arslan1961@yandex.ru_
[3]_СКФУ, Ставрополь, Россия;_

Математическая модель расчета динамики температурного поля биологической ткани, порождаемого сферическим аппликатором, представляется следующей задачей с подвижной границей для одномерного эволюционного уравнения [1, 2]:

$$\begin{array}{l} u_{xx} - \chi^2 u_\tau = \chi^2 x^{1-\beta} u^\beta, \quad 1 < x < s(\tau), \\ u(x,0) = 0, \quad 1 < x < s(0), \\ u_x - \upsilon u = -\upsilon\varphi(\tau), \quad x = 1, \quad \tau > 0, \\ u = 0, \quad u_x = 0, \quad x = s(\tau), \quad \tau > 0. \end{array} \tag{1}$$

В задаче (1) определению подлежат функция $u = u\,(x, \tau)$ и подвижная граница $s(\tau)$, остальные параметры и функции известные.

С помощью метода Роте получена аппроксимация краевой задачи (1) в виде системы краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, которая с помощью функции Грина сведена к эквивалентной системе нелинейных интегральных уравнений, к которой применен зональный метод. Для численных расчетов на ЭВМ использована матрично-ориентированная среда MatLab.

Литература

1. _Kudayeva F.K., Kaygermazov A. A., Edgulova E.K., Bechelova A.R., Tkhabisimova M.M., Kerefov M.A._ Study of Spherically Symmetric Hypothermia and Biological Cryodestruction Tissues Using matlab // Proceedings of the 2017 International Conference «Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies» (IT&QM&IS) September, 23–30, 2017, Petersburg, 2017. P. 388.

2. _Кудаева Ф.Х, Кайгермазов А.А., Кармоков М.М., Мамбетов М.Ж., Долова М.Х._ Математическая модель криодеструкции биологической ткани // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2.

Идеология сетевой оптимизации: последовательность задач, ранги экстремумов, динамическая декомпозиция

Кудаев В.Ч.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; ipma@niipma.ru

Представлен общий подход и метод решения многоэкстремальных сетевых задач. В отличии от существующих [1, 2], метод состоит в последовательном решении все более сложных сетевых задач: построении базового графа (БГ) возможных соединений узлов сети [5]; решении существенно многоэкстремальной сетевой задачи оптимизации вогнутой (вогнуто-выпуклой) функции при сетевых ограничениях [3, 4]; решении наиболее сложной сетевой задачи - сетевой задачи Штейнера [6]. При таком подходе за начальное решение каждой последующей по сложности задачи принимается оптимальное решение предыдущей задачи, что существенно сокращает время ее решения. В решении каждой из задач цепочки используется динамическая декомпозиция графа на подграфы.

Для выбора оптимального размера подграфа, т.е. для оптимизации самого алгоритма решения каждой задачи, используются понятие и определение ранга экстремума и условие ранговой оптимальности сети в котором установлена взаимосвязь между рангом экстремума, его нелокальностью и величиной подграфов сети, оптимизация каждого из которых необходима для получения сети заданного ранга оптимальности [4]. В настоящее время в ИПМА разработаны алгоритмы и программы для ЭВМ построения сетей 3-го ранга для всей цепочки сетевых задач.

Литература

1. *Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др.* Математическое моделирование и оптимизация система тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.
2. Трубопроводные системы энергетики. Методы математического моделирования и оптимизация. Сборник научных трудов. Новосибирск: Наука, СО РАН. 2007. 258 с.
3. *Кудаев В.Ч.* Ранговая оптимизация больших систем // Труды ИВМ и МТ СО РАН. Серия: Информатикаю 2008. Вып. 8. С. 54–60.
4. *Кудаев В.Ч.* Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия КБНЦ РАН. 2016. № 4(72). С. 15–23.
5. *Кудаев В. Ч., Скорикова Л. В.* Построение базового графа для задачи синтеза оптимальной потоковой сети // Известия КБНЦ РАН. 2017. № 6 (80). С. 42–48.
6. *Багов М.А., Кудаев В.Ч.* Построение потоковой сети Штейнера второго ранга оптимальности // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 154. С. 32–42.

Оператор интегрирования Римана – Лиувилля в весовых пространствах Лебега

Кукушкин М.В.

Международный комитет Continental, Железноводск, Россия; kukushkinmv@rambler.ru

Первой из наших целей является изучение инвариантных подпространств оператора дробного интегрирования Римана – Лиувилля, действующего в весовом пространстве Лебега суммируемых с квадратом функций. Вторая цель – переформулировка известных теорем о действии оператора Римана – Лиувилля в терминах коэффициентов разложения по полиномам Якоби. Несмотря на то, что данный тип проблем был хорошо изучен такими математиками как Рубин Б.С., Вакулов Б.Г., Самко С.Г., Карапетянц Н.К. для различных пространств и обобщений оператора дробного интегрирования, метод предложенный в данной работе позволяет нам заметить интересные свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования.

Используем ортонормированную систему полиномов Якоби в качестве инструмента для изучения операторов дробного интегрирования и дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля на компакте вещественной оси. Этот подход имеет ряд преимуществ и позволяет завершить известные результаты дробного исчисления, переформулируя их в новом качестве. Мы рассматриваем несколько модификаций многочленов Якоби, что дает нам возможность изучить инвариантное свойство операторов. Показано, что оператор дробного интегрирования, действующий в весовом пространстве Лебега суммируемых с квадратом функций имеет последовательность включенных инвариантных подпространств. Доказанная теорема об ограниченном действии оператора дробного интегрирования в весовом пространстве Лебега, сформулирована в терминах коэффициентов разложения по полиномам Якоби и представляет особый интерес. Наконец, получено достаточное условие представимости функции из весового пространства Лебега дробным интегралом в терминах коэффициентов разложения по полиномам Якоби.

Литература

1. *Карапетянц Н.К., Рубин Б.С.* Об операторах дробного интегрирования в пространствах с весом // Изв. АН АрмССР. Мат. 1984. Т. 19, № 1. С. 31–43.

2. *Pollard H.* The mean convergence of orthogonal series III. // Duke Math. J. 1949. Vol. 16, № 1. P. 189–191.

Редукции трехмерной системы Дарбу

Кулаев Р.Ч.

СОГУ, ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия; kulaevrch@mail.ru

Проблема построения n-ортогональных криволинейных систем координат относится к числу важнейших проблем дифференциальной геометрии. Эта задача изучалась в XIX в. – начале XX в. Решающее значение в решении этой проблемы имели результаты Дарбу, изложенные в его известной монографии [1]. Данная система – система шести уравнений на символы Кристоффеля, соответствующие диагональной метрике в $\mathbb{R}^3$:

$$\partial_{x_j}\Gamma_{ki} = \Gamma_{ki}\Gamma_{ij} + \Gamma_{kj}\Gamma_{ji} - \Gamma_{ki}\Gamma_{kj}, \quad i \neq j \neq k. \tag{1}$$

Современный интерес к этой проблеме вызван её тесной связью с теорией интегрируемых систем. Установлено, что произвольной ортогональной системе координат соответствует семейство диагональных гамильтоновых систем гидродинамического типа, которые определяются из уравнений ассоциированной с (1) системы

$$\partial_{x_j} v^{(i)} = \Gamma_{ij}\left(v^{(j)} - v^{(i)}\right), \quad i \neq j. \tag{2}$$

Построение решений систем (1), (2) во всем $\mathbb{R}^3_+$, к сожалению, пока не удается без введения дополнительных условий. Наиболее изученным является вариант, соответствующий слабо нелинейным системам гидродинамического типа, для которых получены явные формулы решений [2].

В докладе дается еще один подход к нахождению явных решений уравнений, описывающих ортогональные криволинейные системы координат. Строятся две редукции трехмерной системы Дарбу, одна из которых обусловлена факторизацией лаксовой пары, а вторая – одним дополнительным алгебраическим условием на Γ_{ki}. Выделяется класс решений, который параметризуется шестью функциями одной переменной. Обсуждаются соответствующие решения системы (2), которая сводится к трехмерной задаче Гурса для уравнения третьего порядка, допускающей разделение переменных.

Литература

1. *Дарбу Г.* Лекции об ортогональных системах и криволинейных координатах. М.: Издательство “ИКИ”, 2016. 552 с.

2. *Ферапонтов Е.В.* Системы трех дифференциальных уравнений гидродинамического типа с шестиугольной 3-тканью характеристик на решениях // Функц. анализ и его прил. 1989. Т. 23, № 2. С. 79–80.

О классе задач синтеза параметров зональных управлений процессами с распределенными параметрами

Кулиев С.З.

ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; azcopal@gmail.com

Рассматривается задача синтеза управления процессом нагрева стержня посредством сосредоточенных точечных источников:

$$u_t' = au_{xx}'' + \sum_{i=1}^{m} q_i(t)\delta(x - \overline{x}_i), \tag{1}$$

$$u_x'(0,t) = u_x'(l,t) = 0, u(x,0) = u_0 \in U_0, \tag{2}$$

где U_0 – множество возможных начальных состояний процесса.

Пусть $\tilde{x}_j \in [0,l]$, $j = 1,2,\ldots,n$, – точки наблюдения состояния процесса, и

$$\tilde{u}_j(t) = u(\tilde{x}_j, t), \quad j = 1,\ldots,n, \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Разобьем диапазон значений всевозможных состояний процесса $\underline{u} \leq u(x,t) \leq \overline{u}$ на N зон точками $\tilde{u}_s$, $s = 0,1,\ldots,N$, $\tilde{u}_0 = \underline{u}$, $\tilde{u}_N = \overline{u}$. Синтезируемое управление ищем в следующем виде:

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}^s[u(\tilde{x}_j,t) - r_{ij}] \quad \text{если} \quad \tilde{u}_{s-1} \leq u(\eta_j,t) \leq \tilde{u}_s, \tag{4}$$

где K_{ij}^s – зональный коэффициент усиления для i-го источника относительно j-ой точки замера; r_{ij} - номинальное значение температуры.

Учитывая (4) в (1), получаем нагруженное уравнение:

$$u_t' = au_{xx}'' + \sum_{j=1}^{m} \delta(x - \overline{x}_i) \sum_{i=1}^{n} K_{ij}^s[u(\tilde{x}_j,t) - r_{ij}], \tag{5}$$

с оптимизируемым функционалом

$$J(K,r) = \int_{U_0} \int_0^l [u(x,T;K,r,u_0) - U(x)]^2 dx du_0. \tag{6}$$

Здесь оптимизируемые параметры обратной связи $K = K_{ij}^s$, $r = r_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$, $s = 1,2,\ldots,N$. Для численного решения задачи синтеза управления предлагается использовать методы конечномерной оптимизации первого порядка.

Об определении правых частей двух уравнений для изгибно-крутильных колебаний стержня

Кулиев Г.Ф.[1], **Рамазанова А.Т.**[2]

[1] *БГУ, Баку, Азербайджан; hkuliyev@rambler.ru*
[2] *UDE, Germany; ramazanova-aysel@mail.ru*

В работе рассматривается задача определения правых частей следующих уравнений с начальными и граничными условиями в области $Q = \{0 < x < l, 0 < t < T\}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(E(x)I(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) + p(x)A(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - p(x)A(x)e(x)\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = f_1(t)v_1(x),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(E(x)C_w(x)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}) - G(x)C(x)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - p(x)A(x)e(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} +$$

$$+p(x)(I(x) + A(x)e^2(x))\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = f_2(t)v_2(x), (x,t) \in Q,$$

$$y|_{x=0} = y|_{x=l} = 0, \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$\theta|_{x=0} = \theta|_{x=l} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial \theta}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$y|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \le x \le l,$$

$$\theta|_{t=0} = \tilde{\varphi}_0(x), \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}|_{t=0} = \tilde{\varphi}_1(x), \quad 0 \le x \le l,$$

и с дополнительными условиями

$$\int_0^T K_1(x,t)y(x,t;v) = \gamma_1(x), \ 0 \le x \le l,$$

$$\int_0^T K_2(x,t)\theta(x,t;v) = \gamma_2(x), \ 0 \le x \le l,$$

где $E(x)$, $I(x)$, $\rho(x)$, $A(x)$, $e(x)$, $C_w(x)$, $G(x)$, $C(x)$ измеримые, ограниченные и положительные функции на отрезке $[0,l]$, $f_1, f_2 \in L_2(0,T)$, φ_0, $\tilde{\varphi}_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in L_2(0,l)$, $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$ – заданные функции, $K_1(x,t)$, $K_2(x,t) \in L_\infty(Q)$ а $v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in L_2(0,l) \times L_2(0,l)$ – искомые функции.

Эта задача приводится к задаче оптимального управления и исследуется методами теории оптимального управления.

Об определении начальных функций по измеренным значениям граничных функций для гиперболического уравнения

Кулиев Г.Ф.[1], **Сафарова З.Р.**[2]

[1] *БГУ, Баку, Азербайджан; hkuliyev@rambler.ru*
[2] *НГУ, Нахчиван, Азербайджан; seferovazumrud@ymail.com*

Пусть состояние $u(x,t)$ системы описывается гиперболическим уравнением второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

в $Q \equiv \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область, $T > 0$ – заданное число.

В работе рассматривается задача о нахождении неизвестных начальных функций $u(x,0)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$ по наблюдаемым характеристикам управляемой системы

$$u|_S = g_0, \frac{\partial u}{\partial \nu_A}|_S = g_1, \tag{2}$$

где S – боковая поверхность цилиндра Q.

Вводятся две системы:

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u^k}{\partial x_i}) + a_0(x,t)u^k = f(x,t) \text{ в } Q,\ k = 1,2, \tag{3}$$

$$u^k(x,0;\vartheta) = \vartheta_1(x), \frac{\partial u^k(x,0;\vartheta)}{\partial t} = \vartheta_2(x) \text{ в } \Omega, k = 1,2, \tag{4}$$

$$u^1(\vartheta)|_S = g_0, \quad \frac{\partial u^2}{\partial \nu_A}|_S = g_1 \tag{5}$$

и функционал

$$I_\varepsilon(\vartheta) = \int_Q [u^1(\vartheta) - u^2(\vartheta)]^2 dxdt + \varepsilon[\|\vartheta_1\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} + \|\vartheta_2\|^2_{L_2(\Omega)}], \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Рассматриваемая задача сводится к отысканию элемента ϑ_ε , который минимизирует функционал (6) в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Для новой задачи получены условия оптимальности для нахождения ϑ_ε.

Об определении коэффициента гиперболического уравнения второго порядка с нелокальным условием

Кулиев Г.Ф., Тагиев Х.Т.

БГУ, Баку, Азербайджан; hkuliyev@rambler.ru, tagiyevht@gmail.com

В работе рассматривается задача определения пары функций $(u(x,t),\vartheta(x)) \in W_2^1(Q)\times V$ из условий

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\vartheta(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)+a_0(x)\,u=f(x,t), \tag{1}$$

$$(x,t)\in Q=\Omega\times(0,T),$$

$$u(x,0)=u_0(x),\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),x\in\Omega, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vartheta(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\nu,x_i)=\int\limits_{\Omega}K(x,y,t)\,u(y,t)\,dy,(x,t)\in S, \tag{3}$$

$$\int_0^T R(x,t)\,u(x,t)\,dt=\varphi(x), \tag{4}$$

$$V=\left\{\vartheta(x)\in W_2^1(\Omega):\nu_0\le\vartheta(x)\le\mu_0,\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}\right|\le\mu_i,i=1,2,...,n\ \ \Omega\right\} \tag{5}$$

почти всюду на Ω, где ν_0, μ_0, $\mu_1,\ldots,\mu_n$ – заданные положительные числа, $a_0\in L_\infty(\Omega)$, $f\in L_2(Q)$, $u_0\in W_2^1(\Omega)$, $u_1\in L_2(\Omega)$, $R\in L_\infty(Q)$, $\varphi\in L_2(\Omega)$, функция $K(x,y,t)$ непрерывна на $\overline{\partial\Omega}\times\overline{Q}_T$. Отметим, что при каждой фиксированной функции $\vartheta(x)\in V$ решение краевой задачи (1)-(3) понимается как обобщенное решение из пространства $W_2^1(Q)$.

Задаче (1)-(5) сопоставляется следующая задача оптимального управления: требуется минимизировать функционал

$$I(\vartheta)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\int_0^T R(x,t)\,u(x,t;\vartheta)\,dt-\varphi(x)\right]^2dx, \tag{6}$$

при условиях (1)-(3), (5), где $u=u(x,t)=u(x,t;\vartheta)$ - решение краевой задачи (1)-(3) соответствующее функции $\vartheta=\vartheta(x)\in V$.

В работе доказывается непрерывная дифференцируемость по Фреше функционала (6) и выводится необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

Исследование влияния магнитного поля на фрактальные «бабстоны» в атмосфере

Кумыков Т.С.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; macist20@mail.ru

Согласно современным представлениям, изучение процессов кластеризации дисперсных частиц, а также явлений, оказывающих на них воздействие, и определяющих степень участия в атмосферных процессах, является актуальной проблемой. Известно, что наличие «бабстонов» – стабильных нанопузырько, спонтанно возникающих при нормальных условиях в жидкостях, насыщенных растворенным газом и содержащих ионную компоненту [1] и их кластеров существенно влияет на физические свойства водных сред, снижая пороговые значения разного рода явлений [2]. Представляется малоизученным влияние магнитного поля на такого рода кластерные образования, которые во многом определяются наличием мельчайших газовых пузырьков – «бабстонов». Наличие большого количества «бабстонов», присутствующих в водных растворах, также может играть существенную роль в геофизических процессах, связанных с генерированием атмосферного электричества, исходя из неравномерного распределения части дисперсной фазы в виде «облака» ограниченных размеров. В данной работе рассматривается влияние магнитного поля на фрактальную структуру бабстонно-кластерной фазы в облачной среде.

Литература

1. *Бункин Ф.В., Бункин Н.Ф.* Бабстоны: стабильные микроскопические газовые пузыри в слабых растворах электролитов // ЖЭТФ. 1992. Т. 101, Вып 2. С. 512–527.
2. *Кумыков Т.С.* Об электрических свойствах дисперсных систем, содержащих пузырьки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2008. № 6. С. 42–44.

Разработка классификационных кодов географических объектов для баз данных

Кюль Е.В.[1], _Чернышев Г.В._[2]

[1] *ЦГИ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; elenakyul@mail.ru*
[2] *ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; chern_gen@mail333.com*

При инвентаризации опасных природных процессов (ОПП) на исследуемой территории накапливается большой объём географической информации. Для использования информации необходима её систематизация и представление в единой унифицированной форме, например, в виде различных Баз данных (БД) или ГИС-продукции (цифровые слои и карты). На начальном этапе оценки природной опасности идёт представление геоинформации в виде БД, которые, в дальнейшем, входят составной частью в ГИС. В настоящее время при наличии большого количества БД по типам ОПП (лавины, сели и др.), где даются их основные характеристики, практически отсутствуют базы, в которых рассматриваются непосредственно речные бассейны и элементарные единицы образования ОПП (лавиносборы и др.). Основной задачей при этом является кодирование таких географическх объектов, как элементарные единицы образования ОПП. Авторами разработан способ кодирования лавиносборов и селевых русел, как определяющих информационных элементов, от которых зависит структура других объектов, связанных с лавинной и селевой опасностью [1].

Выводы. Предложенный способ кодирования географических объектов позволяет с достаточной степенью точности привязать небольшие по размеру объекты к определённой местности. На следующем этапе необходима разработка ряда кодификаторов для элементарных единиц других типов ОПП, например, оползневых массивов при определении оползневой опасности. Кроме того на заключительном этапе при экспериментальном наполнении базы данных возможно создание локального кодификатора для конкретной территории.

Литература

1. *Кюль Е.В., Чернышев Г.В.* Принципы представления картографической информации в базе данных лавинной опасности // В кн. Современные проблемы геологии, геофизики и геооэкологии Северного Кавказа. Под ред. Керимова И.А., Широковой В.А. 2016. Т. V. С. 556–564.

2. *Кюль Е.В., Чернышев Г.В.* Создание баз данных для целей картографирования природной опасности // IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики», 2018.

Неравенства типа Джексона на сфере

Ласурия Р.А.

АГУ, Сухум, Абхазия; rlasuria67@yandex.ru

Устанавливаются неравенства типа Джексона в случае приближения функций линейными методами суммирования

$$U_{n-1}^{(\lambda)}(f, M) := \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k Y_k^{(\lambda)}(f, x),\ \lambda = \frac{m-2}{2},$$

их рядов Фурье-Лапласа, где $M := \{\mu_k\}$, $k = 0, 1, ...$ – некоторая последовательность комплексных чисел, $\mu_0 := 1$, в пространствах $S^{(p,q)}\left(\sigma^{m-1}\right)$, $m \geq 3$, $\sigma^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ ([1]), для классов функций $L^{\psi}S^{(p,q)}$, определяемых преобразованиями их рядов Фурье-Лапласа с помощью мультипликаторов ψ, в терминах операторов $\Delta_u^r := (E - S_{u,h})^{r/2}$, $r > 0$, которые, также определяются h-преобразованиями рядов Фурье-Лапласа. При некоторых условиях на системы функций ψ и h доказывается следующее соотношение:

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi}S^{(p,q)} \\ f \neq const}} \frac{\left\| f - U_{n-1}^{(\lambda)}(f, M) \right\|_{S^{(p,q)}}^q}{\left\| \Delta_\tau^r f^{\psi} \right\|_{S^{(p,q)}}^q} = \tilde{K}_n(M, h, r, \psi, \tau, q),$$

где

$$\tilde{K}_n(\cdot) := \max\left\{\tilde{K}_{n,1}(\cdot), \tilde{K}_{n,2}(\cdot)\right\},$$

$$\tilde{K}_{n,1} := \max_{1 \leq k \leq n-1} \frac{|1-\mu_k|^q |\psi(k)|^q}{|1 - h_k(\tau)|^{rq/2}},$$

$$\tilde{K}_{n,2}(\cdot) := \frac{|\psi(n)|^q}{|1 - h_n(\tau)|^{rq/2}}, \tau \in (\tau_0, \tau_1).$$

Литература

1. *Ласурия Р.А.* Прямые и обратные теоремы приближения функций суммами Фурье-Лапласа в пространствах $S^{(p,q)}\left(\sigma^{m-1}\right)$ // Мат. заметки. 2015. Т. 98, № 4. С. 530–543.

Потенциалы М. Рисса, дробные степени оператора Лапласа и их применение для численного решения трехмерных обратных задач

Леонов А.С.

НИЯУ МИФИ, Москва, Россия; asleonov@mephi.ru

1. При решении некоторых трехмерных задач акустического зондирования требуется по функции $w(\mathbf{x}) \in L_2(Y)$ найти решение $\zeta(\mathbf{x}) \in L_2(X)$ уравнения

$$\int_X \frac{\zeta(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^\lambda} = w(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in Y.$$

Здесь X, Y – ограниченные и не пересекающиеся области в $\mathbb{R}^3$. Слева в этом уравнении стоит интеграл, называемый потенциалом М. Рисса. При $1 < \lambda < 3$ (и при некоторых других λ) решение такого уравнения единственно (М.Рисс, 1938 г.) Функция $w(\mathbf{x})$ вычисляется по экспериментальным данным $u(\mathbf{x}) \in C^2(Y)$. В частности, при $\lambda = 2$ оказывается, что $w(\mathbf{x}) = \pi^2(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u(\mathbf{x})$. В связи с этим возникает вопрос об устойчивом численном нахождении значений дробных степеней оператора Лапласа.

2. Ниже предлагается алгоритм вычисления $w(\mathbf{x})$ в области Y с «достаточно гладкой» границей ∂Y. В нем используется система собственных функций $\{\Psi_k(\mathbf{x})\}$ и собственных значений $\{\lambda_k\}$ оператора Лапласа для области Y:

$$\begin{cases} \Delta\Psi(\mathbf{x}) + \lambda\Psi(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in Y, \\ \Psi(\mathbf{x})|_{\partial Y} = 0. \end{cases}$$

Алгоритм. 1) Построить функцию $\bar{u}(\mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\mathbb{R}^3)$, удовлетворяющую краевому условию $\bar{u}(\mathbf{x})|_{\partial Y} = u(\mathbf{x})|_{\partial Y}$ и «достаточно быстро» убывающую при $|\mathbf{x}| \to \infty$. 2) Найти $\bar{U}(\mathbf{x}) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\bar{u}(\mathbf{x}) = F^{-1}[|\omega|F(\bar{u})(\omega)]$ с помощью преобразования Фурье $F(\cdot)(\omega)$. 3) Разложить функцию $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - \bar{u}(\mathbf{x})$ в области Y по системе $\{\Psi_k(\mathbf{x})\}$: $v(\mathbf{x}) = \sum\limits_k C_k\Psi_k(\mathbf{x})$. 4) Вычислить $V(\mathbf{x}) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}v(\mathbf{x}) = \sum\limits_k C_k\sqrt{\lambda_k}\Psi_k(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in Y$. 5) Найти $w(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + \bar{U}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in Y$.

3. В докладе дается обоснование этого алгоритма для численной реализации при использовании точных данных $u(\mathbf{x})$ и предлагается регуляризованный вариант алгоритма в случае данных с экспериментальными ошибками. Представляются результаты численных экспериментов по вычислению функций $w(\mathbf{x})$ и решению исходного интегрального уравнения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00039.

Исследование точек покоя эредитарной динамической системы ФитцХью – Нагумо

Липко О.Д.[1], Паровик Р.И.[2]

[1,2]*КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;*
[2]*ИКИР ДВО РАН, Паратунка, Россия;*
olgalipko95@mail.ru; romanparovik@gmail.com.

Рассмотрим обобщенную модель фрактального осциллятора ФитцХью-Нагумо [1, 2]:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\beta} x(\tau) = c \cdot (x(t) - y(t) - \dfrac{x^3(t)}{3} + z), \\ \partial_{0t}^{\gamma} y(\tau) = -\dfrac{(x(t) - a + by(t))}{c}, \end{cases} \tag{1}$$

где дифференциальные операторы:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta}}, \quad \partial_{0t}^{\gamma} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\gamma}}, \tag{2}$$

определены в смысле Герасимова – Капуто с дробными порядками $0.5 < \beta, \gamma < 1$, a, b, c – константы, удовлетворяющие условиям $1 - 2b/3 < a < 1$, $0 < b < 1$, $b < c^2$, $x(t)$ – мембранный потенциал, z – интенсивность раздражителя, константа в первом приближении, которая также может иметь вид прямоугольного импульса или дельта-функции, $t \in [0, T]$ – время процесса, $T > 0$ – время моделирования, x_0 и y_0 – начальные условия.

В данной работе были исследованы на устойчивость точки покоя и дана их классификация.

Литература

1. *Lipko O.D.* Mathematical model of nerve impulse propagation with regard to heredity // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2017. T. 16, № 1. C. 52–60.

2. *Паровик Р.И.* Исследование устойчивости некоторых эредитарных динамических систем // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 2. С. 8–19.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ №МК-1152.2018 и НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» №АААА-А17-117031050058-9.

К вопросу о совершенствовании методики преподавания математики в системе дополнительного образования

Лобанова Н.И.

МУДО ЦВР, Зеленокумск, Россия; lobantchik@yandex.ru

Как известно, при традиционной форме обучения большинство старшеклассников во время занятия остаются наблюдателями. Между тем возможна и другая форма обучения, когда работая в парах или группах, общаясь между собой старшеклассники формируют не только позитивное отношение к предмету, но и умение самостоятельно добывать знания. В результате качество знаний старшеклассников, как правило, повышается и сам процесс обучения становится более успешным.

В этой связи в последнее время вопросу совершенствования преподавания математики как в школе, так и в системе дополнительного образования уделяется большое внимание. А именно, разрабатываются более эффективные методы преподавания математики, совершенствуются формы организации занятий. Одними из наиболее плодотворных форм обучения математике, способствующих развитию способностей, навыков и умений, необходимых для практической деятельности, являются лабораторно-практические работы и организация экскурсий. Они играют важную роль в формировании у старшеклассников именно практических умений и навыков, необходимых как для изучения самой математики, так и для повседневной деятельности. Лабораторно-практические работы и экскурсии позволяют полнее и глубже уяснить математические зависимости между величинами, возникающими при решении практико-ориентированных задач, а также осознать тесную связь как между различными разделами курса математики, так и между различными школьными курсами.

Актуальность данной темы исследования связана еще и с тем, что в последние годы разработано большое количество компьютерных продуктов учебного назначения разной направленности. Но, к сожалению, методик их практического применения в школьном учебном процессе, в том числе и в процессе преподавания математики в рамках дополнительного образования, не существует [1].

Литература

1. *Косыбаева У.А., Кервенев К.Е., Шегирова Д.К.* Совершенствование методики преподавания математики в средней школе на основе информационных технологий // Молодой ученый. 2015. № 22 (102). С. 822–824.

Об одной математической модели динамики численности популяций с дискретным временем

Лосанова Ф.М., Кенетова Р.О.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;
losanovaf@gmail.com; raisa.kenetova@mail.ru

В работе исследована математическая модель, описывающая динамику популяций следующего вида

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= az_n - \mu_x x_n - F(x,y),\\
y_{n+1} &= bz_n - \mu_y y_n - F(x,y),\\
z_{n+1} &= F(x,y) - cz_n,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $x_n = x(n)$, $y_n = y(n)$ – плотность численности неженатых мужчин и незамужних женщин; $z_n = z(n)$ – число семейных пар; $n \in \mathbb{N}_0$, a, b, c – параметры модели, характеризующие социальные аспекты, $F(x,y)$ – интенсивность образования семейных пар.

Модель (1) представляет собой дискретный аналог модели, рассмотренной в работе [1].

В данной модели интенсивность образования семейных пар учитывается посредством оператора $F(x,y)$, который задается в виде

$$F(x,y) = x *_n y *_n \alpha,$$

где $\alpha *_n \beta = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_{n-k}\beta_k$ – дискретная свертка.

Литература

1. _Лосанова Ф.М., Кенетова Р.О._ Об одной модели динамики численности населения с учетом половой структуры // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 1(12). С. 5–12.

Применение трехзначной логики для минимизации баз знаний

Лютикова Л.А., Шматова Е.В.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россиия;
lylarisa@yandex.ru, lenavsh@yandex.ru

В трехзначных системах добавлялось третье значение истинности – «неопределенность». Проблемы развития многозначных логик и вопросы их применения в науке и технике разрабатывались в трудах Э. Поста, Б. Россера, А. Туркетта, С. Яблонского, Д. Бочвара, Д. Неймана, Г. Рейхенбаха, В. Шестакова, Д. Вебба, А.Н. Колмогорова и других ученых, и особенно Брусенцова Н.П.[1]. В качестве убедительного аргумента в пользу трехзначной логики Брусенцов приводит ее применение для выражения силлогистики Аристотеля. Уникальность этой системы заключается в том, что она прямо и адекватно отображает логику естественного языка, реализует принципы корректного рассуждения [2,3].

В результате проведенных исследований были введены основные понятия, используемы при решении задач распознавания, построены некоторые из важных многозначных логических функций для трехзначной интерпретации получаемых классов, предложен основной алгоритм нахождения объектов и классов на заданной предметной области.

Построена трехзначная функция вида:

$W(X) = Z_k(q_k w_k X);$

$Z_k(q_k w_k X_k) = Z_{k-1} \wedge (\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} \overline{x_{ki}}) \vee q_{k-1} \wedge w_k;$

$q_k = q_{k-1} \wedge (\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} \overline{x_{ki}});\ q_1 = \mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} \overline{x_{1i}};\ j = 2...m;$

$Z_1 = \mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} \overline{x_{1i}} \vee w_1,$

являющаяся естественным и полным классификатором структуры исследуемых данных.

Литература

1. *Брусенцов Н.П.* Трехзначность отношения следования // Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 11. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2010. С. 86–87.

2. *Брусенцов Н.П.* Упорядочивание математической логики. М.: Фонд «Новое тысячелетие», 2011. 10 с.

3. *Лютикова Л.А., Шматова Е.В.* Логический подход к коррекции результатов работы ΣΠ-нейронных сетей // Информационные технологии. 2018. Т. 24, № 2. С. 110-116.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00050.

Дробная размерность и сингулярные дифференциальные уравнения

Ляхов Л.Н.

ВГУ, Воронеж, Россия; levnlya@mail.ru

1. О размерности аргумента, порождаемой функцией от сферической симметрии.

Дробный интеграл Римана—Лиувилля $(I^{\alpha}_{b-}f)(x), \alpha > 0,\ x < b$, при $x = 0,\ \alpha = n$ сводится к интегралу по n-мерному евклидову пространству $\mathbb{R}_n$. Если вместо площади сферы в $\mathbb{R}_n$ воспользоваться «площадью взвешанной сферы» $|S_1(n)|_\gamma = \int_{S_1(n)} (x^2)^{\frac{\gamma}{2}}\ dS = \frac{2\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}$, то указанный интеграл Римана–Лиувилля сведется к интегралу с весом $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\{\gamma_i\}}$ где мы положили $\alpha = |\gamma| = [\gamma] + \{\alpha\}$, $[\gamma]{=}n$ и $\{\alpha\} = \sum_1^n \{\gamma_i\} < 1$. Предел этого выражения при $\{\alpha\} \to 0$ и $\{\alpha\} \to 1$ есть интеграл от радиальной функции по евклидову пространству размерности n или $n+1$ соответственно. Таким образом, определенный интеграл Римана-Лиувилля может трактоваться как интеграл от радиальной функции в $\mathbb{R}_{n+\{\alpha\}}$ дробной размерности $n + \{\alpha\}$.

2. Фундаментальные решения. Примеры фундаментальных решений сингулярных дифференциальных операторов, показывают, что число $n + |\gamma|$ может трактоваться как дробная размерность аргумента этих решений. В качестве примера приведу недавно полученные результаты о ф.р. $E(x,t)$ сингулярного D_B-гиперболического оператора $(B_\beta)_t - a^2 L\left(D_{B_{\gamma,\,x}}\right)$, B_k – оператор Бесселя размерности k. Имеет место формула

$$E(x,t) = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right) 2^{\frac{\beta+1}{2}}}\,\Theta(t)\ \mathcal{F}^{-1}_{B_\gamma,\,\xi\to x}\left[\frac{\mathbb{Y}_{\frac{\beta-1}{2}}\left(t\sqrt{-L(i\xi)}\right)}{\sqrt{-L(i\xi)}}\right](x,t),$$

где $L(i\xi)$ – $\mathcal{F}_B$-символ оператора ($\mathcal{F}_B$ – смешанное преобразование Фурье–Киприянова–Катрахова [2]), $\mathbb{Y}_{\frac{\beta-1}{2}}$ – j-функция Неймана. При $\beta{=}0$, $|\gamma|{=}0$ – это ф.р. волнового уравнения, соответственно в $\mathbb{R}_3,\ \mathbb{R}_2,\ \mathbb{R}_1$. Это следует из формулы $\mathbb{Y}_{-\frac{1}{2}}(t) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})\,\mathbb{J}_{-\frac{1}{2}}(t) - \mathbb{J}_{\frac{1}{2}}(t)}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \mathbb{J}_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{J_{1/2}(t)}{t^{-1/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin t$.

Литература

1. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 190 с.
2. *Катрахов В.В., Ляхов Л.Н.* Полное преобразование Фурье-Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Т. 47, № 5. С. 681–695.

Математическая модель динамики изменения мощности экономического объекта в виде стохастического дифференциального уравнения

Магомедов Р.И., Магомедов И.И.

ДГУ, Махачкала, Дагестан; magomedova.e.s@mail.ru

Во многих научных публикациях [1]-[4] построены математические модели динамики изменения производства любых предприятий, которые относятся к финансово-экономическому процессу. Эти модели описаны уравнениями с частными производными.

Мы предлагаем обобщенную модель динамики изменения мощности любых объектов, относящихся к таким процессам.

Для этого обозначим через $x(t)$ мощность любого объекта в момент времени t. На числовой оси Ox $x(t)$ изобразится в виде точки, перемещающейся по этой оси в зависимости от времени t и образующей множество $\Pi = \{0 \le x \le \infty\}$ – пространство стоимости объекта.

Функция $x(t)$ подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению [1]

$$dx = F(x,t)dt + \sigma x dX, \tag{1}$$

где X – стохастический процесс, определяемый переходной функцией плотности вероятностей $p(z) = p(z : s; z, t)$, для которой выполняются условия сильной непрерывности [4], и описывает динамику мощности одного объекта .

Если предположить, что имеется конечное число таких объектов, подчиняющихся уравнению (1), то можно получить математическую модель в виде параболического уравнения на пространстве Π для функции плотности распределения динамики мощностей множества объектов в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 (x^2)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial (xu)}{\partial x}.$$

Литература

1. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998. Т. 1.

2. *Ерофеенко В.Т., Козловская И.С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. М.: Единоториал УРСС, 2004.

3. *Магомедов Р.И., Магомедов И.И., Назаралиев М-Ш.А.* Математические модели денежных вкладов и материальных ценностей банка. Изд. Дагестанского государственного университета. С. 8–12.

4. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 1997.

Итерационный метод защиты информации в стохастической игре

Магомедова Е.С., Раджабова М.Т.

ДГУ, Махачкала, Дагестан; magomedova.e.s.@mail.ru

Пусть определенная организация обладает служебной или секретной информацией. Назовем ее условно первым игроком. Другая организация пытается завладеть этой информацией – назовем ее вторым игроком. Каждый из них предпринимает действия для защиты своей и захвата чужой информации, назовем их стратегиями игроков. В результате получаем математическую модель стохастической игры в виде матриц размерности $m \times n$. Такая многошаговая игра имеет несколько $(k = 1, 2, \ldots, n)$ состояний, называемых партиями игры. Переход от одной партии к другой осуществляется с определенной переходной вероятностью $\beta_k, (k = 1, 2, \ldots, n)$. Чтобы многошаговая игра была конечной, нужно чтобы $\beta_k \to 0$ при $k \to \infty$. На каждом шаге игры предполагается выигрыш, так как действия игроков должны быть обеспечены финансами. Такую игру можно записать в виде $I(S, A^k, B^k, Q^k, \beta) =\left|\left|a_{ij}^k\right|\right|^l$, $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, l$, где $S = \{S_1, S_2, , \ldots, S_l\}$ – множество состояний игры; $A^k = \{A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \ldots, A_m^{(k)}\}$ – стратегии в k-й ситуации игры; $B^k = \{B_1^{(k)}, B_2^{(k)}, \ldots, B_n^{(k)}\}$ – стратегии; $V^{(k)}$ – выигрыш игры в k-й партии; $\beta^{(k)}$ – переходная вероятность от одного состояния в другое $0 \leq \beta^{(k)} \leq 1$. Предположим, что в матрице игры нет седловой точки и размерность матрицы небольшая. Тогда для решения игры применяют смешанную стратегию $A_i^{(k)} = \{p_{1i}^{(k)}, p_{2i}^{(k)}, \ldots, p_{mi}^{(k)}, B_j^{(k)} = \{q_{1j}^{(k)}, q_{2j}^{(k)}, \ldots, q_{nj}^{(k)}\}$, где $\sum_i p_{ii}^{(k)} = 1$ и $\sum_j p_{jj}^{(k)} = 1$. Если размерность матрицы игры очень большая, можно использовать итерационный метод приближенного решения игры. Идея этого метода при каждом состоянии состоит в том, что каждый из игроков поочередно применяет друг против друга свои стратегии, стремясь нанести друг другу наибольший вред. Игру начинает один из игроков, например игрок A. Он выбирает произвольно одну из своих стратегий A_i. Затем другой игрок B отвечает выбором стратегий B_i из всех своих стратегий так, чтобы минимизировать выигрыш первого. Продолжая этот процесс, получаем частоты применения соответствующих стратегий игроков, пропорционально их применениям. При увеличении числа ходов средний выигрыш будет стремиться к оптимальной цене игры, а частоты применения стратегий — к их вероятностям в оптимальных смешанных стратегиях игроков. Цена игры – при среднем выигрыше.

О разрешимости нелокальной смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма – Лиувилля

Мадрахимов У.С.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; umadraximov@mail.ru

В данной работе изучается вопрос о разрешимости смешанной задачи для дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Штурма-Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. Доказана теорема о базисности системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с нелокальными граничными условиями.

Рассматривается уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), n-1 < \alpha \le n, n \in N \quad (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-k}u(x,t) = \varphi_k(x), \quad k = 1,2,...,n, \quad (2)$$

$$\alpha u(0,t) + \beta u(\pi,t) = 0, \quad \beta u'(0,t) + \alpha u'(\pi,t) = 0. \quad (3)$$

Дробная производная понимается в смысле Римана-Лиувилля (см. [1]).

Теорема. _Пусть_ $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ |\,\alpha\,| \neq |\,\beta\,|$ _действительные числа и_ $\theta < 1$, _где_ $\theta = \sqrt{2}\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi x} - 1\right|, s_n = 2n + \varepsilon_n\varphi, \varphi = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \varepsilon_n = \varepsilon_{-n} = \pm 1$ _при_ $n \in Z$. _Тогда решение задачи (1)–(3) существует, единственно и представимо в виде разложения по собственным функциям_ $y_m(x)$ _спектральной задачи_

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),$$

$$\alpha y(0) + \beta y(\pi) = 0, \quad \beta y'(0) + \alpha y'(\pi) = 0.$$

Литература

1. _Нахушев А.М._ Дробное исчисление и его применения. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Работа выполнена при поддержке РУзФИ, проект № ОТ-Ф4-(36+32.)

Краевая задача со смещением для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом

Мажгихова М.Г.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; mazhgihova.madina@yandex.ru

Рассматривается уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau) u(t-\tau) = f(t), \quad 0 < t < 1 \tag{1}$$

где ∂_{0t}^{α} – дробная производная Капуто [1, с. 11], $1 < \alpha \leq 2$, $H(t)$ – функция Хевисайда, λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число.

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(t)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющую этому уравнению.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

$$u(0) = u_0, \quad u(1) - a u(t_1) = u_1, 0 < t_1 < 1. \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u(t) = u_0 D_{1\xi}^{\alpha-1} G(t,\xi)|_{\xi=0} - u_1 D_{1\xi}^{\alpha-1} G(t,\xi)|_{\xi=1} + \int\limits_0^1 f(\xi) G(t,\xi) d\xi,$$

где

$$G(t,\xi) = H(t-\xi) W_{\alpha}(t-\xi) + \frac{W_2(t)}{W_2(1) - a W_2(t_1)} [a H(t_1-\xi) W_{\alpha}(t_1-\xi) - W_{\alpha}(1-\xi)],$$

$$W_{\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (t - m\tau)_+^{\alpha m + \nu - 1} E_{\alpha, \alpha m + \nu}^{m+1} (\lambda (t - m\tau)_+^{\alpha}),$$

$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) z!}$ – обобщённая функция Миттаг-Леффлера [2], $(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)}$ – символ Похгаммера, $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Prabhakar T.R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. 1971. Vol. 19. P. 7–15.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462-а.

Об одной краевой задаче со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения

Макаова Р.Х.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;
Makaova.ruzanna@mail.ru

В области Ω рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^{H(y)+2H(-y)}u}{\partial y^{H(y)+2H(-y)}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[H(y)\left(b\frac{\partial u}{\partial y}+au\right)+H(-y)c^2u\right]+f(x,y), \qquad (1)$$

где a, b и c - заданные положительные числа; $H(y)$ - функция Хевисайда; $f(x,y)$ - заданная непрерывная функция; $u = u(x,y)$ - искомая действительная функция; $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup A_0A_r$. Здесь $\Omega^+ = \{(x,y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$, $\Omega^- = \{(x,y) : -\frac{r}{2c} < y < 0, -cy < x < cy + r\}$ и $A_0A_r = \{(x,0) : 0 < x < r\}$.

Уравнение (1) при $y > 0$ совпадает с уравнением Аллера [1, с. 254], которое лежит в основе математического моделирования движения почвенной влаги [2, с. 136], а при $y < 0$ - с волновым уравнением. В работе [3] для однородного уравнения (1) доказана теорема существования и единственности решения задачи Трикоми.

В данной работе исследована краевая задача со смещением для гиперболического уравнения третьего порядка (1) с вырождением порядка внутри области. Доказана теорема о существовании единственного регулярного в области Ω решения.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
2. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.
3. *Макаова Р.Х.* Задача Трикоми для одного уравнения смешанного типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук. 2015. Т.17. №1. С. 22–24.

Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями

Мамадалиев Н.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; M_numana59@mail.ru

Постановка задачи. Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования [1]

$$\dot{z}\,(t) = Az\,(t) + Bz\,(t-h) - Cu(t) + Dv(t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1; A, B, C, D$ – постоянные матрицы, h – величина запаздывания, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ – управление преследователя, $v(t) \in \mathbb{R}^q$ – управление убегающего, соответственно, $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \rho$, $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \sigma$, где ρ и σ – неотрицательные константы.

В $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, M_1— выпуклое компактное подмножество L, L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$. Начальным положением для системы (1) является n – мерная абсолютно непрерывная функция $z_0(\cdot)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$.

Предположение. *Для* $z_0\,(\cdot)$ *существуют число* $\tau_1(z_0\,(\cdot))$, $\delta \in [0, 1)$, $\beta \in L$, $\mu(t)$, $t \in [0, \tau_1]$ *и отображение* $M(t)$, $t \in [0, \tau_1]$ *такие, что:* a) *множество* $\hat{w}(M(t), t)$ *непусто для всех* $t \in [0, \tau_1]$; b) *справедливо неравенство* $1 - \inf_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_1]} \leq \sigma} \int\limits_0^{\tau_1} \lambda(z_0(\cdot), \tau_1, \beta, t, v(t))dt \leq 0$; c) *для любого допустимого управления* $v = v\,(t)\,,\ 0 \leq t \leq \tau_1$, *убегающего игрока имеет место включение* $\int_0^{\tau_1} \Big[E - F(\tau_1 - t)\Big]\pi K(\tau_1 - t)Dv(t)dt \in \beta + (1 - \delta)M_1$,
где δ, $\beta \in L$, $\mu(t)$, $t \in [0, \tau_1]$ и $M(t)$, $t \in [0, \tau_1]$, $\hat{w}(M(t), t)$, $K(t)$,
$\lambda(z_0(\cdot), \tau_1, \beta, t, v(t)), \xi[\tau, \beta, z_(\cdot)]$ определяются так же, как в [2].

Теорема. *Если выполнены все условия предположения, то в игре (1), из заданного начального положения* $z_0\,(\cdot)$ *возможно завершение преследования за время* τ_1.

Литература

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Наука, 1967. 548 с.

2. *Мамадалиев Н.* Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями при наличии запаздываний // Математические заметки. 2012. № 5. С. 750–760.

Работа выполнена при поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований, проект № ОТ-Ф4-33.

Нелокальная задача для параболо-гиперболического уравнения со спектральным параметром

Маманазаров А.О.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; mega.mamanazarov@mail.ru

В работе в области $Q = \bigcup\limits_{j=0}^{2} Q_j$ для уравнения

$$0 = Lu = \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} + (k/x)\, u_x - u_t - \lambda_1^2 u, \ (x,t) \in Q_1, \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{tt} - \lambda_2^2 u, \quad (x,t) \in Q_2, \end{cases} \qquad (1)$$

где $Q_0 = \{(x,t) : x = 0, 0 < t < 1\}$, $Q_1 = \{(x,t) : 0 < x < +\infty, 0 < t < 1\}$, $Q_2 = \{(x,t) : \ (-T/2) < x < 0, -x < t < x+1\}$; $k, \lambda_1, \lambda_2, T \in R$, причем $k \in (0,1)$, $T > 0$, рассматривается следующая задача:

Задача H_0. *Найти функцию $u\,(x,t) \in \bigcap\limits_{j=1}^{2} \left[C\left(\bar{Q}_j\right) \cap C_{x,t}^{2,j}\left(Q_j\right) \right]$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $Q_1 \cup Q_2$, следующим условиям склеивания на отрезке Q_0*

$$u\,(-0,t) = u\,(+0,t)\,, \qquad \lim_{x \to -0} u_x\,(x,t) = \lim_{x \to +0} x^k u_x\,(x,t)$$

и краевым условиям

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,, x \in [0, +\infty)\,; \quad \lim_{x \to +\infty} u\,(x,t) = 0, t \in [0,1]\,;$$

$$a\,(t)\, A_{0t}^{0,\lambda_2}\left[u\,(-t/2, t/2)\right] + b\,(t)\, A_{1t}^{0,\lambda_2}\left[u\,(-(t-1)/2, (t+1)/2)\right] +$$
$$+ c\,(t)\, u\,(0,t) = f\,(t)\,, t \in (0,1)\,,$$

где $\varphi\,(x)$, $a\,(t)$,$b\,(t)$,$c\,(t)$,$f\,(t)$ – заданные функции, причем $a\,(t)\,, b\,(t)\,,$ $f\,(t) \in C[0,1] \cap C^1\,(0;1)$, $a\,(t) \neq b\,(t)$, $a\,(1) = 0$, $b\,(0) = 0$, $c\,(0) \neq a\,(0)$, $b\,(1) \neq -2c\,(1)$, $\varphi\,(0) = f\,(0) \,/\, [c\,(0) + a\,(0)]$, а $A_{mt}^{0,\lambda}$ – оператор вида

$$A_{mt}^{0,\lambda}\left[g\,(t)\right] \equiv g\,(t) - \int\limits_m^t g\,(z)\, \frac{\partial}{\partial z} J_0 \left[\lambda \sqrt{(t-m)\,(t-z)}\right] dz,$$

$J_0\,(z)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Нелокальная краевая задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка

Мамчуев Мурат О.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; mamchuev@rambler.ru

В прямоугольной области $\Omega = \{(x,y): \ l_1 < x < l_2, \ 0 < y < T\}$ рассмотрим систему уравнений

$$D_{0y}^{\alpha} u(x,y) + B\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + B_1 u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $u(x,y) = \|u_1(x,y), u_2(x,y)\|$ и $f(x,y) = \|f_1(x,y), f_2(x,y)\|$ – соответственно, искомая и заданная вектор-функции, B, B_1 – заданные постоянные матрицы размера 2×2, D_{0y}^{ν} – оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегро дифференцирования порядка ν [1, с. 9], $0 < \alpha < 1$.

Задача 1. *Найти решение $u(x,y)$ системы (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = \varphi(x), \quad l_1 \le x \le l_2,$$

$$Mu(l_1,y) + Nu(l_2,y) = \rho(y), \quad 0 < y < T,$$

где $\varphi(x) = ||\varphi_1(x), \varphi_2(x)||$, $\rho(y) = ||\rho_1(y), \rho_2(y)||$ – заданные функции, $M = \|\mu_{ij}\|$ и $N = \|\nu_{ij}\|$ – заданные постоянные матрицы размера 2×2.

Решение $u \equiv u(x,y)$ системы (1) называется регулярным [2] в области Ω если $y^{1-\alpha}u(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, $D_{0y}^{\alpha}u$, $\frac{\partial u}{\partial x} \in C(\Omega)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $B = \|b_{ij}\|$, $(i,j = \overline{1,2})$, $b_{11} = -b_{22}$, $\det B < 0$, $\varphi(x) \in C[l_1,l_2]$, $y^{1-\alpha}\rho(y) \in C[0,T]$, выполняются условия согласования*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\rho(y) = M\varphi(l_1) + N\varphi(l_2),$$

$y^{1-\alpha}f(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, $f(x,y)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x, векторы Mz_1 и Nz_2 не коллинеарны, здесь z_i – собственный вектор матрицы B, относящийся к собственному значению $\lambda_i = (-1)^{i+1}\sqrt{-\det B}$, $(i = 1,2)$. Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение задачи 1.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Мамчуев М.О.* Фундаментальное решение системы уравнений с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1113–1124.

Разработка мехатронной системы для исследования колебательных характеристик многослойных печатных плат

Мамчуев Мухтар О.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; mamchuevmo@yandex.ru

К электронной аппаратуре (ЭА), устанавливаемой на кораблях, самолетах и спутниках, предъявляются повышенные требования по виброзащите [1-3]. В работе [1] проводились исследования образцов многослойных печатных плат (ПП), которые представляли собой прямоугольные пластины с одинаковыми размерами и с различной плотностью поверхностного монтажа компонентов. Был разработан и изготовлен измерительный стенд, принцип работы которого состоит в следующем. Образец ПП жестко закрепляется с одной выбранной стороны. На противоположную сторону образца с помощью двухсторонней липкой ленты приклеивается небольшой магнит. На определенном (фиксированном) расстоянии от магнита размещается катушка с сердечником, которая служит для детектирования колебаний образца. Колебания ПП возбуждаются механическим способом. Для этого используется электродвигатель с малыми оборотами, на вал которого прикреплена гибкая отклоняющая пластина: в процессе вращения эта пластина цепляет образец за свободный край и тем самым возбуждает его колебания. Таким образом, при колебаниях в начальный момент времени имеется определенный профиль изгиба исследуемого образца.

Были исследованы три образца ПП цифрового устройства с разным количеством SMD-компонентов. Образцы имели пять чередующихся слоев из меди и стеклотекстолита FR4. Средние значения коэффициентов заполнения слоев: Power и Gnd - 0.9 (90%); Bottom и Top - 0.3 (30%). Размер образцов: длина $l = 13$ см; ширина $a = 2.8$ см; толщина $h = 2$ мм.

В работе показано, что на частоту, амплитуду и логарифмический декремент затухания колебаний оказывает влияние не масса SMD-компонентов, а структура поверхностного монтажа и металлических слоев ПП.

Литература

1. *Талицкий Е.Н.* Защита электронных средств от механических воздействий. Теоретические основы. Владимир: Владим. гос. ун-т., 2001. 256 с.
2. *Жавнер В.Л.* Мехатронные системы: учеб. пособие / В.Л. Жавнер, А.Б. Смирнов. СПБ.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. 131 с.
3. *Рехвиашвили С.Ш., Мамчуев М.О., Нарожнов В.В., Ошхунов М.М., Тлибеков А.Х.* // Известия высших учебных заведений. Электроника. 2018. Т. 23, № 2. С. 49–57.

Об одной краевой задаче, заданной на середине области для одного интегро-дифференциального уравнения 3D Бианки

Мамедов И.Г.[1], Абдуллаева А.Дж.[2]

[1]*ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; ilgar-mamedov-1971@mail.ru*
[2]*СГУ, Сумгаит, Азербайджан; aynure_13@mail.ru*

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение 3D (трехмерное) Бианки

$$\begin{gathered}(V_{1,1,1})(x) = D_1 D_2 D_3 u(x) + \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=0\\ i_1+i_2+i_3<3}}^{1} A_{i_1,i_2,i_3}(x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} u(x) + \\ + \int\limits_{\frac{x_1^0+h_1}{2}}^{x_1} \int\limits_{\frac{x_2^0+h_2}{2}}^{x_2} \int\limits_{\frac{x_3^0+h_3}{2}}^{x_3} \left[\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=0\\ i_1+i_2+i_3<3}}^{1} K_{i_1,i_2,i_3}(\tau;x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} u(\tau) \right] d\tau = \\ = \varphi_{1,1,1}(x),\ x \in G. \qquad (1)\end{gathered}$$

Здесь $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ искомая функция, определенная на G; $A_{i_1,i_2,i_3}(x)$ заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2 \times G_3$, где $G_k = \left(x_k^0, h_k\right)$, $D_k^{i_k} = \partial^{i_k}/\partial x_k^{i_k}$ – оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л. Соболева, $k = \overline{1,3}$; $\varphi_{1,1,1}(x)$ заданная измеримая функция на G; $K_{i_1,i_2,i_3}(\tau; x) \in L_\infty (G \times G)$ заданные функции.

В представленной работе для интегро-дифференциального уравнения 3D Бианки (1) классические условия на середине области приведены к неклассическим условиям. Трехмерная краевая задача на середине области в этой постановке более естественна, чем трехмерная краевая задача на середине области в классической постановке. Это связано с тем, что в этой постановке трехмерной краевой задачи на правые части краевых условий никаких дополнительных условий типа согласования не требуются. В работе выявлен гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств при исследовании трехмерной краевой задачи заданной на середине области для одного интегро-дифференциального 3D Бианки третьего порядка с L_p – коэффициентами на основе сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра.

Четырехмерная начально-краевая задача в неклассической трактовке для одного вольтерро-гиперболического интегро-дифференциального уравнения

Мамедов И.Г., Джафарова Р.Э.

ИСУ НАНА, Баку, Азербайджан; ilgar-mamedov-1971@mail.ru; raya-ceferova@mail.ru

К числу нелокальных задач относятся задачи, связанные с уравнениями «нелокального характера», например, с интегро-дифференциальными или же с нагруженными, если даже краевые условия для них являются локальными [1].

Рассмотрим вольтерро-гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned}(V_{1,1,1,1})(x) = D_1 D_2 D_3 D_4 u(x) + \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3+i_4<4 \\ i_1,i_2,i_3,i_4=\overline{0,1}}}^{1} A_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(x) + \\ + \int\limits_{x_1^0}^{x_1}\int\limits_{x_2^0}^{x_2}\int\limits_{x_3^0}^{x_3}\int\limits_{x_4^0}^{x_4} \left[\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3+i_4<4 \\ i_1,i_2,i_3,i_4=\overline{0,1}}} T_{i_1,i_2,i_3,i_4}(\tau;x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} D_4^{i_4} u(\tau) \right] d\tau = \\ = \varphi_{1,1,1,1}(x), \quad x \in G, \qquad (1)\end{aligned}$$

Здесь $u(x) = u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ искомая функция, определенная на G; $A_{i_1,i_2,i_3,i_4}(x)$ заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4$, где $G_k = \left(x_k^0, h_k\right), D_k^{i_k} = \partial^{i_k} / \partial x_k^{i_k}$-оператор обобщенного дифференцирования в смысле С.Л.Соболева, $k = \overline{1,4}$; $\varphi_{1,1,1,1}(x)$ заданная измеримая функция на $G; T_{i_1,i_2,i_3,i_4}(\tau;x) \in L_\infty(G \times G)$ заданные функции.

В данной работе выявлен гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств при исследовании четырехмерной начально-краевой задачи в неклассической трактовке для вольтерро-гиперболического интегро-дифференциального уравнения (1) с доминирующей смешанной производной четвертого порядка с L_p – коэффициентами на основе сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.

Существование и единственность решений дифференциальных уравнений первого порядка с многоточечными условиями при импульсных воздействиях

Марданов М.Дж.[1], **_Шарифов Я.А._**[2]

[1] *ИММ НАНА, Баку, Азербайджан; misirmardanov@yahoo.com*
[2] *БГУ, Баку, Азербайджан;*

Импульсные дифференциальные уравнения описывают процессы, которые внезапно меняют свое состояние в определенные моменты времени. Учет импульсных эффектов важен в таких приложениях реального мира, как физика, медицина, биология, экология и т. д. (см., например, [1]).

В данной статье рассматривается следующая краевая задача для импульсных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad t \neq \tau_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} l_i x(t_i) = \alpha, \tag{2}$$

$$\Delta x(\tau_j) = I_j(x(\tau_j)), j = 1, \ldots, p. \tag{3}$$

Здесь

$$f \in C([0, T], R^n), \quad l_i \in R^{n \times n}, \quad \det \sum_{i=1}^{m} l_i \neq 0, \quad \alpha \in R^n, \quad I \in C(R^n).$$

Краевая задача (1)–(3) приводится к эквивалентному интегральному уравнению, далее применяются теоремы о неподвижных точках.

Литература

1. *Ashyralyev A., Sharifov Y.A.* Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions // Advances in Difference Equations. 2013. Vol. 173.

Об одной начально-краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с разрывными коэффициентами

Марданов М.Дж.[1], Меликов Т.К.[2], Мамедов И.Г.[3], Бандалиев Р.А.[4]

[1,2,4]*ИММ НАНА, Баку, Азербайджан;* [1]*misirmardanov@yahoo.comэк*
[2]*t.melik@rambler.ru;* [3]*bandaliyevr@gmail.com*
[2,3]*ИСУ НАН, Баку, Азербайджан;* [4]*ilgar-mamedov-1971@mail.ru*

К числу нелокальных задач относятся также задачи, связанные с уравнениями «нелокального характера», например, с дробными производными если даже краевые условия для них являются локальными.

В этой работе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка

$$(V_\alpha u)(t) \equiv {}_0^C D_t^\alpha u(t) + a(t)u(t) = \varphi_\alpha(t), \tag{1}$$

при следующем начально-краевом условии

$$V_0 u \equiv u(0) = \varphi_0 \in \mathbb{R}; \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$, φ_0 – заданное число и $a(t), \varphi_\alpha(t) \in L_p(0,T)$ являются заданными измеримыми функциями. Отметим, что здесь в качестве дробной производной используется дробная производная в смысле Капуто.

Решение начально-краевой задачи (1), (2) будем искать в пространстве Соболева дробного порядка определенное следующим образом

$$W_p^{(\alpha)}(0,T) \equiv \left\{ u \in L_p(0,T) : \, {}_0^C D_t^\alpha u \in L_p(0,T); 1 \le p < \infty \right\}.$$

Норму в пространстве $W_p^{(\alpha)}(0,T)$ будем определять равенством:

$$\|u\|_{W_p^{(\alpha)}(0,T)} = \|u\|_{L_p(0,T)} + \left\| {}_0^C D_t^\alpha u \right\|_{L_p(0,T)}.$$

В данной работе выявлен гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств при исследовании начально-краевой задачи для уравнения (1) с разрывными коэффициентами в результате сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Кроме того, для поставленной начально-краевой задачи (1), (2) найдено интегральное представление решения.

Начально-краевая задача для одного дифференциального уравнения дробного порядка с частными производными и ее корректная разрешимость

Марданов М.Дж.[1], Меликов Т.К.[2], Мамедов И.Г.[3], Бандалиев Р.А.[4]

[1,2,4]*ИММ НАНА, Баку, Азербайджан;* [1]*misirmardanov@yahoo.com;*
[2]*t.melik@rambler.ru;* [3]*bandaliyevr@gmail.com*
[2,3]*ИСУ НАН, Баку, Азербайджан;* [4]*ilgar-mamedov-1971@mail.ru*

В этой работе рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными дробного порядка

$$(V_{\alpha,\beta}u)(x,y) \equiv {}_0^C D_x^\alpha \, {}_0^C D_y^\beta u(x,y) + a_{1,0}(x,y) {}_0^C D_x^\alpha u(x,y) + a_{0,1}(x,y) {}_0^C D_y^\beta u(x,y)$$

$$+a_{0,0}(x,y)u(x,y) = \varphi_{\alpha,\beta}(x,y) \in L_p(G), \tag{1}$$

при следующих начально-краевых условиях

$$\begin{cases} V_{0,0}u \equiv u(0,0) = \varphi_{0,0} \in \mathbb{R}; \\ (V_{\alpha,0}u)(x) \equiv {}_0^C D_x^\alpha u(x,y)\Big|_{y=0} = \varphi_{\alpha,0}(x) \in L_p(G_1); \\ (V_{0,\beta}u)(y) \equiv {}_0^C D_y^\beta u(x,y)\Big|_{x=0} = \varphi_{0,\beta}(y) \in L_p(G_2); \end{cases} \tag{2}$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$, $(x,y) \in G = G_1 \times G_2$, $G_i = (0, h_i)$, $(i = 1,2)$, $\varphi_{0,0}$ – заданная постоянная, а $\varphi_{\alpha,0}(x)$ и $\varphi_{0,\beta}(y)$ являются заданными измеримыми функциями. Отметим, что здесь в качестве дробной производной используется дробная производная в смысле Капуто.

В данной работе выявлен гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств при исследовании начально-краевой задачи для уравнения (1) с негладкими коэффициентами в результате сведения этой задачи к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Кроме того, для поставленной начально-краевой задачи (1), (2) найдено интегральное представление решения.

Об одной задаче распространения тепла в системе стержней на графе типа «дерево»

Мартынова Ю.В.

ООО «РН-УфаНИПИнефть», Уфа, Россия; busa1987@mail.ru

Рассматривается система из однородных стержней в виде произвольного графа типа «дерево», который не содержит циклов. На каждом из P ребер задается уравнение теплопроводности в стержне длиной l_i в случае отсутствия внешних тепловых источников с коэффициентом теплопроводности k_i, удельной теплоемкостью c_i, плотностью материала ρ_i:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right) = c_i \rho_i \frac{\partial U_i}{\partial t}, x_i \in (0; l_i), i = \overline{1; P}.$$

На свободных концах стержней $x_i = l_i$, $i = \overline{1; N}$ помещены сосредоточенные теплоемкости $\widetilde{c}_i$ и происходит теплообмен с соответствующим коэффициентом h_i с внешней средой нулевой температуры:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}(l_i; t) + \frac{h_i}{k_i} U(l_i; t) + \frac{\widetilde{c}_i}{k_i} \frac{\partial U_i}{\partial t}(l_i; t), i = \overline{1; N}.$$

В каждой из $M = P + 1 - N$ внутренних вершин задаются условия непрерывности температуры и теплового баланса:

$$\begin{cases} U_1(0;t) = ... = U_{D_1}(0;t) = U_{N+1}(0;t), \\ \sum_{i=1}^{D_1} k_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i}(0;t) + k_{N+1} \frac{\partial U_{N+1}}{\partial x_{N+1}}(0;t) = 0, \\ U_{D_1+...+D_{j-1}+1}(0;t) = ... = U_{D_1+...+D_j}(0;t) = \\ = U_{N+j-1}(l_{N+j-1};t) = U_{N+j}(0;t), j = \overline{2; M-1} \\ \sum_{i=D_1+...+D_{j-1}+1}^{D_1+...+D_j} k_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i}(0;t) - k_{N+j-1} \frac{\partial U_{N+j-1}}{\partial x_{N+j-1}}(l_{N+j-1};t) + \\ + k_{N+j} \frac{\partial U_{N+j}}{\partial x_{N+j}}(0;t) = 0, j = \overline{2; M-1} \\ U_{D_1+...+D_{M-1}+1}(0;t) = ... = U_{D_1+...+D_M}(0;t) = U_P(l_P;t), \\ \sum_{i=D_1+...+D_{M-1}+1}^{D_1+...+D_M} k_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i}(0;t) - k_P \frac{\partial U_P}{\partial x_P}(l_P;t) = 0. \end{cases}$$

Исследованы свойства спектра соответствующей краевой задачи. Предложен метод численного решения обратной спектральной задачи, основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий и позволяющий восстановить значения сосредоточенных теплоемкостей и коэффициентов теплообмена на концах стержней.

Литература

1. *Мартынова Ю.В.* Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля на геометрическом графе типа «дерево» // Системы управления и информ. технол. 2013. № 3 (53). С. 19–23.

Применение математической модели кривой капиллярного давления горных пород для подбора коэффициентов J-функции Леверетта

Мартынова Ю.В., Михайлов С.П.

ООО «РН-УфаНИПИнефть», Уфа, Россия; martynovayv@ufanipi.ru; mikhaylovsp@ufanipi.ru

В работе используется модель восстановления значения остаточной водонасыщенности горных пород [1] S_w^* путем подбора аппроксимирующей функции $\widetilde{P}_c(S_w; S_w^*)$, наиболее точно описывающей экспериментальную кривую капиллярного давления P_c. Анализ большого количества асимптотических функций показал, что оптимальной для описания формы кривой капиллярного давления является функция вида:

$$\widetilde{P}_c(S_w; S_w^*) = a\left(\tfrac{1-S_w}{S_w-S_w^*}\right)^b,$$

где S_w – водонасыщенность при заданном давлении; S_w^*, a и b – коэффициенты аппроксимирующей функции, при которых выполняется условие минимума невязки между экспериментальными данными и полученными при моделировании: $\sum |\widetilde{P}_c(S_w; S_w^*) - P_c| \to \min$.

Для получения обобщенной J-функции Леверетта по данным капиллярометрии рассчитывается J-функция для каждого значения нормализованной насыщенности, а затем полученные зависимости осредняются и представляются в виде:

$$J = c\left((S_{w,norm})^d - 1\right) = c\left(\left(\tfrac{1-S_w}{S_w-S_w^*}\right)^d - 1\right),$$

где c и d – коэффициенты функции Леверетта, которые подбираются с помощью найденных значений остаточной водонасыщенности S_w^*.

Имея в распоряжении зависимость J-функции Леверетта от водонасыщенности для разных типов пород исследуемого пласта, получаем инструмент для оценки основного параметра, характеризующего нефтяной пласт, – нефтенасыщенность.

Литература

1. *Колонских А.В., Мартынова Ю.В., Михайлов С.П., Муртазин Р.Р.* Метод восстановления коэффициента остаточной водонасыщенности горных пород путём настройки математической модели капиллярной кривой // Нефтепромысловое дело. 2018. № 11. С. 27–30.

Об оценках нормы оператора перестановок в пространстве суммируемых функций

Маршан Р.Б.

АГУ, Сухум, Абхазия; ramgar28@rambler.ru

В настоящей статье приводятся числовые оценки снизу нормы оператора перестановок системы Хаара в пространстве $L[0,1)$.

Пусть $A_0 = \left\{[0,1), \left[0,\frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2},1\right), \left[0,\frac{1}{4}\right), \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right), \left[\frac{3}{4},1\right), \ldots.\right\}$ – множество всех, открытых справа, двоичных полусегментов, $A = A_0 \cup \{[0,1]\}$, и $\{h_I, I \in A\}$ – система Хаара, занумерованная элементами множества A так : $h_{[0,1]}(t) = 1, t \in [0,1)$, а для $I \in A_0$ значения функции $h_I(t)$ определены так: $h_I(t) = |I|^{-\frac{1}{2}}, t \in I^+, -|I|^{-\frac{1}{2}}, t \in I^-$, $t \in [0,1] \backslash I$, где $I^+(I^-)$ – левая (правая) половина элемента $I, I^+(I^-) \in {}_0$, $|I|$ – мера Лебега множества I.

Каждая биекция $\pi : A \to A$ порождает оператор перестановки системы Хаара:

$$R_\pi f = \sum_{I \in A} f_I h_{\pi(I)}, \qquad f_I = \int\limits_0^1 f(t) h_I(t) dt, I \in A.$$

Биекцию $\pi : A \to A$ называют сохраняющей меру, если для каждого $I \in A$ имеем $|\pi(I)| = |I|$.

Вопросы ограниченности величин

$$\|R_\pi\|_{L^p} = \|R_\pi\|_{L^p \to L^p}, p \in (1,2) \cup (2,\infty).$$

изучались в [1], [2].

Теорема. Пусть $\pi : A \to A$ – нетождественная сохраняющая меру биекция. Тогда $\|R_\pi\|_L \geq \frac{3}{2}$.

Литература

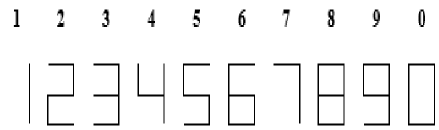
1. *Shipp F.* On equivalence of rearrangements of the Haar system in dyadic Hardy and BMO spaces // Analysis Math. 1990. Vol. 16. P. 135–141.
2. *Семёнов Е.М. и Штекерт Б.* Перестановки системы Хаара в пространствах L^p // Analysis Math. 1981. Vol. 7, № 4. C. 277–295.

Об одной системе обозначений для букв и чисел

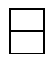
Маршан Р.Б.

АГУ, Сухум, Абхазия; ramgar28@rambler.ru

В статье построена система обозначений для букв и чисел, названная автором: Алфавит А54. Основанием для А54 послужила следующая версия обозначений для цифр, используемая в цифровых устройствах индикации:



Построенный автором алфавит А54 использует только 7 равных сторон двух равных квадратов, имеющих общую сторону и расположенных один на другом:



Под 20 обозначениями для букв и чисел в верхней строке приведены симметричные и перевернутые варианты этих 20 обозначений. Всего 54 обозначения. В А54 нет маленьких и больших букв, имеются только прописные буквы. Алфавит А54 может использоваться в информатике и цифровой технике. Нами построен пример кодирования букв латинского алфавита с помощью А54.С помощью А54 можно закодировать и 33 буквы русского алфавита.

Литература

1. _Заславский Г.М., Сагдеев Р.З._ Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. Москва: Наука, 1988.
2. _Уизем Дж._ Линейные и нелинейные волны. Москва: МИР, 1977.

Задача Дирихле для многомерного уравнения в частных производных дробного порядка

Масаева О. Х.

ИПМА, Нальчик, Россия;
olesya.masaeva@yandex.ru

В области $\Omega = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0,\ i = \overline{1, n}\}$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} D_{0x_i}^{\alpha_i} u_{x_i}(x) + b_i(x) \partial_{0x_i}^{\beta_i} u(x) + c(x) u(x) = 0, \tag{1}$$

где $0 < \alpha_i < 1$, $0 < \beta_i < 1$, $\partial_{0x_i}^{\beta_i} u = D_{0x_i}^{\beta_i - 1} \frac{\partial}{\partial x_i} u$ – дробная производная в смысле Капуто порядка β_i по переменной x_i, $D_{0x_i}^{\gamma}$ – оператор интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля порядка $|\gamma|$ [1].

Уравнение (1) при $\alpha_i = \beta_i = 1$ переходит в эллиптическое уравнение второго порядка $\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x) + b_i(x) u_{x_i}(x) + c(x) u(x) = 0$.

Дифференциальные уравнения дробного порядка, обобщающие уравнения эллиптического типа, могут возникать при математическом моделировании социально-экономических систем [2]. В работе [3] были исследованы основные краевые задачи для трехмерного аналога уравнения Лапласа дробного порядка. В работе [4] в выпуклой области исследовалась задача Дирихле для уравнения (1).

В данной работе рассматриваются вопросы единственности и существования решения следующей задачи: *найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условию*

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
3. *Lopushanska G. P.* Basic boundary value problems for one equation with fractional derivatives // Ukrainian Mathematical Journal Ukr. Mat. Zh. 1999. T. 51, № 1. P. 51–65.
4. *Масаева О.Х.* Принцип экстремума для фрактального эллиптического уравнения //Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 4. С. 31–35.

Разработка программного средства для распознавания скрытых изображений

Маслова О.И., Шагрова Г.В.

СКФУ, Ставрополь, Россия; oksmaslova@inbox.ru; g_shagrova@mail.ru

Проведен анализ программных средств для распознавания скрытой информации, представленных в свободном доступе, а также методов, реализованных в этих средствах. На основе результатов анализа выявлены основные достоинства и недостатки. Основным недостатком большинства рассмотренных программных средств является зависимость метода распознавания от метода сокрытия. Таким образом, представляет интерес разработка программного обеспечения, позволяющего распознать скрытое изображение, сформированное в других программах.

Создание программных средств для распознавания скрытых изображений, позволяет оценить эффективность методов встраивания скрытой информации в изображения и их робастность [1], что в дальнейшем позволит создавать более стойкие и качественные методы формирования изображений, содержащих скрытую информацию.

Разработано программное средство для распознавания скрытых изображений, с использованием которого было проведено сравнение качества скрытой в изображениях информации, разработанных в работах [2, 3]. В результате сравнения было установлено, что метод, описанный в работе [3] позволяет формировать изображения, содержащие скрытую информацию, с лучшим визуальным качеством и более высокими коэффициентами .

Литература

1. *Федосеев В.А.* Унифицированная модель систем встраивания информации в цифровые сигналы // Компьютерная оптика. 2016. Т. 40, № 1. С. 87–98.

2. *Шагрова Г.В., Топчиев И.Н.* Способы формирования и выявления латентных изображений // Наукоемкие технологии. 2012. № 7. С. 88–93.

3. *Жарких А.А., Шагрова Г.В.* Способ формирования цифрового латентного изображения // Вестник СевКавГТИ: научный журнал. 2015. Т. 1. № 3 (22). С. 188–195.

4. *Монич Ю.И., Старовойтов В.В.* Оценки качества для анализа цифровых изображений // Искусственный интеллект. 4’2008. С. 376–386.

5. *Конахович Г.Ф., Пузыренко А.Ю.* Компьютерная стеганография. Теория и практика. К.: МК-Пресс, 2006. 288 с.

Об анализе устойчивости социально-экономического развития Азербайджана с применением методов многомерной статистики

Мирзоев Ф.А, Кулиев Р.М., Аббасова Ш.А., Искендеров Р.К.

БГУ, Баку, Азербайджан; farhad_1958@mail.ru; isgenderov_ramiz@mail.ru

В работе рассматриваются вопросы оценки устойчивости социально-экономического развития, которые, как правило, сопровождается множеством самых разнообразных показателей, с помощью так называемых нейронных сетей. Применение методов многомерной статистики позволило авторам условно разделить показатели на три группы – экономические, социальные и экологические – и выявить за период с 2005 по 2017 год так называемые три агрегированных фактора. Первый фактор свидетельствует об увеличении промышленного и сельскохозяйственного производства, что положительно влияет на доходы населения, способствует росту внутренних инвестиций, влияет на инфляцию. Второй фактор связан с внешними инвестициями и благосостоянием. Третий – включает показатели внешнеторгового оборота и выбросы загрязняющих веществ в атмосферу. Значения всех этих факторов были использованы автором в виде входных переменных для построения нейронной сети, выходной переменной которой могут быть основные макроэкономические показатели и, в частности, ВВП(валовой внутренний продукт) на душу населения. Таким образом, исходя из анализа статистических данных, на базе нейронных сетей была построена модель, которая отражает зависимость валового внутреннего продукта от показателей устойчивости социально-экономического развития. При этом с помощью такой модели можно решать в дальнейшем задачи прогнозирования и управления экономикой, а также определять ее приоритетные направления.

Задача с условием Бицадзе – Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом

Мирсабуров М., Хуррамов Н.Х.

ТерГУ, Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru; nxurramov22@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + ((\beta_0/y)u_y = 0,\ m > 0,\ \beta_0 \in (-m/2,\,1),$$

в смешанной области Ω [1].

Задача TH. Требуется найти в области Ω функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $u(x,y) \in \left(\overline{\Omega}^+\right) \cup C\left(\overline{\Omega}^-\right)$; 2) $u(x,y) \in C^2\left(\Omega^+\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области; 3) $u(x,y)$ является в области Ω^- обобщенным решением класса R_1; 4) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$u(x,-0) = a_1 u(x,0) + a_0(x),\ x \in \overline{I},$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)\lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x),\ x \in I\setminus\{c\},$$

5) выполняются равенства

$$u(x,y) = \varphi(x), (x,y) \in \overline{\sigma}_0,$$

$$u(x,y)\mid_{AC_0} = \psi(x), x \in [-1,(c-1)/2],$$

$$u[\theta(x)] = \mu u[\theta^*(x)] + \rho(x),\quad x \in [c,1],$$

где μ – некоторая постоянная, $\theta(x_0), (\theta^*(x_0))$ – аффиксы точки пересечения характеристики AC (EC_1) с характеристикой, исходящей из точки $M(x_0,0)$, где $x_0 \in [c,1]$, $E = E(c,0)$, $-1 < c < 1$.

Теорема. *Задача* TH *при* $a_0(x) \equiv 0, b_0(x) \equiv 0, \varphi(x) \equiv 0, \psi(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 0, \mu < 0, a_1 > 0, f(x) > 0, \alpha_0 = arctg(\pi C(-1))/\pi < \frac{1}{4}, |3\alpha - \alpha_0| < \frac{1}{2}$ *однозначно разрешима, где* $C(-1) = a_1 cos(\beta\pi)/\pi(f(c) + a_1 sin(\beta\pi))$.

Доказательство теоремы проводится методом работы [1].

Литература

1. *Мирсабуров М.* Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе – Самарского на параллельных характеристиках // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 9. С. 1281–1284.

Двухточечная теорема о среднем с оператором Бицадзе – Нахушева для эллиптического уравнения на сфере

Мугланов А.Л.[1], Половинкин И.П.[2], Половинкина М.В.[3]

[1,2]*ВГУ, Воронеж, Россия;* [3]*ВГУИТ, Воронеж, Россия;*
muglanov_artem@mail.ru; polovinkin@yandex.ru; polovinkina-marina@yandex.ru

Пусть $(\chi^{(j)}, \tau^{(j)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $j = 1,2$, где $\chi^{(j)} = (\chi_1^{(j)}, \chi_2^{(j)}, \ldots, \chi_n^{(j)})$, $j = 1,2$, $|\chi^{(1)} - \chi^{(2)}| < |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|$. Построим матрицу $A(\dim A = n \times n)$ Зафиксируем индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$ и положим $a_{ij} = \left(\chi_j^{(1)} - \chi_j^{(2)}\right)/|\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|$, $j = 1, \ldots, n$. Оставшиеся позиции матрицы A заполним исходя из условий $AA^T = I$, $\det A = 1$, где A^T — матрица, транспонированная к матрице A, $I = \|\delta_{ij}\|$ — единичная матрица. Пусть A_i — матрица, полученная из матрицы А заменой i-го столбца нулями. Следуя [1], введем усредняющий оператор S_ϱ и оператор B_ϱ^n по формулам

$S^n v = S_\varrho^n v = \sqrt{\pi^{1-n}} \int_{|\xi|=\varrho} v\,(\eta,\, \sigma)\; d\omega_\xi,\ |\chi^{(1)} - \chi^{(2)}| > 0,$

$S^n = S_\varrho^n v = \sqrt{\pi^{1-n}} \int_{|\xi|=\varrho} v\left(\chi^{(2)} + \xi, (\tau^{(1)} + \tau^{(2)})/2\right) d\omega_\xi,\ \chi^{(1)} = \ \chi^{(2)},$

$B^n v = B_\varrho^n\, v = \varrho\, (\partial/(2\varrho\partial\varrho))^{(n-1)/2}\, (1/\varrho S_\varrho v)\,,\ n = 1(\mathrm{mod}2),$

$B^n v = B_\varrho^n\, v = \pi^{-1/2}\, (\partial/(2\varrho\partial\varrho))^{n/2} \int_0^\varrho S_\varrho v\, d\theta/\sqrt{\varrho^2 - \theta^2},\ n = 0(\mathrm{mod}2),$

где $d\omega_\xi$ — элемент площади поверхности сферы $|\xi| = \varrho$ в $\mathbb{R}^n$,

$\eta = |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|\, \xi_i(\chi^{(1)} - \chi^{(2)})/\left(2|\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|\varrho\right) + \left(\chi^{(1)} + \chi^{(2)}\right)/2 + A_i\xi,$

$\sigma = \left(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}\right)/2 - |\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|\xi_i/(2\varrho), \varrho = \ \frac{\sqrt{(\tau^{(1)} - \tau^{(2)})^2 - |\chi^{(1)} - \chi^{(2)}|^2}}{2}.$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_n, z) = (x, z)\}, n \geq 2$, множество $S_n^+ = \{(x, z) \in S_n : z = \sqrt{1 - |x|^2}\}$ – верхнюю половину сферы с метрикой $ds^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (\delta_{ik} + x_i x_k/z^2) dx_i dx_k$. Оператор Лапласа-Бельтрами в этой метрике обозначим Δ_ω. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Для любых двух точек* $(x^{(1)}, z^{(1)})$, $(x^{(2)}, z^{(2)}) \in S_n$ *и любых двух значений* $t^{(1)}$, $t^{(2)} \in (0, 2\pi]$, *удовлетворяющих условию*
$(z^{(1)}z^{(2)} + x^{(1)}x^{(2)} - \cos(t^{(1)} - t^{(2)}))/((z^{(1)} - \cos t^{(1)})(z^{(2)} - \cos t^{(2)})) > 0,$
регулярное решение $u(x)$ *уравнения* $\Delta_\omega u + ((n-1)/2)^2\, u = 0$ *удовлетворяет формуле среднего значения*
$(z^{(1)} \mp \cos t^{(1)})^{(n-1)/2} u(x^{(1)}, z^{(1)}, t^{(1)}) + (z^{(2)} \mp \cos t^{(2)})^{(n-1)/2} u(x^{(2)}, z^{(2)}, t^{(2)})$
$= B_\varrho^n(v(x(\chi,\tau), z(\chi,\tau), t(\chi,\tau))),\ T = \frac{\pm \sin t}{z \mp \cos t}\ , \chi = \frac{x}{z \mp \cos t}.$

Литература

1. *Бицадзе А.В., Нахушев А.М.* К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 12. С. 2184–2191.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-06-00535.

Краевая задача для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка с нехарактеристической линией изменения типа

Муминов З.М., Ханкельдиева Н.М.

РЦППКРНО при ФерГУ, Фергана, Узбекистан; nigora-hakimova@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$SL_c u = 0, \tag{1}$$

в смешанной области D, ограниченной отрезками прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно и характеристиками $AC : x+y = 0$, $A_0C : y-x = 1$ уравнения (1), пересекающимися в точке $C\left(-1/2; 1/2\right)$, т.е.

$$D = D_1 \cup AA_0 \cup D_2,\ D_1 = \left\{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y) : -\frac{1}{2} < x < 0,\ -x < y < 1 + x\right\},$$

$$S = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y},\ a^2 + b^2 \neq 0,$$

$$L_c u = \begin{cases} u_{xx} - u_y + c_1 u, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - c_2 u, & (x,y) \in D_2,\ c_i \neq 0,\ (i = 1,2),\ c_1 \neq c_2. \end{cases}$$

Для уравнения (1) в случае $1 < b/a < +\infty$ ставится:

Задача N. *Требуется определить функцию $u\left(x,y\right)$ со следующими свойствами:*
1) она непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;
2) является регулярным решением уравнения (1) в области D при $x \neq 0$;
3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1,y) = \phi(y),\ 0 \leqslant y \leqslant 1, u(x,0) = f_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u_y\left(x,0\right) = f_2(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ u\left|_{AC}\right. = \psi_1(y),\ 0 \leqslant y \leqslant 1/2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(y),\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2};$$

4) функция $u(x,y)$ и её производные по x до второго порядка удовлетворяют на отрезке AA_0 непрерывным условиям склеивания. Здесь n -внутренняя нормаль к AC, $\phi(y)$, $f_i(x)$, $\psi_j(y)$ $(i,j = 1,2)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие естественным условиям согласования, обеспечивающим достаточную гладкость решения поставленной задачи. Существование и единственность решения поставленной задачи проводится путём построения решения.

Эквивалентная электрическая схема механического осциллятора с соударениями

Нарожнов В.В.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; narojnov.victor@gmail.com

Представляет интерес разработать эквивалентную электрическую схему механического осциллятора с соударениями, которая основана на электромеханической аналогии. Эквивалентная схема должна содержать LC-колебательный контур и выходной резистор, который имитирует процесс затухания колебаний. На рис. 1 показана разработанная принципиальная электрическая схема, которая моделирует колебания осциллятора с соударениями. Для программы моделирования эквивалентной электрической схемы механического осциллятора с соударениями получено свидетельство о регистрации [1].

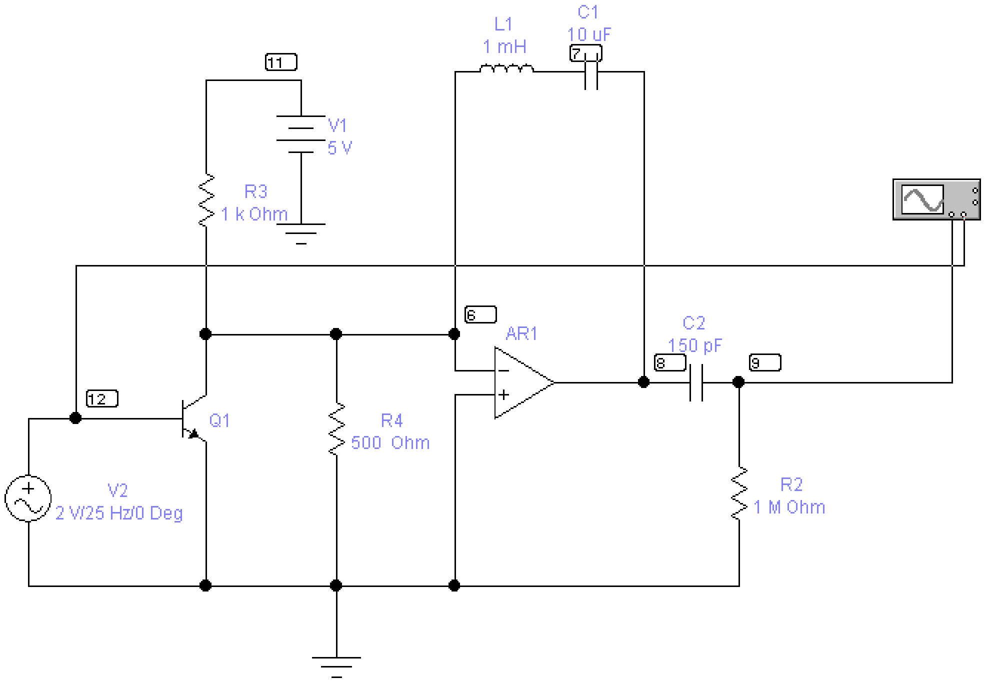


Рисунок 1. Эквивалентная электрическая схема осциллятора с соударениями.

Литература

1. *Нарожнов В.В.* Программа моделирования эквивалентной электрической схемы осциллятора с соударениями: свидетельство № 23689. Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование»; дата регистрации 03.07.2018 г.; опубликовано в Бюл. № 7 (110) 2018.

Применение дискретных геометрических инвариантов для анализа фрактальных множеств и реальных данных

Нигматуллин Р.Р., Воробьев А.С.

КНИТУ-КАИ, Казань, Россия; renigmat@gmail.com1; vartems14@gmail.com

Современные тенденции в прикладных науках сосредоточены на анализе сложных систем. Одним из основных препятствий, при таком анализе является определение «невидимой» границы, разделяющей хаотичное и детерминированное поведение этих систем. Для лучшего понимания их поведения необходимо уменьшить часть, связанную с ее хаотическим и непредсказуемым поведением. Опираясь на обобщение теоремы Пифагора, сделанное проф. И. Бабенко в своих книгах [1, 2], нами были сформулированы математические отношения между случайными последовательностями в 2D-пространстве: дискретные геометрические инварианты (eng.: DGI). Они позволяют выявить взаимные корреляции для произвольных случайных множеств и отразить это посредством сокращенного набора статистических параметров (x_c, y_c, $\xi/3Q_0$, B, I_4).

Нами представлен полный инвариант порядка 4 (упрощённая часть), показаны его возможности для сравнения модельных и экспериментальных данных. Предварительные результаты продемонстрированы в [3].

С помощью предлагаемого метода DGI также становится возможным найти взаимосвязь между искажениями формы спектра отражения пучка света в сложной жидкости (оливковоее масло) от темпратуры. Это открывает широкие практические приложения для количественного анализа скрытых различий между сложными жидкостями, а также между экспериментальными данными и факторами, влияющими на них без подробного знания их сложного химического состава.

Этим тезисом мы хотим привлечь внимание к новому методу исследователей, работающих в областях фрактальной геометрии и дробного исчисления. Полагаем, что предлагаемая методология может найти применение в различных технологических цепочках как производство различных напитков и сложных химических жидкостей и растворов.

Литература

1. *Babenko Yu.I.* Power Relations in a Circumference and a Sphere. Norell Press, Division of Norell, INC, USA, 1997.
2. *Бабенко Ю.И.* Степенные инварианты точечных множеств. СПб.: НПО «Профессионал», 2014. 160 с.
3. *Nigmatullin R.R., Budnikov H.C., Sidelnikov A.V., Maksyutova E.I.*// Research Journal of Mathematics and Computer Science (RJMCS), eSciPub LLC, Houston, TX USA. Website: http://escipub.com/.

Исследование точек покоя эредитарной динамической системы Ван-дер-Поля-Дуффинга

Новикова Е.Р.[1], **Паровик Р.И.**[2]

[1,2]*КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;*
[2]*ИКИР ДВО РАН, Паратунка, Россия;*
elizaveta_333@mail.ru, romanparovik@gmail.com.

Задача Коши для динамической системы Ван-дер-Поля-Дуффинга со степенной памятью, имеет вид [1, 2]:

$$\partial_{0t}^{\alpha}x(\tau) - (\lambda - x^2(t))\partial_{0t}^{\beta}x(\tau) + x(t) + \zeta x^3(t) = c\sin(\omega t), \qquad (1)$$

$$x\left(0\right) = x_0, \dot{x}\left(0\right) = x_1,$$

где

$$\partial_{0t}^{\alpha}x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \quad \partial_{0t}^{\beta}x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\beta}}, \qquad (2)$$

операторы дробных производных в смысле Герасимова-Капуто порядков $1 < \alpha < 2$, $0 < \beta < 1$, λ – управляющий параметр, ω – частота внешнего сигнала, c – его амплитуда, ζ – параметр фазовой нелинейности, $x(t)$ – функция решения, мембранный потенциал, $t \in [0, T]$ – время процесса, $T > 0$ – время моделирования, x_0, x_1 – заданные константы.

В данной работе с помощью численного моделирования построены осциллограммы и фазовые траектории с целью исследования предельных циклов нелинейной колебательной системы Ван-дер-Поля-Дуффинга со степенной памятью.

Литература

1. *Novikova E.R.* Van der Pol-Duffing oscillator with the effect of hereditary // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2017. Vol. 17, № 2. P. 65–75.

2. *Паровик Р.И.* Исследование устойчивости некоторых эредитарных динамических систем // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2018. Т. 22, № 2. С. 8–19.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ №МК-1152.2018 и НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» №АААА-А17-117031050058-9.

Математические модели одноосной наследственной упругости и аппроксимация экспериментальных данных ползучести образцов из поливинилхлоридного пластиката

Огородников Е.Н.[1], **Радченко В.В.**, **Унгарова Л.Г.**

[1] *СамГТУ, Самара, Россия; eugen.ogo@gmail.com*

На основе метода структурного моделирования и гипотезы Больцмана – Вольтерры о наследственно упругом деформируемом твердом теле рассмотрены линейные и нелинейные дробные аналоги классических реологических моделей: Ньютона (модель Скотт Блэра), Фойхта, Максвелла, Кельвина и Зенера. В предыдущих работах авторов данного сообщения была обоснована корректность классической задачи Коши для определяющих соотношений в дифференциальной форме с однородными данными относительно некоторых линейных комбинаций функций напряжения и деформации. Найдены явные решения задачи о ползучести при постоянном напряжении в стадиях нагружения и разгрузки. Разработан метод идентификации параметров моделей на основе экспериментальных данных.

В настоящей работе выделены некоторые классы нелинейных математических моделей, для которых решение задачи ползучести удается получить в явном виде в терминах известных специальных функций. Разработана методика идентификации параметров предложенных математических моделей на основе экспериментальных данных по одноосному растяжению образцов из поливинилхлоридного пластиката при различных постоянных уровнях нагрузки. При наличии явных решений задачи ползучести параметры математических моделей определяются из решения задачи аппроксимации экспериментальных значений деформации методом наименьших квадратов с последующим уточнением методом координатного спуска. Для нелинейных математических моделей вязкоупругого деформирования, не позволяющих найти решение задачи ползучести в явном виде, разработана методика определения параметров модели на основе метода координатного спуска с обращением на каждом шаге к численному решению определяющего интегрального уравнения.

Приводятся значения параметров для всех исследуемых моделей, анализируются погрешности отклонения расчетных данных от опытных значений. В качестве примера выполнен сравнительный анализ относительной погрешности аппроксимации экспериментальных кривых ползучести в рамках линейного, нелинейного интегрируемого и нелинейного неинтегрируемого дробных аналогов модели Кельвина.

Система линейных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой

Олими А.Г.

ХГУ, Худжанд, Таджикистан; Abdumanon1950@mail.ru

Пусть в системе

$$y_j'' + \frac{2p_j(x)}{x}y_j' + \sum_{k=1}^{2}\frac{r_{jk}(x)}{x^2}y_k = \frac{f_j(x)}{x^2}, j = 1,2, \quad x \in \Gamma = (0,a) \qquad (1)$$

$p_j(x) \in C^1(\overline{\Gamma})$, $r_{jk}(x)$, $f_j(x) \in C(\overline{\Gamma})$, $(j,k = 1,2)$, $p_1(0) > 1$, а функции $r_{12}(x)$, $r_{21}(x)$, $\Omega_{jj}(x) = r_{jj}(x) - xp_1'(x) + p_1(x) - p_1^2(x)$, $\Omega_{12} = 2[p_1(x) - p_2(x)]$ в точке $x = 0$ равняются нулю и при $x \to +0$, соответственно подчиняются асимптотическому равенству $\Omega_{jj}(x), r_{12}(x), r_{21}(x), (j = 1,2)$, $\Omega_{12}(x) = o(x^{\beta}), \beta > 1$.

Тогда общее решение системы уравнений (1) из класса $C^2(\Gamma)$ выражается формулой

$$y_j(x) = x^{-p_1(0)}\exp[-w_{p_1}(x)]\varphi_j(x), \quad j = 1,2, \qquad (2)$$

где $w_{p_1}(x) = \int\limits_0^x \frac{p_1(t)-p_1(0)}{t}dt$, а $\varphi_j(x)$ – есть решение системы интегральных уравнений Вольтерра

$$\varphi_j(x) + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_0^x K_{jk}(x,\xi)\varphi_k(\xi)d\xi = T^1[f_j(x), p_1(x)\, c_{j1}, c_{j0}], j = 1,2,$$

с ядрами, имеющими слабую особенность и непрерывной правой частью [1] ($c_{jk}, j = 1,2, k = 0,1$ – произвольные константы). Эти выводы сохраняют силу и в случае $p_1(0) \le 1$ при определенных условиях на функции $f_j(x)$, $j = 1,2$.

Поведение решений системы (1), выражаемые равенством (2) в окрестности сингулярной точки $x = 0$ зависит от знака числа $p_1(0)$ и они удовлетворяют характеристическим равенствам

$$[x^{p_1(0)}B_{p_1}^k y_j(x)]_{|x=+0} = c_{jk}, \ j = 1,2, \ k = 0,1,$$

где $B_{p_1}y = y' + \frac{p_1(x)}{x}y$, $B_{p_1}^0 y \equiv y$. Это дает возможность решить новую задачу типа Коши с условиями в точке $x = 0 : [x^{p_1(0)}B_{p_1}^k y_j(x)]_{|x=+0} = y_{jk}$, где $y_{jk}, j = 1,2, k = 0,1$ – заданные числа.

Литература

1. *Олимов А.Г., Раджабов Н.* Интегральные представления и задачи типа Коши для одной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой // ДАН Республики Таджикистан. 2016. Т. 59, № 3-4. С. 99–105.

Единственность решения краевой задачи для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками

Орипов Ш.А.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; oripovsh91@mail.ru

В полосе D, ограниченной линиями $y = 0$ и $y = h$ $(h = const)$, рассмотрим уравнение четвертого порядка с кратными характеристиками

$$L^2(u) = \begin{cases} L_1^2(u) \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u, & (x, y) \in D_1 = D \cap (x > 0), \\ L_2^2(u) \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u, & (x, y) \in D_2 = D \cap (x < 0). \end{cases} \tag{1}$$

Задача. Требуется найти решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное и ограниченное в области $D = D_1 \cup D_2$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u_y(x, 0) = \varphi_2(x), 0 \leqslant x < +\infty,$$

$$u(x, h) = \psi_1(x), u_y(x, h) = \psi_2(x), -\infty < x \leqslant 0$$

и условиям склеивания

$$u(+0, y) = u(-0, y), 0 < y < h,$$

$$u_x(+0, y) = u_x(-0, y), 0 < y < h,$$

$$u_{xx}(+0, y) = u_{xx}(-0, y), 0 < y < h,$$

$$u_{xxx}(+0, y) = u_{xxx}(-0, y), 0 < y < h,$$

где $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ $(k = 1, 2)$ - заданные непрерывные и ограниченные функции.

В работе доказана единственность решения поставленной задачи.

Моделирование процесса виброкипения с использованием различных подходов

Орлова Н.С.

ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия; norlova.umi.vnc@gmail.com

Для моделирования динамики двухфазных сред (в частности процесса виброкипения) используются два основных подхода: дискретный (траекторный) и континуальный. В рамках дискретного подхода движение частиц описывается как детерминированное движение их достаточно представительного дискретного набора. Дискретный подход непосредственным образом связан с реальными движениями отдельных частиц, поэтому его можно считать физически более естественным, чем континуальный подход. Но при этом требуются достаточно мощные вычислительные ресурсы, так как для имитации движения слоя частиц необходимо проведение большого числа расчетов движения отдельных частиц.

В моделях на основе континуального подхода движение слоя рассматривается как взаимопроникающее движение двух взаимодействующих континуумов: газа и частиц. Характеристики континуума, связанного с дисперсной фазой, трактуются как местные средние значения параметров частиц. Привлекательная сторона континуального подхода заключается в принципиальной возможности описания движения газовой и твердой фаз с общих позиций, а также использования сходной вычислительной процедуры при расчетах движения фаз, что не требует мощных вычислительных ресурсов и позволяет сократить время расчетов.

В работе [1] проведено исследование динамики виброкипения с использованием модели на основе континуального подхода, в работе [2] - с использованием модели на основе дискретного подхода. По результатам исследования можно заключить, что модели на основе континуального подхода целесообразно использовать для описания виброкипения относительно толстых слоев мелких частиц, а дискретный подход для виброкипения относительно тонких слоев крупных частиц.

Литература

1. *Каменецкий Е.С., Орлова Н.С., Тагиров А.М., Волик М.В.* Трехмерное моделирование виброкипящего слоя с использованием двухжидкостной модели гранулярного газа // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 6. С. 1480–1486.

2. *Каменецкий Е.С., Орлова Н.С., Волик М.В., Минасян Д.Г.* Тестирование модели виброкипящего слоя, использующей метод дискретного элемента // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2017. № 4-1. С. 18–23.

Численное исследование распространения газообразных загрязняющих веществ, выбрасываемых автотранспортом на одной из улиц городской застройки

Орлова Н.С., Волик М.В.

ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия volikmv@mail.ru

В настоящее время руководством страны и регионов уделяется пристальное внимание проблемам экологического характера. Теоретические подходы к изучению данной геоэкологической проблемы обоснованы во работах зарубежных и отечественных ученых. Для предварительной оценки картины течения воздуха и распространения загрязняющих веществ (ЗВ) в условиях городской застройки актуальным является использование современных методов и алгоритмов математического моделирования, ИТ и свободно распространяемого программного обеспечения. В данной работе вычислительные эксперименты проводились с помощью свободно распространяемого пакета OpenFoam и удаленного доступа к суперкомпьютеру Web-лаборатории UniHUB по программе «Университетский кластер» [1]. Вычислительные эксперименты проводились в двумерной постановке для интервала времени от 0 до 1500с. Использовалась равномерная расчетная сетка в прямоугольной расчетной области, имитирующая городскую застройку, расположенную на окраине города. Городская застройка представляет собой семь параллельных улиц, с домами высотой 15м по их сторонам и шириной улиц 15 м [1]. Результаты расчетов показали, что от картины течения воздуха зависит и картина распределения выбрасываемых ЗВ во всех улицах. В связи с этим проведено численное моделирование распределения газообразных ЗВ в пешеходной зоне, выбрасываемых источниками, расположенными в одной из семи улиц. Получено, что наибольшее количество ЗВ накапливается в первой и третьей улице, а также наблюдается их перенос в соседние улицы. Полученные результаты и дальнейшие исследования могут быть полезны с точки зрения необходимости регулирования потоков автотранспорта (например, ограничения количества автомобилей в некоторых улицах), а также позволит определить области для проведения измерений концентрации ЗВ.

Литература

1. *Волик М.В.* Исследование влияния длины улиц на течение воздуха в них // Труды Института системного программирования РАН. 2014. Т. 26, № 5. С. 201–212.

Краевая задача с условием Франкля для вырождающегося уравнения смешанного типа с нехарактеристической линией изменения типа

Очилова Н.К.

ТФИ, Ташкент, Узбекистан; nargiz.ochilova@gmail.com.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} y^{m_0}u_{xx}-x^{n_0}u_y, & x>0\,,\\ y^{m_1}u_{xx}-(-x)^{n_1}u_{yy}, & x<0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m_i, n_i = const > 0, (i=0,1)$, причем $m_0 > 0, n_1 > m_1 > 0$, $n_0 > \frac{m_0+1}{m_1+2}(n_1+2)-2$.

Пусть D — область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y=0$, $x=h_1$, $y=h_2$, $x=0$, соответственно, при $x>0, y>0$ и характеристиками $AC: \frac{1}{p_1}y^{p_1}-\frac{1}{q_1}(-x)^{q_1}=0$, $A_0C:\ \frac{1}{p_1}y^{p_1}+\frac{1}{q_1}(-x)^{q_1}=1$ уравнения (1), при $x<0,\ \ y>0$, где $2p_1=m_1+2$, $2q_0=n_0+2$, $2q_1=n_1+2$, $h_0={q_0}^{1/q_0}$, $h_1={p_1}^{1/p_1}$. Обозначим через D_0 и D_1 параболическую и гиперболическую части смешанной области D соответственно $I_0=\{(x,y):\ 0<x<h_0,\ y=0\}$, $I_1=\{(x,y):\ x=0,\ 0<y<h_1\}$, $I_{11}=\{(x,y):\ x=0, 0<y<(p_1k)^{1/p_1}\}$, $I_{12}=\{(x,y):\ x=0,\ (p_1k)^{1/p_1}<y<h_1\}$, $2p_0=m_0+2$, $\alpha_0=(n_0+1)/(n_1+2)$, $2\alpha_1=n_1/(n_1+2)$, $2\beta_1=m_1/(m_1+2)$, $0<\beta_1<\alpha_1<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\alpha_0<1$, а через C_1 и C_2, соответственно, точки пересечения характеристик AC и A_0C с характеристикой, исходящей из точки $E(0,\kappa_1)\in I_1$, где $0<\kappa_1<h_1$, $\kappa_1=(p_1\kappa)^{1/p_1}$, $0<\kappa<1$. Функция $\sigma(y)\in C^2\,[0,\ \kappa_1]$ – диффеоморфизм из множества точек отрезка $[0,\ \kappa_1]$ во множество точек отрезка $[\kappa_1,\ h_1]$, причем $\sigma'(y)<0$, $\sigma(0)=h_1$, $\sigma(\kappa_1)=\kappa_1$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $\sigma(y)=h_1-k_0\,y,\quad k_0=(h_1-\kappa_1)/\kappa_1$.

Задача TF. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами: 1) $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^{2,1}_{x,y}\,(D_0)\cap C^2\,(D_1)\,$; 2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях D_0 и D_1; 3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u|_{AB}=\varphi_0\,(x)\,,\quad 0\leqslant x\leqslant h_0,\quad u|_{BB_0}=\varphi_0\,(y)\,,\quad 0\leqslant y\leqslant h_1,$$

$$u|_{AC}=\varphi_1(y),\ 0\leqslant y\leqslant\left(\frac{p_1}{2}\right)^{1/p_1};\ \mu\,u(0,y)-u(0,\sigma(y))=\varphi_2(y),\ (0,y)\in\overline{I}_{11},$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi_2(h_0)=\varphi_0(0)$, $\mu\in(0,1)$. При определенных ограничениях на заданные функции доказана однозначная разрешимость задачи TF.

Математическое моделирование эредитарных колебательных процессов и их приложения

Паровик Р. И.

КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;
ИКИР ДВО РАН, Паратунка, Россия;
romanparovik@gmail.com.

Рассмотрим следующую задачу Коши для функции $x(t) \in C^2(0,T)$ [1]:

$$\partial_{0t}^{\beta} x\left(\tau\right) + \lambda\left(x\left(t\right), t\right) \partial_{0t}^{\gamma} x(\tau) = f\left(x\left(t\right), t\right), x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где $\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^t \dfrac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\beta-1}}$ и $\partial_{0t}^{\gamma} x(\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^t \dfrac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\gamma}}$ – производные дробных порядков $1 < \beta < 2$ и $0 < \gamma < 1$, $\lambda\left(x\left(t\right), t\right)$ – нелинейная функция,которая отвечает за трение, $f\left(x\left(t\right), t\right)$ – нелинейная функция, которая содержит внешнее воздействие, возвращающую силу и фактически определяет тип колебательной системы, x_0 и y_0 – заданные константы, начальные условия, T – время моделирования.

Задача Коши (1) описывает широкий класс эредитарных (фрактальных) колебательных систем и является объектом исследования. В работе [1] были рассмотрены вопросы существования и единственности решения. В работе [2] была предложена конечно-разностная схема и исследованы вопросы ее устойчивости и сходимости. Исследование хаотических режимов эредитарной колебательной системы (1) при различных видах функций $\lambda\left(x\left(t\right), t\right)$ и $f\left(x\left(t\right), t\right)$ имеет важное практическое значение [3].

Литература

1. *Паровик Р.И.* Существование и единственность решения задачи Коши для фрактального нелинейного уравнения осциллятора // Узбекский математический журнал. 2017. № 4. С. 110–118.

2. *Parovik R.I.* Mathematical Model of a Wide Class Memory Oscillators // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2018. Т. 11, № 2. С. 108–122.

3. *Паровик Р.И.*Хаотические режимы фрактального нелинейного осциллятора // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 2. С. 364–379.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-1152.2018 и НИР КамГУ имени Витуса Беринга "Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов"№ АААА-А17-117031050058-9.

О сильной суммируемости несобственных интегралов

Пачулиа Н.Л.

АГУ, Сухум, Абхазия; niaz-pachulia@rambler.ru

Интегралы
$U_\sigma(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\,t^{-2}(\cos\sigma t - \cos(\sigma+1)t)\,dt,\ \mathbb{R} = (-\infty,\infty),$
когда $f \in L(T)$ в периодическом случае представляют частные суммы ее ряда Фурье, а в непериодическом случае, и при $f \in L(\mathbb{R})$ представляют частичные интегралы интеграла Фурье. Интегралы такого вида сохраняют ряд свойств названных выше величин и в некоторых случаях, когда $f \notin L(\mathbb{R})$ ($L_p(E)$ означает множество суммируемых p-ой степени на множестве E функций).

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p(J)$, $p > 1$, $J = [a,b]$, $f(x)(1+|x|)^{-1} \in L(\mathbb{R})$, $x \in (a,b)$. *Если*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_0^h |f(x+t) - f(x)|^p dt = 0, \tag{1}$$

то

$$\lim_{\mu\to\infty} h^{(q)}_{\mu,B}(f,x) = 0, \tag{2}$$

где $q > 0$, $\mu \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$, $B \subset [\mu, 2\mu] \cap \mathbb{N}$, r *– мощность множества* B,

$$h^{(q)}_{\mu,B}(f,x) = \left\{\frac{1}{\mu}\int\limits_{E_B} |U_\sigma(f,x) - f(x)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\left(\ln\frac{\mu e}{r}\right)^{-1},$$

$$E_B = \bigcup_{k\in B}[k,k+1].$$

Пусть ϕ_1 – множество непрерывных возрастающих на $[0,\infty)$ функций φ таких, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$, $u > 0$; $\varphi(2u) \le a\varphi(u)$, $\forall u \in [0,\sigma_1]$; $\ln\varphi(u) = 0(u)$, $u \to \infty$ и $\varepsilon_\mu(f,x) = \sup\limits_{\mu_1\ge\mu} h^{(1)}_{\mu,B}(f,x)$.

Теорема 2. *Пусть условия теоремы 1 выполнены. Тогда* $\forall\varphi \in \phi_1$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_\mu^{2\mu}\varphi(|U_\sigma(f,x) - f(x)|)\,d\sigma \le A\varphi(\varepsilon_\mu(f,x)), A > 0.$$

Оптимизация конечного положения антропоморфного манипулятора по критерию энергоэффективности

Петренко В.И., Тебуева Ф.Б., Гурчинский М.М., Рябцев С.С.

СКФУ, Ставрополь, Россия; vip.petrenko@gmail.com; fariza.teb@gmail.com; gurcmikhail@yandex.ru; nalfartorn@yandex.ru

Одной из важнейших задач автоматического управления робототехническими системами является решение обратной задачи кинематики. Для антропоморфых манипуляторов [1] с избыточной подвижностью, обратная задача кинематики представляет собой недоопределенную сильно нелинейную систему уравнений, имеющую в общем случае бесконечное множество решений. Выбор одного из решений представляет собой оптимизационную задачу, целевая функция которой может быть негладкой и иметь множество локальных экстремумов [2].

Для решения данной задачи предлагается разбиение пространства допустимых значений переменных на подпространства, в каждом из которых целевая функция является гладкой. Таким образом исходная сложная оптимизационная задача сводится к ряду более простых частных оптимизационных задач, описываемых сильно нелинейными огранчениями-равенствами и линейными ограничениями-неравенствами. Частные оптимизационные задачи могут быть решены с помощью метода обобщенного приведенного градиента. Доказывается, что с некоторыми изменениями данный метод позволяет найти глобальный экстремум на каждом из рассматриваемых подпространств.

Литература

1. *Богданов А.А., Кутлубаев И.М., Пермяков А.Ф., Попова Е.В., Сычков В.Б.* Основы построения специальных роботов для работы на космических аппаратах // Робототехника и искусственный интеллект, Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2016. С. 48–53.

2. *Антонов В.О., Гурчинский М.М., Петренко В.И., Тебуева Ф.Б.* Метод планирование оптимальной траектории движения трехзвенного манипулятора в объемном пространстве с препятствием // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018. Т. 45, № 1. С. 98–112.

Исследование выполнено в рамках проекта «Разработка программно-аппаратного комплекса системы управления на основе решения обратной задачи динамики и кинематики» в рамках ФЦПИР 2014-2020 (УИ RFMEFI57517X0166) при финансовой поддержке Минобрнауки России.

Актуальные проблемы развития методов адаптивного интеллектуального управления робототехническими системами

Петренко В.И., Тебуева Ф.Б., Рябцев С.С., Павлов А.С.

СКФУ, Ставрополь, Россия; vip.petrenko@gmail.com; fariza.teb@gmail.com; Andrew.pavlov.2015@yandex.ru; nalfartorn@yandex.ru

Технологическое развитие конструкции роботов увеличивает их производительность и расширяет спектр их применения, но приводит к необходимости применения более сложных подходов в управлении [1]. Большинство используемых методов управления базируется на априорно известной точной математической модели, но на практике роботы имеют отклонения параметров от номинальных, неучтенные внешние и внутренние возмущения, а также неучтенную динамику. В связи с этим зачастую предпочтение отдается робастным и адаптивным методам управления [2]. Задачу адаптивного интеллектуального управления можно сформулировать как задачу нахождения управляющего вектора, минимизирующего отклонение положения робота в фазовом пространстве относительно заданной траектории, другими словами – нахождение минимума штрафной функции. Для большинства реальных задач штрафные функции являются нелинейными, невыпуклыми, плохо обусловленными и высокой размерности, что делает применение методов, основанных на производных, невозможным, либо неэффективным, особенно в случае отсутствия динамической модели робота или при наличии дополнительных ограничений на решение.

Литература

1. *Ризванов Д.А., Юсупова Н.И.* Интеллектуальная поддержка принятия решений при управлении ресурсами сложных систем на основе многоагентного подхода. Онтология проектирования. 2015. Т. 5, № 3 (17). С. 297–312.
2. *Павлов А.С., Рябцев С.С., Ахмедов С.Р., Трофимюк И.О.* Разработка алгоритма децентрализованного управления группой беспилотных автомобилей на основе метода роя частиц. Всероссийская научная конференция «Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений», Уфа-Ставрополь, 2018. С. 168–173.

Исследование выполнено в рамках проекта «Разработка программно-аппаратного комплекса системы управления на основе решения обратной задачи динамики и кинематики» ФЦПИР 2014-2020 (УИ RFMEFI57517X0166) при финансовой поддержке Минобрнауки России.

Актуальные проблемы развития и применения модульной робототехники

Петренко В.И., Тебуева Ф.Б., Павлов А.С., Рябцев С.С.

СКФУ, Ставрополь, Россия; vip.petrenko@gmail.com; fariza.teb@gmail.com; shutova.job@bk.ru

Актуальность проведения исследований по развития и применению модульной робототехники связана с недостаточной проработанностью проблем эксплуатации робототехнических систем в экстремальных неопределенных условиях, например, в поисково-спасательных операциях [1]. Основным недостатком существующих решений является трудоемкость перемещения по поверхностям с различным рельефом, при преодолении препятствий окружающей среды, при работе в условиях внешних возмущающих воздействий [2]. Необходима разработка нового класса многозвенных устройств, способных функционировать в неопределенных условиях и обладающих адаптивной структурой, автоматически перестраиваемой в зависимости от специфики решаемой задачи. Интеллектуальная система управления таких объектов должна иметь распределенную структуру и обеспечивать возможность автономной работы в условиях неопределенности. Мехатронно-модульная (ММ) архитектура робота позволит изменять конфигурацию ММ робототехнического комплекса при выполнении целевой функции, что обеспечит необходимую проходимость робота. Вывод: расширение функциональных возможностей практического применения модульной робототехники за счет развития реконфигурируемых ММ робототехнических комплексов с адаптивной кинематической структурой является актуальной задачей.

Литература

1. *Тебуева Ф.Б., Сычков В.Б., Огур М.Г.* Общая схема системы поддержки принятия решений для оптимизации управления поведением мобильных манипуляционных роботов // Современная наука и инновации. 2016. № 1 (13). С. 22–29.
2. *Сычков В.Б., Богданов А.А., Кутлубаев И.М., Пермяков А.Ф., Попова Е.В.* Комбинированные системы управления робототехническими комплексами на основе элементов сенсорики с обратными связями для обеспечения возможности замены человека при работе в условиях чрезвычайной ситуации // XX Международная научно-практическая конференция по проблемам защиты населения и территорий от чрезвычайных ситуаций. 2015. С. 585–587.

Исследование выполнено в рамках проекта «Разработка программно-аппаратного комплекса системы управления на основе решения обратной задачи динамики и кинематики» ФЦПИР 2014-2020 (УИ RFMEFI57517X0166) при финансовой поддержке Минобрнауки России.

Решение задачи группового управления беспилотными летательными аппаратами в стационарных организованных средах

Петренко В.И., Тебуева Ф.Б., Шутова Ю.А.

СКФУ, Ставрополь, Россия; vip.petrenko@gmail.com; fariza.teb@gmail.com; shutova.job@bk.ru

Эффективность малых мультикоптерных систем значительно возрастает при их групповом применении, поэтому большую актуальность приобретает проблема группового управления беспилотными летательными аппаратами [1]. Можно выделить два основных направления по решению проблем группового управления аппаратами мультикоптерного типа – авиационный и робототехнический. В рамках авиационного больше внимания уделяется тактико-техническому обоснованию видов групп, аэродинамике и координации движения летательных аппаратов. В рамках робототехнического направления мультикоптеры рассматриваются как летающие работы с «шестью степенями свободы», способные доставлять полезную нагрузку до удаленного или опасного объекта и выполнять различные целевые задачи, такие как наблюдение, разведка, поисково-спасательные операции и пр. Это более общий подход, при котором аэродинамические свойства летательных аппаратов в основном переводятся в разряд ограничений и допущений, а проблемы управления рассматриваются как проблемы группового управления мобильными работами [2]. Процесс управления предлагается рассматривать с позиций теории управления группой роботов. Можно выделить три класса задач группового управления летательным аппаратом для различных условий – задача группового управления с применением в стационарных организованных средах, задача группового управления в динамических недетерминированных ситуациях и задача группового управления в условиях противодействия среды. В работе рассмотрено решение первой задачи.

Литература

1. *Петренко В.И., Шутова Ю.А.* Анализ и перспективы использования роевого управления при решении практических задач БЛА // Наука на современном этапе: вопросы, достижения, инновации. Томск. 2017.
2. *Юсупова Н.И., Валеева А.Ф., Рассадникова Е.Ю., Латыпов И.М., Кощеев И.С.* Многокритериальная задача доставки грузов различным потребителям // Логистика и УЦП. 2011. № 5(46). С. 60–81.

Исследование выполнено в рамках проекта «Разработка программно-аппаратного комплекса системы управления на основе решения обратной задачи динамики и кинематики» ФЦПИР 2014-2020 (УИ RFMEFI57517X0166) при финансовой поддержке Минобрнауки России.

Современные фрактальные радиосистемы и технологии (40 лет научных разработок): основы фрактально-скейлинговой или масштабно-инвариантной радиолокации

Потапов А.А.

ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия; potapov@cplire.ru

В докладе представлены избранные фундаментальные теоретические и экспериментальные результаты, полученные за 40 лет работы (1979-2019) автора и его учеников в ИРЭ РАН по планомерному внедрению фракталов, детерминированного хаоса, операторов дробного интегро-дифференцирования и эффектов скейлинга в радиофизику и широкий спектр радиотехнических наук. Исследование проводится в рамках научного направления «Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника: проектирование фрактальных радиосистем», предложенного и разрабатываемого автором. Ряд крупных наших научных результатов вошли в пять Отчетных докладов Президиума РАН и в Доклад Правительству РФ об итогах реализации в 2011 году Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2008-2012 гг. Введение в научный обиход радиолокации вышеупомянутых понятий позволило автору впервые в мире предложить, а затем и применить новые размерностные и топологические (а не энергетические!) признаки или инварианты, которые объединены под обобщенным понятием «топология выборки» $\sim$ «фрактальная сигнатура». Фрактальная радиолокация [1-7] базируется на трех постулатах: 1-интеллектуальная обработка сигнала / изображения, основанная на теории дробной меры и скейлинговых эффектов, для расчета поля фрактальных размерностей D; 2-выборка принимаемого сигнала в шумах относится к классу устойчивых негауссовых распределений вероятностей D сигнала; 3-максимум топологии при минимуме энергии входного случайного сигнала. Данные постулаты открывают новые возможности для обеспечения устойчивой работы при малых отношениях сигнал/фон или увеличения дальности действия радаров. Таким образом, открыт, предложен и обоснован новый вид и новый метод современной радиолокации - фрактальная радиолокация. Это влечет за собой коренные изменения в самой структуре теоретической радиолокации, а также в ее математическом аппарате. Применение фрактальных систем и узлов является принципиально новым решением, существенно меняющим принципы построения радиотехнических систем, устройств и датчиков. Фрактальные методы обработки дают повышение качества и детализации объектов и целей примерно в несколько раз. Приоритет в этой области закреплен нашими 980 научными работами и 35 отечественными и зарубежными монографиями и отдельными главами в них на русском и английском языках.

Литература

1. *Потапов А.А.* У истоков фрактально-скейлинговой или масштабно-инвариантной радиолокации (1980 — 2015) // Радиотехника. 2015. № 8. С. 95–108.

2. *Потапов А.А.* Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (110 лет со дня рождения академика В.А. Котельникова и 65 лет ИРЭ РАН). Москва. 2018. С. 99–104; С. 155–159.

3. *Potapov A.A.* Chaos Theory, Fractals and Scaling in the Radar: A Look from 2015. Глава 12 в книге: The Foundations of Chaos Revisited: From Poincar? to Recent Advancements / Ed. C. Skiadas. Switzerland, Basel: Springer, 2016. P. 195–218.

4. *Потапов А.А.* Фрактально-скейлинговая или масштабно-инвариантная радиолокация: открытие, обоснование и пути развития // Сб. науч. ст. по материалам II Всероссийской НПК «Авионика», Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2017. С. 143–152.

5. *Потапов А.А.* Фрактальная радиоэлектроника: состояние и тенденции развития // Сб. науч. ст. по материалам III Всероссийской науч.-практ. конф. «Авионика», Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2018. С. 267–272.

6. *Potapov A.A.* Fractal and topological sustainable methods of overcoming expected uncertainty in the radiolocation of low-contrast targets and in the processing of weak multi-dimensional signals on the background of high-intensity noise: A new direction in the statistical decision theory // IOP Conf. Ser.: Journal of Physics. 2017. Vol. 918, № 012015. https://doi.org/10.1088/1742-6596/918/1/012015. 19 p.

7. *Потапов А.А.* Текстурные и фрактально-скейлинговые методы обнаружения, обработки и распознавания слабых радиолокационных сигналов и малоконтрастных изображений на фоне интенсивных помех // Вестник воздушно-космической обороны (НПО «Алмаз). 2018. Т. 18, № 2. С. 15–26.

Фракталы, турбулентность и волны в неупорядоченных больших фрактальных системах

Потапов А.А.

ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия; potapov@cplire.ru

При распространении волн в атмосфере необходимо принимать во внимание турбулентность и ее многомасштабность [1]. В современной теории турбулентности полагается, что вихревые слои свертываются в сложные фрактальные структуры [2-5]. Автором был проведен ряд экспериментов по экспресс-анализу фрактальных флуктуаций сверхширокополосных и простых сигналов на ММВ и СМВ в турбулентной тропосфере. Средняя скорость ветра при проведении натурных экспериментов равнялась $3 \pm 5/c$. Обработка показала, что в летнее время (температура воздуха $20^{\circ} - 25^{\circ}$) на приземной трассе протяженностью 150 м на высоте 10 м и длине волны излучения 8,6 мм для амплитудных флуктуаций фрактальная размерность составила $D \approx 1,63$. В этом случае параметр Херста равен $H \approx 0,37$. В случае радиолокационного зондирования фрактальная размерность повышалась до $D \approx 1,72 (H \approx 0,28)$. При моросящем дожде фрактальная размерность амплитудных флуктуаций умень-шалась до значений порядка $D \approx 1,59 (H \approx 0,41)$. Величина $< 0,02$. В экспериментах никогда не выявлялись процессы с $D = 1,5$. Таким образом, в процессе натурных экспериментов наблюдались антиперсистентные процессы. В работах [5-7] рассмотрены вопросы общей теории многократного рассеяния электромагнитных волн во фрактальных случайно-неоднородных средах на основе модификаций теории Фолди – Тверского. Представлены модификации интегрального уравнения Фолди – Тверского для когерентного поля и интегрального уравнения Тверского для второго момента поля. Изложенный в работе модифицированный метод Фолди – Тверского для многократного рассеяния волн во фрактальных дискретных случайно-неоднородных средах имеет весьма общий характер и позволяет единым образом рассматривать большое число волновых явлений, порождаемых теорией фракталов и практикой их применения. Построенная модификация теории многократного рассеяния позволила включить в рассмотрение значения фрактальной размерности D и фрактальной сигнатуры $D(r,t)$ неупорядоченной большой системы. Аналитически рассмотрено уравнение радиолокации для сугубо фрактальной среды. Показано, что фрактальная сигнатура может быть использована для исследования зависимости объемного рассеяния от расстояния. Аналогично можно обосновать решение для анизотропных неупорядоченных больших фрактальных систем: каскады фракталов, вложенные друг в друга, графы из цепочек фракталов, перколяционные системы, космический мусор, скопления («рой») беспилотников (БПЛА) или малоразмерных космических аппаратов (МКА), в том числе мини- и микро- классов, динамические синтезированные космические антенные группировки (кластерные апертуры), малозаметные высотные псевдоспутники (HAPS), пространственно-распределенные космические системы (кластеры) из небольших МКА для решения задач мониторинга чрезвычайных ситуаций и т.д.

Литература

1. *Обухов А.М.* Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 414 с.

2. *Фриш У.* Наследие А.Н. Колмогорова. М.: ФАЗИС, 1998. 346 с.

3. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. М.: Логос, 2002. 664 с.; 2-е изд., перераб. и доп. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.

4. *Голицын Г.С.* Статистика и динамика природных процессов и явлений: Методы, инструментарий, результаты. М.: URSS, 2013. 400 с.

5. *Potapov A.* Waves in Large Disordered Anisotropic Fractal Systems, in Clusters of Small-Size Space Vehicles, in Synthesized Space Antenna Aggregations - Cluster Apertures, and in Radar // Book of Abstracts Int. Conf. «Shilnikov WorkShop 2017». Nizhni Novgorod: State University. 2017. P. 55–56.

6. *Потапов А.А.* Турбулентность, фракталы и волны // Сб. тез. докл. Междунар. конф. «Турбулентность, динамика атмосферы и климата», посв. столетию со дня рождения академика А.М. Обухова (Москва, 16 – 18 мая 2018 г.). М.: Физматкнига, 2018. С. 211.

7. *Потапов А.А.* Волны в неупорядоченных больших фрактальных системах: радиолокация, наносистемы, кластеры беспилотных летательных аппаратов и малоразмерных космических аппаратов // Радиотехника и электроника. 2018. Т. 63, № 9. С. 915-934.

Задачи оптимального управления и обратные задачи для уравнений первого порядка в гильбертовых пространствах

Прилепко А.И.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; prilepko.ai@yandex.ru

Пусть дано $T > 0$, $J = (0, T)$ гильбертовы пространства V, E и их сопряжённые V^*, E^*. Оператор $\mathcal{A}$ является генератором C_0 группы, пространства $U = L^2(J, V)$, $U^* = L^2(J, V^*)$; при каждом $t \in (0, T)$ даны операторы $B(t)$ и $B^*(t)$ так, что $B^*(t)e^{\mathcal{A}^*(T-t)}e^* = u^*(t), \quad u^* \in U^*, e^* \in E^*$.

Задача управления. *Для данного* $e \in E$ найти пару $u(t)$ и $y(t)$ из условий

$$\dot{y}(t) = \mathcal{A}y(t) + B(t)u(t), \quad t \in J; \qquad y(0) = 0, \quad y(T) = e. \tag{1}$$

В операторном виде задача (1) запишется так: при данном $e \in E$ найти $u \in U$ из уравнения

$$\mathcal{A}_T u = e, \qquad \mathcal{A}_T u \equiv \int_0^T e^{\mathcal{A}(T-t)} B(t) u(t)\, dt. \tag{2}$$

Решение u_e задачи (2) называем точным управлением (или *управлением*), а минимальное по норме решение называем *оптимальным управлением* $u_e^{opt} \equiv u_e^o$.

Сопряжённая к (2) называется *задачей наблюдения*

$$\mathcal{A}_T^* e^* = u^* \Leftrightarrow B^*(t) e^{\mathcal{A}^*(T-t)} e^* = u^*(t), \quad u^* \in U^*. \tag{3}$$

Задача (3) называется непрерывно наблюдаемой, если существует $\mu > 0$ такое, что $\|\mathcal{A}_T^* e^*\|_{U^*} \geqslant \mu \|e^*\|_{E^*}$ для всех $e^* \in E^*$.

Рассмотрим *обратную задачу*, состоящую в нахождении $e^* \in E^*$ и $w(t)$ из условий

$$\dot{w}(t) = \mathcal{A}w(t) + G(t)e^*, \quad t \in J, \qquad w(0) = 0, \quad w(T) = e, \tag{4}$$

где оператор $G(t) = B(t)B^*(t)e^{\mathcal{A}^*(T-t)}$ задан.

Теорема. *Непрерывная наблюдаемость задачи (3) $\Leftrightarrow$ существованию единственного решения обратной задачи (4) $\Leftrightarrow$ существованию единственного оптимального управления u_e^o задачи (2) для которого выполнено неравенство $\|u_e^o\|_U \leqslant 1/\mu\, \|e\|_E$.*

Литература

1. *Прилепко А. И.* Метод Банаха и метод монотонных отображений нахождения оптимальных управлений в рефлексивных (B)-пространствах // Доклады АН. 2017. Т. 476, № 4. С. 377—380.

2. *Lions J.-L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system // SIAM Rev. 1988. Vol. 30, № 1. P. 1–68.

Функции Грина краевых задач для дробного диффузионно-волнового уравнения

Псху А.В.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; pskhu@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} - \Delta_x\right) u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma}$ – дробная производная порядка σ по переменной y [1]; $\sigma \in (0,2)$; Δ_x – оператор Лапласа по переменной x, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S \subset \mathbb{R}^n$.

В докладе обсуждаются вопросы построения функций Грина краевых задач для уравнения (1) в цилиндрической области $\Omega = S \times (0,T)$.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-51-45005.

Нелокальные задачи для гиперболических уравнений и некоторые методы их исследования

Пулькина Л.С.

Самарский университет, Самара, Россия; louise@samdiff.ru

Задачи с нелокальными условиями образуют сравнительно новый раздел в теории уравнений с частными производными и интенсивно изучаются в настоящее время. Уже первые исследования нелокальных задач показали необходимость разработки методов обоснования их разрешимости, эффективные именно для нелокальных задач. К настоящему времени некоторые методы разработаны и стало понятно, что выбор нужного метода зависит от вида нелокальных условий.

В докладе речь пойдет именно о том, как сделать правильный выбор. В качестве иллюстраций будут рассмотрены задачи с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений.

Задача Коши для дробного телеграфного уравнения

Пшибихова Р.А.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; pshibihova@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} D_{0y}^{\beta} u(x,y) + \lambda u(x,y) = f(x,y), \qquad (1)$$

где $D_{0x}^{\alpha}, D_{0y}^{\beta}$ – операторы дробного дифференцирования Римана – Лиувилля [1], $\alpha, \beta \in (0,1), \lambda = const$.

Пусть $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \xi(y),\ 0 < y < 1\}$, где $\xi : [0,1] \to [0,1],\ \xi(0) = 1,\ \xi(1) = 0,\ \xi(y)$ не возрастает, $\sigma = \{(x,y) : x = \xi(t), 0 < y < 1\}$.

В работе исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,y)|_{\sigma} = \tau(t),$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{\sigma} = \nu(t),$$

где $\nu(x), \tau(x)$ – заданные непрерывные функции.

Ранее, для уравнения (1) был исследован аналог задачи Гурса в работе [1] и задача Дарбу в работе [2].

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Пшибихова Р.А.* Задача Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 839–843.

3. *Пшибихова Р.А.* Задача Дарбу для дробного телеграфного уравнения // Вестник КРАУНЦ Физ.- мат. науки. 2018. Т. 23, № 3. С. 91–97.

К теории одного класса трехмерного суперсингулярного интегрального уравнения по цилиндрической области

Раджабов Н.Р.

Научно-исследовательский институт Таджикского национального университета, Душанбе, Таджикистан; nusrat38@mail.ru

Через Ω обозначим цилиндрическую область $\Omega = \{(t,z) : a < t < b, |z| < R\}$. Нижнее основание этого цилиндра обозначим через $D = \{t = a, |z| < R\}$ а боковую поверхность через $S = \{a < t < b\ ,\ |z| = R\}$, $z = x + iy$. В области Ω рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t,z) + \int_a^t \frac{K_1(t,\tau)}{(\tau - a)^\alpha}\varphi(\tau,z)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{exp\,[i\theta]\,K_2(r,\rho)}{(R-\rho)(s-z)}\ \varphi(t,s)\,ds +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_a^t \frac{d\tau}{(\tau-a)^\alpha}\iint_D \frac{exp\,[i\theta]\,K_3(r,\rho;t,\tau)}{(R-\rho)(s-z)}\ \varphi(\tau,s)\,ds = f(x,z)\,, \qquad (1)$$

где $\theta = \arg s$, $s = \xi + i\eta$, $ds = \xi\,d\eta$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $K_1(t,\tau) = p + q\,(\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(\tau))$, $K_2(r,\rho) = \sum_{j=1}^m B_j ln^{j-1}\left(\frac{R-r}{R-\rho}\right)$, $K_3(r,\rho;t,\tau) = K_1(t,\tau)\,.K_2(r,\rho)$, $f(x,z)$ – заданная функция, $\varphi(t,z)$ – искомая функция,

$$\omega_a^\alpha(t) = \left[(\alpha-1)(t-a)^{\alpha-1}\right]^{-1},\ \alpha = const > 1.$$

В работе в зависимости от корней характеристических уравнений

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \qquad (2)$$

и

$$\mu^m + \sum_{j=1}^m B_j\,(j-1)!\mu^{m-j} = 0, \qquad (3)$$

когда корни уравнения (3) являются вещественными и разными, корни уравнения (2) являются вещественными разными, вещественными и равными и комплексно-сопряженными, получено представление многообразие решений интегрального уравнения (1) в зависимости от знаков $\mu_j\,(1 \le j \le m)$ и $\lambda_j\,(j = 1, 2)$.

Литература

1. *Rajabov N.* Volterra type integral equation with boundary and interiorfixed singularity and super-singularity kernels and their applications // LAPLAMBERT Academic Publishing, Germany. 2011. 282 p.

О малых колебаниях питающей системы вулкана

Радионов А.А.

ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия; aar200772@mail.ru

В качестве модельного представления о питающей системе вулкана принимается цилиндрическая область с вертикально расположенной осью, расположенной от поверхности до глубоких родительских очагов вулкана [1]. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z), ось z которой совместим с осью цилиндра, а точку $r = 0$ с осью канала радиуса R, время обозначим t. Магматический расплав имеет реологические свойства максвелловской жидкости [2]. Охарактеризуем расплав давлением p, плотностью ρ, вязкостью μ, модулем упругости E, временем релаксации $\lambda = \mu/E$, скоростью $\vec{v} = (u, v, w)$, где w – компонента скорости вдоль оси цилиндра. Нижними индексами (r, z, t) обозначим взятие частной производной по соответствующей координате и времени.

Комбинируя реологическое уравнение жидкости Максвелла и уравнение для вертикальной компоненты скорости течения можно получить уравнение вида:

$$w_{tt} + \frac{1}{\lambda} w_t + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{p_z}{\rho_0} + g\right) = \frac{\mu}{\lambda \rho_0}\left(w_{rr} + \frac{w_r}{r}\right). \tag{1}$$

Начальными условиями примем: $w(r, t = 0) = \phi(r)$ и $w_t(r, t = 0) = \psi(r)$, граничными условиями является равенство $w(r = R, t) = 0$ и требование ограниченности решения на оси. Выражение $(p_z + \rho_0 g)$ является перепадом давления, под действием которого расплав поднимается к поверхности, и может быть оценено по расходу массы извергающегося вулкана.

Одно из аналитических решений уравнения (1) показывает, что течение магматического расплава по каналу к поверхности является суммой течения Пуазейля и периодических изменений осевой скорости течения во времени, медленно затухающих при больших λ. Периодические колебания осевой скорости приводят к периодическим вертикальным смещениям и могут быть измерены на дневной поверхности склонов вулкана. Вблизи извергающегося вулкана наблюдается такое явление, как «вулканическая дрожь» – длительные во времени колебания земной поверхности.

Литература

1. *Gonnermann H.M., Manga M.* The fluid mechanics inside a volcano // Annu. Rev. Fluid Mech. 2007. Vol. 39. P. 321-356.

2. *Жариков В.А.* Основы физической геохимии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. 654 с.

Краевые задачи для уравнений с оператором Коши – Римана с сильными особенностями в младших коэффициентах

Расулов А.Б., Федоров Ю.С., Сергеева А.М.

ВМ НИУ МЭИ, Москва, Россия; rasulov abdu@rambler.ru; FedorovYS@mpei.ru; hmelevs@ya.ru_

Пусть область G содержит точку $z = 0$ и окружность $L = \{z : |z| = R\}$ и ограничена простым ляпуновским контуром ∂G, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $G_0 = G \setminus \{0 \bigcup L\}$ и $G_\varepsilon = G \setminus \{g_{0\varepsilon} \bigcup g_{1\varepsilon}\}$ с малым $\varepsilon > 0$, где $g_{0\varepsilon} = \{z : |z| < \varepsilon\}$ и $g_{1\varepsilon} = \{z : R - \varepsilon < |z| < R + \varepsilon\}$. В области G_0 рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - p(z)\frac{a(z)}{||z| - R|^n}u + \frac{b(z)}{|z|^m}\overline{u} = f(z). \tag{1}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $u(z) = u_1(x, y) + iu_2(x, y)$. Функция $p(z)$–нормирующий множитель $p(z) = p_0(z)|p_0(z)|^{-1}$, $p_0(z) = z(|z| - R)$. Коэффициенты $a, b \in C(\overline{G})$ и правой частью $f \in L^p(G)$, $p > 2$, где $n > 1, 0 < m < 1$.

В настоящей работе для обобщенной системы типа Коши – Римана с комплексным сопряжением (1), коэффициенты которой допускают сильную особенность в окружности $L = \{z : |z| = R\}$ и слабую особенность в точке $z = 0$, найдено интегральное представление общего решения и исследовано краевые задачи типа Римана – Гильберта.

Экспериментальная проверка математической модели дробного осциллятора

Рехвиашвили С.Ш.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; rsergo@mail.ru

В работе проведено экспериментальное исследование модели дробного осциллятора, которая представлена задачей Коши:

$$\frac{d^{1+\alpha}u}{dt^{1+\alpha}} + \omega_0^{1+\alpha}u = 0, \quad \alpha \in (0,1], \tag{1}$$
$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Решение задачи (1) имеет вид

$$u(t) = E_{1+\alpha}\left[-(\omega_0 t^{1+\alpha})\right], \tag{2}$$

где $E_\rho(z)$ – функция Миттаг-Леффлера. Решение (2) сравнивалось с электрическим сигналом быстро затухающих колебаний заделанной с одной стороны балки из пенополипропилена (см. рисунок 1). В целях сравнения определялись оптимальные численные значения параметров α и ω_0.

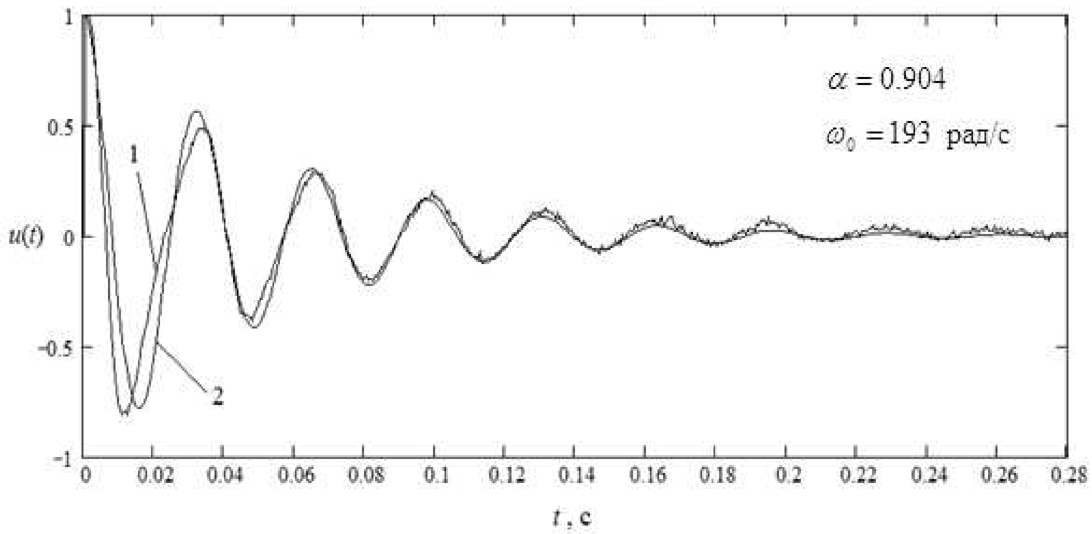


Рисунок 1. Осциллограмма сигнала колебаний:
1 – эксперимент; 2 – расчет по формуле (2).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-51-45005.

Краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с дробной производной

Рузиев М.Х.

ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; mruziev@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\gamma}_{0+,y}u = 0, \quad (y > 0), \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{(-y)^{1-\frac{m}{2}}}u_x + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0, \ y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\gamma}_{0+,y}$ – частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка γ $(0 < \gamma < 1)$ от функции $u(x,y)$[1, 2], $m > 0$, $|\alpha_0| < \frac{m+2}{2}$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$, в области D, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости $D^+ = \{(x,y) : -\infty < x < +\infty, y > 0\}$ и области D^-, лежащей в нижней полуплоскости $(y < 0)$ и ограниченной характеристиками $OC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, $BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ и отрезком [0,1] прямой $y = 0$.

Задача. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющее условиям: $u(x,y)$ стремится к нулю при $x^2+y^2 \to \infty$, $y^{1-\gamma}u|_{y=0} = 0$, $-\infty < x \le 0$, $1 \le x < \infty$,*

$$x^{\alpha}D^{1-\beta}_{0,x}u[\theta_0(x)] + \rho(x)(1-x)^{\beta}D^{1-\alpha}_{x,1}u[\theta_k(x)] =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\beta)}{\pi}(sin(\beta\pi)D^{1-\alpha-\beta}_{0,x}u(x,0) - sin(\alpha\pi)D^{1-\alpha-\beta}_{x,1}u(x,0)) + f(x),$$

$x \in [0,1]$, а также условиям сопряжения $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\gamma}u(x,y) = \lim\limits_{y\to-0} u(x,y)$, $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\gamma}\left(y^{1-\gamma}u(x,y)\right)_y = \lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}u_y$, $x \in (0,1)$, где $f(x)$, $\rho(x)$ – заданные функции, $\theta_0(x) = \frac{x_0}{2} - i(\frac{m+2}{4}x_0)^{\frac{2}{m+2}}$ – точка пересечения характеристики OC с характеристикой, исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in (0,1)$, а $\theta_k(x) = \frac{x_0+k}{1+k} - i(\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(1+k)})^{\frac{2}{m+2}}$ – точка пересечения характеристики BC с кривой $x - \frac{2k}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_0$, $k = const > 1$, где $\beta = \frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$, $\alpha = \frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}$.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Репин О.А.* Краевая задача для дифференциального уравнения с частной дробной производной Римана-Лиувилля // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7, № 3. С. 70–75.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № ОТ-Ф4-88.

Решение систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для некоторых гипергеометрических функций от четырех переменных

Рыскан А.Р.

КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан; ryskan.a727@gmail.com

Работа посвящена изучению гипергеометрической функции $F_9^{(4)}$. Рассматривается одна из 83 гипергеометрических функций четырех переменных, введенных Sharma и Parihar [1]:

$$F_9^{(4)}(a_1, a_2, b; c_1, c_2, c_3; x, y, z, t) = \\ = \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p}(a_2)_q(b)_{m+n+p+q}}{(c_1)_{m+q}(c_2)_n(c_3)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}.$$

Было показано, что введенная гипергеометрическая функция удовлетворяет [2-3] системе вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. После некоторых преобразований имеем эквивалентную систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Из этой системы, применяя метод неопределенных коэффициентов, получаем систему алгебраических уравнений относительно параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Решая ее, получаем четыре линейно независимые решения системы, записанные в явном виде. Одно из таких решений имеет вид:

$$u_4(x, y, z, t) = y^{1-c_2} z^{1-c_3} \times \\ \times F_9^{(4)}(a_1 + 2 - c_2 - c_3, a_2, b + 2 - c_2 - c_3; c_1, 2 - c_2, 2 - c_3; x, y, z, t) \\ = y^{1-c_2} z^{1-c_3} \times \\ \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1 + 2 - c_2 - c_3)_{m+n+p}(a_2)_q(b + 2 - c_2 - c_3)_{m+n+p+q}}{(c_1)_{m+q}(2 - c_2)_n(2 - c_3)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}.$$

Литература

1. *Sharma C., Parihar C.L.* Hypergeometric functions of four variables // Indian Academy of Mathematics. 1989. № 11. P. 121–133.
2. *Appell P., Kampe de Feriet J.* Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques. Paris: Gauthier-Villars, 1926. 440 p.
3. *Erd'elyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G* Higher Transcendental Functions. New York, Toronto and London: V. I, Mc Graw Hill, 1953.

Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

Сабитов К.Б.

СФ ИСИ РБ; СФ БашГУ, Стерлитамак, Россия; sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu = u_{zz} + (\operatorname{sgn} z)(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \tag{1}$$

в области

$$Q = \{(x, y, z)|\,(x, y) \in D,\ -\alpha < z < \beta\},$$

где

$$D = \{(x, y)|\,0 < x < p,\ 0 < y < q\},$$

α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, и поставим следующую краевую задачу на сопряжения на плоскости изменения типа, которую назовем первой граничной задачей или задачей Дирихле.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, z) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q); \tag{2}$$

$$Lu(x, y, z) \equiv 0, \quad (x, y, z) \in Q_+ \cup Q_-; \tag{3}$$

$$u(x, y, z)\big|_{x=0} = u(x, y, z)\big|_{x=p} = u(x, y, z)\big|_{y=0} =$$

$$= u(x, y, z)\big|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \le z \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x, y, z)\big|_{z=-\alpha} = \psi(x, y), \quad u(x, y, z)\big|_{z=\beta} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \tag{5}$$

где $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования с граничными данными (4), $Q_+ = Q \cap \{z > 0\}$, $Q_- = Q \cap \{z < 0\}$.

Отметим, что в работах [1–13] изучены задачи Трикоми и Геллерстедта для многомерных уравнений смешанного типа в парашютообразных областях, где гиперболическая часть ограничена коническими поверхностями, а эллиптическая часть представляет собой область типа полусферы, в частности, полусферу.

В данной работе для уравнения (1) в прямоугольном параллелепипеде Q изучена задача (2)–(5). Установлен критерий единственности. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-41-020516.

сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей относительно отношения α/q при $p \geq q$. Когда отношение α/q является произвольным положительным рациональным числом и отношение q/p рационально установлена оценка об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения относительно граничных функций.

Литература

1. *Protter M.H.* An existence theorem for the generalized Tricomi problem // Duke Math. J. 1954. Vol. 21, № 1. P. 1–8.
2. *Бицадзе А.В.* К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110, № 6. С. 901–902.
3. *Пулькин С.П.* Исследование по уравнениям смешанного типа. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. Казань: КГУ, 1958.
4. *Нахушев А.М.* Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 52–62.
5. *Нахушев А.М.* Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 1. С. 190–191.
6. *Бицадзе А.В., Нахушев А.М.* К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях // Диф. ур. 1974. Т. 10, № 12. С. 2184–2191.
7. *Диденко В.П.* Краевые задачи для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа. Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Киев: КГУ, 1974.
8. *Врагов В.Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа на плоскости и в пространстве. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978.
9. *Aziz A.K., Schneider M.* Frankl-Morawetz problem in $\mathbb{R}^3$ // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol. 10, № 5. P. 913–921.
10. *Кузьмин А.Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. 208 с.
11. *ПопивановН.И., Шнайдер М.* Краевая задача для нелинейного уравнения Трикоми в пространстве $\mathbb{R}^3$ // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 648–655.
12. *Моисеев Е.И.* О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 110–121.
13. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений смешанного типа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 304 с.

Приближенный метод решения одного класса нелокальных краевых задач нелинейной фильтрации

Сербина Л.И.

СГПИ, Нальчик, Россия;

Отличительной чертой современных методов математического моделирования нелинейных эволюционных процессов и систем является активное использование нагруженных уравнений [1]. Уравнения данного типа естественным образом возникают в ряде задач математического моделирования нелинейных динамических процессов переноса в реологических сложных средах [2], существенно расширяя возможности качественного понимании и количественной характеристики нелинейных особенностей их протекания.

В данной работе, в рамках решения проблемы долгосрочного прогнозирования уровня грунтовых вод, предложен и реализован общий подход к построению корректной краевой задачи для смешанного нагруженного уравнения. Исследован вопрос ее однозначной разрешимости в классе непрерывных функций. Показано, что принципиально важной чертой предложенного метода приближенного решения задачи, является появление «нагрузки» в виде интегрального нелокального условия, учитывающего нелинейную взаимосвязь между геометрическими и динамическими характеристиками, позволяющего с исчерпывающей полнотой исследовать внутренние механизмы нелинейных явлений процессов фильтрации, протекающих в рамках трудно формализуемой природной системы.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения. М.: Наука, 2012. 231 с.
2. *Сербина Л.И.* Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.

Оценки погрешности усреднения периодической задачи для уравнения Бельтрами

Сиражудинов М.М.

ДГУ, Махачкала, Россия; sirazhmagomed@yandex.ru

Рассмотрим периодическую задачу:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar z} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon\, \partial_z u_\varepsilon = f - \langle f\, \overline{p^\varepsilon} \rangle\,, \quad f \in L_2(\square), \\ u_\varepsilon \in W_2^1(\square), \qquad \langle u \rangle = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$ — измеримая ограниченная комплекснозначная периодическая (периода 1 по каждой переменной) функция, удовлетворяющая условию эллиптичности $\operatorname{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} |\mu(x)| \leqslant k_0 < 1$, $k_0 > 0$ — постоянная эллиптичности; $p^\varepsilon = p(\varepsilon^{-1}x)$, $p = p(x)$, $\langle p \rangle = 1$, — базисный вектор ядра $A^* : L_2(\square) \to W_2^{-1}(\square)$, $A^* p = -\partial_z p - \partial_{\overline{z}}(\overline{\mu} p)$, $p \in L_2(\square)$. Отметим, что ядро оператора A^* одномерно (см. [1]). Здесь и ниже $\langle g \rangle$ — среднее значение периодической функции, $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, — малый параметр. Без такого ограничения на ε решение задачи (1) может не быть периодической (периода 1) функцией.

Периодическая задача (1) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(\square)$ (см. [1]).

Пусть функция f из правой части (1) принадлежит пространству $W_2^1(Q)$ и пусть u_ε — решение задачи (1). В качестве первого приближения к решению u_ε задачи (1) возьмем функцию $u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon N(\varepsilon^{-1}x)\partial_z u^0(x)$, где N — периодическое решение задачи на ячейке периодов $AN \equiv \partial_{\bar z} N + \mu \partial_z N = \mu^0 - \mu(x)$, $N \in W_2^1(\square)$, $\langle N \rangle = 0$; u^0 — решение усредненной задачи: $A_0 u^0 \equiv \partial_{\bar z} u^0 + \langle \mu \overline{p} \rangle\, \partial_z u^0 = f - \langle f \rangle$, $u^0 \in W_2^1(\square)$, $\left\langle u^0 \right\rangle = 0$. Справедлива следующая

Теорема. _Пусть функция f из правой части задачи_ (1) _принадлежит пространству $W_2^1(\square)$, тогда имеют место оценки_

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(\square)} \leqslant c\,\varepsilon\, \|f\|_{W_2^1(\square)}, \quad \|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(\square)} \leqslant c\,\varepsilon\, \|f\|_{W_2^1(\square)},$$

где $c > 0$ — постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0.

Литература

1. _Сиражудинов М. М._ Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Матем. сборник. 2017. Т. 208, № 4. С. 87–110.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00508-а.

Квадратичные экспоненты и их приложения

Ситник С.М.

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; sitnik@bsu.edu.ru

В докладе сделана попытка объединить изложение свойств квадратичных экспонент и их приложений к различным классам задач, представляющим основные конструкции Анализа: конечные суммы, ряды и интегральные преобразования. Кроме того, в статье выделены два математических объекта, которые неразрывно связаны с квадратичными экспонентами и встречаются в большинстве перечисленных задач – это тета–функции Якоби и дискретное преобразование Фурье. Основная часть результатов работы приводится в обзорном виде, в форме перечисления и обсуждения результатов.

Важность квадратичных экспонент определяется их использованием кроме теоретических также и в прикладных известных задачах: волны Френеля, фреймы Габора и голография, приложения к известному компьютерному пакету GAUSSIAN.

В работе рассматриваются задачи, которые объединены тем, что в них вместо классических экспонент

$$L_1(x, y) = \exp(axy)$$

рассматриваются обобщения и аналоги с квадратичными экспонентами

$$Q_2(x, y) = \exp(ax^2 + by^2 + cxy).$$

Рассмотрены задачи, в которых квадратичные экспоненты встречаются в конечных суммах, рядах и интегральных преобразованиях.

Аппроксимационная формула для расчета равновесного объема малой лежащей капли

Сокуров А.А.

НИИ ПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; asokuroff@gmail.com

Рассматривается малая капля жидкости, которая лежит на горизонтальной гладкой поверхности в поле силы тяжести и пребывает в термодинамическом равновесии с собственным паром. С учетом размерной зависимости поверхностного натяжения [1] получено уравнение, которое выступает в роли основного условия механического равновесия поверхности капли. Данное уравнение является аналогом уравнения Башфорта–Адамса, хорошо известного из математической теории равновесных капиллярных поверхностей. Исходя из аналога уравнения Башфорта–Адамса получены системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающие профиль капли. Задача Коши для полученных систем дифференциальных уравнений имеет аналитическое решение только в тривиальном случае, когда параметр, связанный с напряженностью гравитационного поля, равен нулю. В остальных случаях выписать точное решение в явной форме не представляется возможным, в связи с чем возникает необходимость в использовании вычислительных методов и комплексов программ. Установлено, что в качестве эффективного численного метода нахождения приближенного решения сформулированных задач может быть использован метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Найдено интегральное соотношение между координатами произвольной точки на поверхности капли и объемом заключенной жидкости. В общем случае данное соотношение не выражается в явном виде через элементарные функции. Поэтому для него получены аппроксимационная формула и асимптотическое равенство, а также оценки с избытком и недостатком (с указанием точности). На вычислительном эксперименте смоделировано изменение линейных размеров капли с увеличением объема жидкости. Все указанные уравнения и формулы переходят в ранее известные, если параметр, отвечающий за размерный эффект поверхностного натяжения, приравнять к нулю.

Литература

1. *Сокуров А.А., Рехвиашвили С.Ш.* Моделирование равновесных капиллярных поверхностей с учетом размерной зависимости поверхностного натяжения // Конденсированные среды и межфазные границы. 2013. Т. 15, № 2. С. 173–178.

Эллиптические системы на плоскости, состоящие из двух уравнений

Солдатов А.П.

Вычислительный центр ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия;
soldatov48@gmail.com

Рассматриваются эллиптические системы на плоскости, состоящие из двух уравнений с постоянными и только старшими коэффициентами.

Приводится явное представление общего решения этих систем через так называемые комплексные вектор-функции, аналитические по Дуглису. Дается классификация этих систем по отношению к задаче Дирихле. Описано явное представление решения этой задачи с помощью обобщенных потенциалов двойного слоя. Это представление иллюстрируется на примере системы Ламе в плоской анизотропной среде.

О невозможности представления системы Ламе одним комплексным уравнением

Солдатов А.П., Тарасова О.А.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия; soldatov48@gmail.com

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; tarasova-o@bsu.edu.ru

Рассмотрим систему Ламе плоской анизотропной упругости [1, 2]

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

для вектора смещения $u = (u_1, u_2)$ с матричными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \qquad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Элементы этих матриц подчинены требованию положительной определенности матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Возникает вопрос, можно ли систему Ламе по отношению к функции $w = u_1 + iu_2$ записать в виде одного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_1\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

с комплексными коэффициентами $c_j = a_j + ib_j$.

В докладе показывается, что ответ отрицательный.

Литература

1. *Лехницкий Г.Г.* Теория упругости анизотропного тела М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

2. *Солдатов А.П.* К теории анизотропной плоской упругости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 60. С. 114–166.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, проект № 1.7311.2017/8.9.

Свойства показателей колеблемости решений автономных дифференциальных систем

Сташ А.Х.

АГУ, Майкоп, Россия; aidamir.stash@gmail.com*

В данной работе приводятся результаты, завершающие исследования показателей колеблемости решений линейных однородных автономных дифференциальных систем.

Определение [1]. Для момента $t > 0$, вектора $m \in \mathbb{R}^n$ и решения x автономной системы под выражениями $\nu^0(x,m,t)$, $\nu^+(x,m,t)$ будем понимать соответственно число *нулей* или *корней* (т.е. нулей с учетом их *кратности*) скалярного произведения $\langle x(\cdot), m\rangle$ на промежутке $(0,t]$. Далее, определим *верхнюю* (*нижнюю*) *полную* и *векторную частоты*

$$\hat{\sigma}^\alpha(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check{\sigma}^\alpha(x) \equiv \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right),$$
$$\hat{\zeta}^\alpha(x) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \quad \left(\check{\zeta}^\alpha(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t)\right)$$

нулей и *корней* решения x при $\alpha \in \{0,+\}$ соответственно.

В работе [2] установлено, что для любого решения автономной системы верхняя и нижняя полные частоты нулей совпадают между собой, а множество их значений на всех ненулевых решениях этой системы – с можеством модулей мнимых частей корней его характеристического уравнения. В докладе [3] утверждается равенство полных и векторных частот нулей на множестве решений автономных систем, а значит, все приведенные выше результаты работы [2] справедливы и для векторных частот нулей. Полные и векторные частоты корней на множестве решений автономных систем не были исследованы. Оказалось, что они совпадают на указанном множестве с частотами нулей.

Теорема. *Для любого решения x любой автономной системы справедливы равенства* $\check{\zeta}^0(x) = \check{\sigma}^+(x) = \check{\zeta}^+(x) = \hat{\sigma}^+(x) = \hat{\zeta}^+(x)$.

Литература

1. *Сергеев И.Н.* Определение полных частот решений линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 908.

2. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной систем // Известия РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172.

3. *Бурлаков Д.С., Цой С.В.* Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1662–1663.

Численное решение пространственно-трехмерной задачи фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости

Сухинов А.И.[1]**, *Григорян Л.А.***[2]**, *Тимофеева Е.Ф.***[3]

[1]*ДГТУ, Ростов-на-Дону, Россия; sukhinov@gmail.com*
[2,3]*СКФУ, Ставрополь, Россия; honey.lusine@mail.ru; teflena@mail.ru*

В работе рассматривается фильтрация двухфазной несжимаемой жидкости в процессе вытеснения нефти водой с учетом влияния силы тяжести, в отсутствии капиллярных сил. Построена пространственно-трехмерная задача фильтрации для вычисления функции давления в пласте. С помощью интегро-интерполяционного метода приводится консервативная разностная схема с пространственной сеткой [1]. Для последовательного алгоритма (метода Зейделя, метода верхней релаксации) численного решения задачи требуются большие временные затраты, а сам процесс трудоемок. В связи с этим рассматривается параллельное численное решение системы разностных уравнений усовершенствованным модифицированным попеременно–треугольным методом (МПТМ), который обеспечивает высокую скорость сходимости в случае сильно неоднородных пластов и при использовании подробных пространственных сеток [2]. Анализ полученных результатов показал преимущество МПТМ по сравнению с другими.

Рассмотренный в работе метод можно применить при решении задач проектирования разработок нефтяных месторождений. При этом расчеты можно проводить на относительно недорогих параллельных многоядерных системах с числом ядер до нескольких сотен.

Литература

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 656 с.
2. *Сухинов А.И.* Модифицированный попеременно-треугольный метод для задач теплопроводности и фильтрации // Вычислительные системы и алгоритмы. 1984. С.52–59.

Усовершенствованная схема типа «кабаре» для решения задачи переноса при больших числах Пекле

Сухинов А.И.[1]***, Чистяков А.Е.***[2]***, Проценко Е.А.***[3]***,***
Григорян Л.А.[4]***, Тимофеева Е.Ф.***[5]

[1,2]*ДГТУ, Ростов-на-Дону, Россия; sukhinov@gmail.com; cheese_05@mail.ru*
[3]*ТИ им. А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Таганрог, Россия; eapros@rambler.ru*
[4,5]*СКФУ, Ставрополь, Россия; teflena@mail.ru; honey.lusine@mail.ru*

Для задачи переноса в работе предложена схема, построенная на основе линейной комбинации разностной схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами 2/3 и 1/3 соответственно. При малых числах Куранта предложенная схема, как и схема, полученная в результате линейной комбинации центральной разностной схемы и схемы «кабаре» [1] на много точнее остальных, рассмотренных в работе [2] схем, и она имеет устойчивое решение в диапазоне чисел Куранта от 0 до 1. Для нестационарного уравнения конвекции-диффузии предложенная разностная схема имеет незначительную погрешность в широком диапазоне сеточных чисел Пекле. Показано, что в норме сеточного пространства L_1 разработанные схемы имеют меньшие погрешности, и переход на следующий временной слой осуществляется за меньшее число арифметических операций.

Литература

1. *Головизнин В.М., Самарский А.А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математ. моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 86–100.

2. *Сухинов А.И., Белова Ю.В., Чистяков А.Е.* Решение задачи переноса веществ при больших числах Пекле // Вычислительные методы и программирование. 2017. Т. 18, № 4. С. 371–380.

3. *Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Shishenya A.V., Timofeeva E.F.* Mathematical model for calculating coastal wave processes // Math. Models and Comp. Simulations. 2013. Vol. 5, № 5. P. 122–129.

4. *Никитина А.В., Пучкин М.В., Семенов И.С., Сухинов А.И., Угольницкий Г.А., Усов А.Б., Чистяков А.Е.* Дифференциально–игровая модель предотвращения заморов в мелководных водоемах // Управление большими системами: сборник трудов. 2015. № 55. С. 343–361.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 17-11-01286).

Математическая модель транспорта взвесей с изменяющимся рельефом дна

Сухинов А.И.[1]**, *Сидорякина В.В.***[2]

[1]*ДГТУ, Ростов-на-Дону, Россия; sukhinov@gmail.com*
[2]*ТИ им. А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), Таганрог, Россия; cvv9@mail.ru*

Авторами исследуется 3D модель транспорта и осаждения взвеси в прибрежной зоне водоема с учетом изменения рельефа дна. Модель учитывает: адвективный перенос, обусловленный движением водной среды, микротурбулентную диффузию и гравитационное осаждение частиц взвеси, а также изменение геометрии дна, вызванное осаждением частиц взвеси или подъемом частиц донных отложений.

Решение соответствующей начально-краевой задачи приводит к рассмотрению уравнения параболического типа с младшими производными в области, геометрия которой зависит от искомой функции решения и, в общем случае, сводится к нелинейной постановке задачи. Выполнена линеаризация модели на временной сетке за счет «замораживания» рельефа дна в пределах одного шага по времени и последующего пересчета функции поверхности дна на основе изменившейся функции концентрации взвешенного вещества, а также возможного изменения вектора скорости движения водной среды. Для линеаризованной задачи построен квадратичный функционал и энергетическим методом доказана единственность решения задачи в пределах произвольного шага по времени. На основе преобразования квадратичного функционала получена априорная оценка нормы решения в функциональном пространстве L_2 в зависимости от интегральных оценок по времени правой части, начального и граничных условий.

Литература

1. *Сухинов А.И., Сидорякина В.В.* О сходимости решения линеаризованной последовательности задач к решению нелинейной задачи транспорта наносов // Матем. моделирование. 2017. Т. 29, № 11. С. 19–39.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, проект № 17-11-01286.

Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии пятиэлектронных систем в модели Хаббарда. Пятое дублетное состояние

Ташпулатов С.М.

ИЯФ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; sadullatashpulatov@yandex.ru

В настоящей работе рассматривается оператор энергии пятиэлектронных систем в модели Хаббарда и описывается структура существенного и дискретного спектров системы для пятого дублетного состояния. Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид $H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}$. Здесь A, B, $U-$ параметры, τ означает суммирование по ближайшим соседям; $\gamma-$ спиновый индекс; $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}-$ соответственно операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$.

Гамильтониан H действует в антисимметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}_{as}$. Пусть φ_0- вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{H}_{as}$. Пятое дублетное состояние соответствует базисные функции ${}^5d^{\frac{1}{2}}_{p,q,r,t,l} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{t,\uparrow}\cdot \cdot a^+_{l,\uparrow}\varphi_0$. Пусть ${}^5\widetilde{\mathcal{H}}^{1/2}_d$ подпространство, соответствующее пятому дублетному состоянию. Через ${}^5H^d_{1/2}$ обозначим сужение оператора H на подпространство ${}^5\widetilde{\mathcal{H}}^{1/2}_d$. Обозначим $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \gamma + \theta$, $\Lambda_3 = \theta + \eta$.

Теорема 1. _Если $\nu = 1$ и $U < 0$, тогда существенный спектр оператора ${}^5\widetilde{H}^d_{1/2}$ системы в пятом дублетном состоянии есть объединение семьи отрезков: $\sigma_{ess}({}^5\widetilde{H}^d_{1/2}) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+z_3, b+d+z_3] \cup [a+e+z_2, b+f+z_2] \cup [a+z_2+z_3, b+z_2+z_3] \cup [c+e+z_1, d+f+z_1] \cup [c+z_1+z_3, d+z_1+z_3] \cup [e+z_1+z_2, f+z_1+z_2]$. Дискретный спектр оператора ${}^5\widetilde{H}^d_{1/2}$ состоит из не более одного точки. Здесь $a = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $b = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}, c = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}, d = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}, e = A - 2B$, $f = A + 2B$, $z_1 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}, z_2 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $z_3 = A + 2\sqrt{U^2 + B^2}$. Если $z_1 + z_2 + z_3 \notin \sigma_{ess}({}^5\widetilde{H}^d_{1/2})$, то существует единственное пятиэлектронное антисвязанное состояние, иначе дискретный спектр оператора ${}^5\widetilde{H}^d_{1/2}$ пуст._

Теорема 2. _Если $\nu = 3$ и $-m' \leq U < 0$, тогда существенный спектр оператора ${}^5\widetilde{H}^d_{1/2}$ системы в пятом дублетном состоянии есть единственный отрезок: $\sigma_{ess}({}^5\widetilde{H}^d_{1/2}) = [5A - 6B - 4B\sum_{i=1}^3(\cos\frac{\Lambda_1^i}{2} + \cos\frac{\Lambda_2^i}{2}), 5A + 6B + 4B\sum_{i=1}^3(\cos\frac{\Lambda_1^i}{2} + \cos\frac{\Lambda_2^i}{2})]$. Дискретный спектр оператора ${}^5\widetilde{H}^d_{1/2}$ пуст. Здесь, m' некоторое конкретное число._

Задача Коши для уравнения Риккати с модифицированной дробной производной Герасимова – Капуто переменного порядка

Твёрдый Д.А.[1,2], **Паровик Р.И.**[2,3]

[1]*ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; dimsolid95@gmail.com*
[2]*КамГУ имени Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия;*
[3]*ИКИР ДВО РАН, Петропавловск-Камчатский, Россия;*
romanparovik@gmail.com

В работе предложена задача Коши для уравнения Риккати с производной дробного переменного порядка:

$$\partial_{0,t}^{\beta(t)} u(\eta) + au^2(t) + bu(t) + c = 0, u(0) = u_0,\ 0 < \beta(t) < 1, \tag{1}$$

где $u\,(t) \in C^2[0,t]$ – функция решения; $\partial_{0,t}^{\beta(t)} u(\eta) = \int\limits_0^t \frac{\dot{u}(\eta) d\eta}{\Gamma(1-\beta(\eta))(t-\eta)^{\beta(\eta)}}$ – модифицированная дробная производная переменного порядка $\beta\,(t)$, по аналогии с работой [1]; $\dot{u}\,(\eta) = du/d\eta$ – производная первого порядка; $\Gamma(.)$ – гамма-функция; $t \in [0,T]$ – время; $T > 0$ – время моделирования; u_0 – начальное условие, заданная константа.

Задача Коши (1) для случая обычного оператора Герасимова – Капуто с переменными коэффициентами $a(t), b(t), c(t)$, рассмотрена в работах [2, 3] и решается с помощью численных методов.

В этой работе задача Коши (1), с помощью аппроксимации дробной производной по аналогии с работой [1], была сведена к дискретному аналогу, который был реализован в компьютерной среде Maple. С помощью этой программы были построены расчетные кривые в зависимости от различных типов функции $\beta\,(t)$.

Литература

1. *Твердый Д.А., Паровик Р.И.* Программа численного расчета задачи Коши для уравнения Риккати с производной дробного переменного порядка // Фундаментальные исследования. 2017. № 8-1. С. 98–103.

2. *Паровик Р.И.* Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов // Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга. 2015.

3. *Sweilam N.H., Khader M.M., Mahdy A.M.S.* Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation // Applications and Applied Mathematics. 2012. Vol. 7, № 2. P. 595–608.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-1152.2018.1 и по теме НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» №AAAA-A17-117031050058-9.

Задача Трикоми для одного нагруженного параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристикой линией изменения типа

Тоштемиров Б.Х.

ФерПИ, Фергана, Узбекистан; Toshtemirovbh@gmail.ru

Пусть $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup OE$, $\Omega_1 = \{(x,\, t):\ 0 < x < 1\,,\ 0 < t \le 1\}$, $\Omega_2 = \{(x,\, t):\ -x < t < 1 + x,\ (-1/2\ ) < x < 0\,\}$.

В области Ω рассмотрим уравнение

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_t + \lambda_1 u\,(0,\, t)\ , & (x,\, t) \in \Omega_1\,, \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{tt} + \lambda_2 u\,(0,\ t - x)\ , & (x,\, t) \in \Omega_2\,, \end{cases}$$

где $\lambda_1,\, \lambda_2 \in R$, $OE = \{(x,\, t):\ x = 0\,,\, 0 < t < 1\}$ – линия изменения типа уравнения $Lu = 0$.

Задача. *Найти функцию* $u\,(x,\, t) \in \bigcap\limits_{i=1}^{2} \left[C\left(\bar{\Omega}_i\right) \cap C^{2,\, i}_{x,\, t}\,(\Omega_i) \right]$, *которая в области* Ω_1 *и* Ω_2 *удовлетворяет уравнению* $Lu = 0$ *и краевым условиям*

$$u\,(x,\, 0) = \tau_1\,(x)\,, \qquad 0 \le x \le 1; \tag{1}$$

$$u\,(1,\, t) = \varphi_1\,(t)\,,\ 0 \le t \le 1; \tag{2}$$

$$u\,(-t,\, t) = \psi_1\,(t)\,,\ 0 \le t \le (1/2\ )\,, \tag{3}$$

а на линии изменения типа удовлетворяет условию склеивания:

$$\lim_{x \to +0} u_x\,(x,\, t) = \lim_{x \to -0} u_x\,(x,\, t)\,, \quad 0 < t < 1, \tag{4}$$

где $\varphi_1\,(t)\,,\ \psi_1\,(t)\,,\ \tau_1\,(x)$ *– заданные непрерывные функции, причем* $\tau_1\,(0) = \psi_1\,(0)$ *и* $\tau_1\,(1) = \varphi_1\,(0)\,.$

Задача Стефана для квазилинейного уравнения диффузии с нелинейным граничным условием

Тураев Р.Н.

ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru

В настоящей работе рассматривается нелинейная задача Стефана о распространения тепла в среде, агрегатное состояние которого может меняется при определенных значениях температуры ее выделением или поглощением тепла. Примерами могут служить задачи о промерзании и плавлении.

Постановка задачи.

Требуется найти пару функций $(s(t), u(t,x))$ таких что $s(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $0 < t \leq T$, $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$ а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$a(u)u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + cu_x(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = f(t, u(t,0)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$\dot{s}(t) = -\alpha u_x(t, s(t)), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

Задача (1)–(5) исследована соответственно в работах [1,2], когда $c \equiv 0$ и вместо (3) задается граничное условие второго рода и нелокальные условия.

Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $(s(t), u(t,x))$ и их производных. Далее установлены априорные оценки Шаудеровского типа норм Гельдера. На основе установленных априорных оценок доказана теорема единственности, а существование решения доказана при помощи принципа Шаудера [2].

Литература

1. *Douglas,Jr.* A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. Vol. 8, № 4. P. 402–408.

2. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения // Вест. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Т. 28, № 4. С. 8–16.

Работа выполнена фундаментальных исследований, проект ОТ-Ф-4 – 85.

Нелокальная задача со свободной границей для квазилинейного нагруженного параболического уравнения

Тураев Р.Н.[1], **Тураев К.Н.**[2]

[1] *ИМ АН РУз, Ташкент, Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru*
[2] *Термезский филиал ТТГУ, Термез, Узбекистан; k_turaev@mail.ru*

В современной науке наблюдается повышенный интерес к задачам для нагруженных параболических уравнений [1]. Нелокальные же задачи со свободной границей для нагруженного квазилинейного параболического уравнения относятся к категории неизученных.

В настоящей работе изучается нелокальная задача со свободной границей для нагруженного квазилинейного параболического уравнения.

Требуется найти пару функций $s(t), u(t,x)$, такую что непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определена на отрезке $0 < t \leq T, s(0) = s_0 > 0, 0 < \dot{s}(t) \leq N$, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T,$ $0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$a(u_x)u_{xx}(t,x) - u_t(t,x) = F(t, u(t,0)), \quad (t,x) \in D$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0,$$

$$u_x(t,0) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\alpha u(t,x_0) = u(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u_x(t,s(t)) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Сначала задача сводится к задаче типа задачи Стефана и доказывается их эквивалентность. Далее, устанавливаются априорные оценки решения и ее производных в норме Гельдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задач при помощи метода неподвижной точки Шаудера [2].

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с.

2. *Тахиров Ж.О.* Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей. Ташкент. 2014. 240 с.

О решении некоторых классов диофантовых уравнений методом тождеств

Увижева Ф.Х., Калажокова М.Х.

ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; fatimauvizheva@mail.ru

Рассмотрен метод решения диофантовых уравнений в целых числах на основе использования алгебраических тождеств. Приведены примеры решения некоторых классических диофантовых уравнений и их обобщенные варианты [1-3].

1. Получено решение в целых числах для уравнения $x^2 + y^2 = z^n$ в виде рекуррентной формулы.

2. Пользуясь тождеством Лагранжа, получены целые решения уравнения $y^m = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

3. Для решения уравнения $z^n = x^2 + cxy + my^2$ использовано одно замечательное свойство бинарной квадратичной формы и получены рекуррентные соотношения.

4. Для уравнения Пелля и уравнения $x^2+my^2 = k^n$ сформулированы две теоремы, позволяющие получить их целочисленные решения.

Доказательства проведены методом математической индукции [4].

Литература

1. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М.: Наука, 1965. 172 с.
2. *Арнольд И.В.* Теория чисел. Издание второе. М.: Ленанд, 2017. 288 с.
3. *Гельфонд А.О.* Решение уравнений в целых числах. М.: Наука, 1952. 61 с.
4. *Минухин Б.Л.* Об одном методе решения диофантовых уравнений // Математическое просвещение. Выпуск 3. М.: Физматлит, 1958. С. 157–167.

Задача Коши для уравнения крутильных волн в нелинейно-упругом стержне бесконечной длины

Умаров Х.Г.

АН ЧР, Грозный, Россия; umarov50@mail.ru

Для дифференциального уравнения, описывающего крутильные волны в нелинейно-упругом стержне бесконечной длины:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \beta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3,$$

где α, β — заданные числовые параметры, исследована разрешимость задачи Коши в пространстве непрерывных функций на всей числовой оси сведением к абстрактной задаче Коши в банаховом пространстве.

Найден явный вид решения соответствующего линейного уравнения.

Установлен временной отрезок существования классического решения задачи Коши для нелинейного уравнения и получена оценка нормы этого локального решения.

Рассмотрены условия существования глобального решения (определенного для $t \geq 0$) и разрушения решения на конечном отрезке.

Краевая задача типа А.М.Нахушева для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода

Уринов А.К., Окбоев А.Б.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; urinovak@mail.ru; aoqboyev@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y - \lambda^2 u = 0, \quad y < 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области D, ограниченной характеристиками AC : $x - 2\sqrt{-y} = 0$, $BC : x + 2\sqrt{-y} = 1$ и $AB : y = 0$ уравнения (1) при $y \le 0$, где $\alpha \in (-\infty, 0)$, причем $\alpha \ne -n$, $\alpha \ne 1/2 - n$, $n \in N$, а $\lambda \in R$ или $i\lambda \in R$.

Задача H. Найти регулярное в области D решение $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \tau(x),\; x \in [0,1];$$

$$a(x)A_{0x}^{1,i\lambda} D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)] + b(x)A_{x1}^{1,i\lambda} D_{x1}^{1-\beta} u[\theta_1(x)] +$$
$$+c(x)\lim_{y\to 0}(-y)^{\alpha}\left(\partial/\partial y\right)\left[u - A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)\right] = f(x),\;\; x \in (0,1),$$

где $\tau(x), a(x), b(x), c(x), f(x)$ – заданные функции, $D_{0x}^{1-\beta}$ и $D_{x1}^{1-\beta}$ – операторы дробного дифференцирования, а $A_{kx}^{1,\lambda}$ – оператор вида [1]

$$A_{kx}^{1,\lambda}\left[g\left(x\right)\right] \equiv g\left(x\right) - \int\limits_{k}^{x} g\left(t\right)\frac{t-k}{x-k}\frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\lambda\sqrt{\left(x-k\right)\left(x-t\right)}\right]dt;$$

$\beta = \alpha - 1/2$, $\theta_0(x) = \theta_0(x/2, x^2/16)$, $\theta_1(x) = \theta_1((1+x)/2, (1-x)^2/16)$,

$$A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k\;\Gamma(2n+2\beta)\;\;(4y)^k}{\Gamma^2(n+\beta)\left(1/2+\beta\right)_k\left(n+\beta\right)_k}\int\limits_0^1\frac{\Psi_k(\tau,\lambda)\overline{J}_{k+n+\beta-1}\left(\sigma\right)}{\left[z(1-z)\right]^{-k-n-\beta+1}}dz,$$

$\Psi_k\left(\tau,\lambda\right) = \left(\lambda^2 - \partial^2/\partial t^2\right)^k\tau(t)$, $\sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, $J_k(\sigma)$ – функция Бесселя первого рода, $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера, $(a)_k$ – символ Похгаммера.

Терема. Если $a(x)x^{-\beta} + b(x)(1-x)^{-\beta} + c(x)16^{1-\alpha}\Gamma(1-\beta)/\Gamma(2-2\beta) \ne 0$,

$$\tau(x) \in C^{2n+2}[0,1] \cap C^{3n+3}(0,1), a(x), b(x), c(x), f(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1),$$

то решение задачи H существует и единственно.

Литература

1. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* О свойствах некоторых операторов вольтерровского типа // Докл.АН УзССР. 1988. № 4. С. 3–5.

Дробно-дифференциальные уравнения в моделировании землетрясения

Учайкин В.В., Кожемякина Е.В.

УлГУ, Ульяновск, Россия; vuchaikin@gmail.com

Моделирование последовательности вторичных толчков (афтершоков) осуществляется на основе марковской цепи в координатно-временном фазовом пространстве, реализуемой методом Монте-Карло. Выведены интегральные уравнения, описывающие процесс, приведены численные результаты для вероятности (рис. 1) возвращения афтершока в направлении первичного толчка (рис. 2).

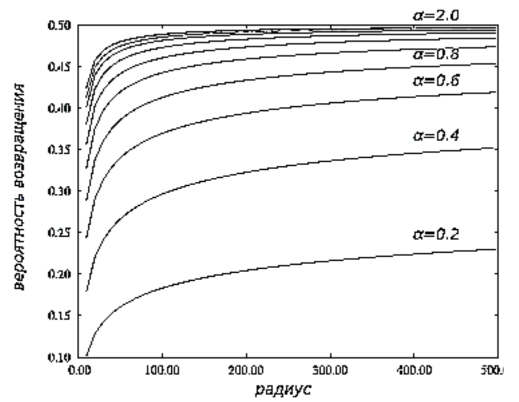


Рис. 1: Вероятность возвращения афтершока

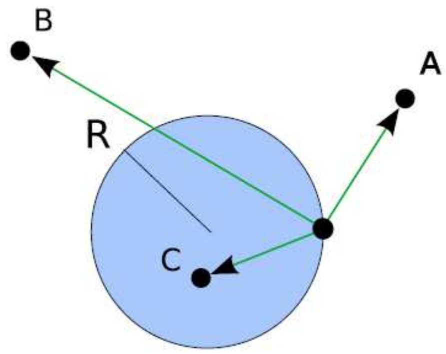


Рис. 2: Возвращение афтершока

Замечание. Модель блужданий является альтернативой моделям с короткими корреляциями и может служить математической основой для развития физических теорий редких катастрофических событий.

Литература

1. *Учайкин В.В., Учайкин Д.В.* Дробно-дифференциальная модель землетрясения // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, № 2. С. 32.
2. *Uchaikin V.V.* Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol.1 and Vol.2. Berlin: Springer and Beijing: HEP, 2013.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00556.

О состояниях равновесия автономных динамических систем, правые части которых представляют собой полиномы n-ой степени

Ушхо А.Д., Ушхо Д.С.

АГУ, Майкоп, Россия; uschho76@rambler.ru; damirubych@mail.ru

Доказаны общие теоремы о состояниях равновесия автономных динамических систем вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} a_{rs}x^r y^s$, $Q_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} b_{rs}x^r y^s$.

Дадим без доказательства некоторые из них.

Теорема 1. *Пусть система (1), правые части которой взаимно простые многочлены с вещественными коэффициентами, имеет n^2 состояний равновесия. Тогда все они простые.*

Теорема 2. *Если $n^2 - n$ состояний равновесия системы (1) расположены на алгебраической кривой $(n-1)$–го порядка*

$$L_{n-1} : L_{n-1}(x,y) = 0, \tag{2}$$

то L_{n-1} — изоклина этой системы.

Теорема 3. *Сумма числа состояний равновесия системы (1) и числа контактов на гладкой алгебраической кривой порядка m, не состоящей из траекторий этой системы, не превосходит числа $N = m(m+n-1)$.*

Кроме этого рассмотрены условия отсутствия предельных циклов кубической системы, имеющей особые точки типа «центр». Приведены примеры, подтверждающие выдвинутые утверждения.

Литература

1. *Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С.* Полиномиальные векторные поля на плоскости. Избранные вопросы. Майкоп: Изд-во АГУ, 2012. 326 с.

Нелокальная задача для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка

Халилов К.С.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; xalilov_q@mail.ru

В области $D = D_1 \cup I \cup D_2$ рассмотрим уравнение $(\partial/\partial x)\, Lu = 0$, где

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1 u, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u, & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

$D_1 = \{(x,y) : 0 < x, y < 1\}$, $D_2 = \{(x,y) : -x < y < x - 1,\ 0 < x < 1\}$, $I = \{(x,y) : y = 0,\ 0 < x < 1\}$, λ_1,λ_2 – заданные действительные числа.

В данной работе в области D для уравнения $(\partial/\partial x)\, Lu = 0$ исследуется неклассическая задача с интегральным условием в области D_1.

Задача. *Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:*

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1) \cap C^2(D_2)$; $u_x, u_y \in C(\overline{AE} \cup D)$;

2) $u(x,y)$ является регулярным в областях D_1 и D_2 решением уравнения $(\partial/\partial x)\, Lu = 0$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le 1;$$

$$\int_0^1 u(x,y)dx = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le 1;$$

$$u(x,-x) = \psi_1(x), \quad x \in [0,1/2]; \quad \frac{\partial u}{\partial n}\,|_{AE} = \psi_2(x), \quad x \in (0,1/2),$$

где $AE = \{(x,y) : y = -x,\ x \in (0,1/2)\}$, n – внутренный нормал к AE; $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y), \psi_1(x), \psi_2(x)$ – заданные гладкие функции, причем $\psi_1(0) \equiv \varphi_1(0)$, $\varphi_j(y) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), (j = \overline{1,3})$, $\psi_1(x) \in C^2[0,1/2] \cap C^3(0,1/2)$, $\quad \psi_2(x) \in C^1[0,1/2] \cap C^2(0,1/2)$.

В настоящее время задачи с нелокальными интегральными условиями для параболических и гиперболических уравнений активно изучаются (см., например, [1,2]).

Литература

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294-304.

2. Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Изв. вузов. Матем. 2012. № 4. С. 74-83.

Моделирование неоднородных пластов при фильтрации газоконденсатной смеси

Халилов М.С.

_БГУ, Баку, Азербайджан; khalilov_mubariz@mail.ru_

Продуктивные горизонты углеводородных залежей, как правило, имеют сложное строение, а коллекторские свойства пласта меняются как по разрезу, так и по площади его простирания. Технологические показатели разработки залежей при их прогнозировании существенно зависят от степени неоднородности пластов. Поэтому вопросы их определения являются важной проблемой теории и практики разработки углеводородных месторождений.

Предположим, что неоднородный пласт мощностью H и радиусом R_k ограничен двумя непроницаемыми поверхностями и вскрыт скважиной радиусом r_c, работающей с забойным давлением $p_c(z,t)$. Требуется определить распределение давления $p(r,z,t)$ и некоторые физические параметры пласта.

Математически задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений с частными производными с начальными и граничными условиями [1]. Для решения поставленной задачи использованы схемы под названием «явная по насыщенности и неявная по давлению». Далее задача сводится к коэффициентно-обратной задаче. Для решения обратной задачи она трансформируется к эквивалентной задаче в вариационной постановке. Предложенная методика идентификации параметров неоднородного газоконденсатного пласта обеспечила достаточно высокую точность при прогнозе изменения во времени производительности скважины.

Литература

1. _Азиз Х., Сеттари Э._ Математическое моделирование пластовых систем: Пер. с английского. М.: Недра, 1982. 407 с.

О решении одной нелокальной задачи для линейного дифференциального уравнения гиперболического типа

Ханкишиев З.Ф.

БГУ, Баку, Азербайджан; hankishiyev.zf@yandex.com

В настоящей работе рассматривается следующая задача для дифференциального уравнения гиперболического типа:

Найти непрерывную в замкнутой области $\overline{D}=\{0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ *функцию* $u = u(x,t)$*, удовлетворяющую уравнению*

$$\frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial x^2} + bu\,(x,t) + f\,(x,t)\,, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

граничным условиям

$$u\,(0,t) = 0, \qquad \int_0^l c\,(x)\,u\,(x,t)\,dx = \mu\,(t)\,, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u\,(x,0) = \phi_1\,(x)\,, \frac{\partial u\,(x,0)}{\partial t} = \phi_2\,(x)\,, \quad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Здесь $f(x,t)$*,* $c(x)$*,* $\mu(t)$*,* $\phi_1(x)$*,*$\phi_2(x)$ *– известные непрерывные функции своих аргументов,* a*,* b *– заданные действительные числа.*

В этой работе решение задачи (1)-(3) с помощью замены сведено к решению следующей задачи с локальными граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + bu\,(x,t) + f\,(x,t)\,, \\ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = c\,(x) \left(a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f\,(x,t) \right) + bc\,(l)\,u\,(l,t)\,, \end{cases}$$
$$0 < x < l, 0 < t \le T.$$

$$u\,(0,t) = 0, c\,(l)\,u\,(l,t) - w\,(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u\,(x,0) = \varphi_1\,(x)\,, \frac{\partial u\,(x,0)}{\partial t} = \varphi_2\,(x)\,,$$

$$w\,(x,0) = c\,(x)\,\varphi_1\,(x)\,, \frac{\partial w\,(x,0)}{\partial t} = c\,(x)\,\varphi_2\,(x)\,, \quad 0 \le x \le l.$$

Конфлюэнтные гипергеометрические функции от четырех переменных и их применения

Хасанов А., Эргашев Т.Г.

ИМАН РУз, Ташкент, Узбекистан; anvarhasanov@yahoo.com; ergashev.tukhtasin@gmail.com

Следуя определению Эрдейи [1], введем в рассмотрение следующие конфлюэнтные гипергеометрические функции:

$$\mathrm{H}_{4,2}^{1,1,0,0}\left(a,b_1,b_2;d_1,d_2;X\right)=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n-p-q}\,(b_1)_m\,(b_2)_n}{(d_1)_m\,(d_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},$$

$$\mathrm{H}_{4,1}^{1,0,0,0}\left(a,b_1;d_1;X\right)=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n-p-q}\,(b_1)_m}{(d_1)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},$$

где $(\mu)_k-$ символ Похгаммера: $(\mu)_0=1,\quad(\mu)_k=\mu(\mu+1)...(\mu+k-1)$, $k=1,2,...,$ $X=(x,y,z,t)$.

В настоящем сообщении исследуются общие свойства каждой из этих функций: область сходимости, интегральное представление, формула аналитического продолжения, система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет данная функция, формула разложения. Кроме того, найдены приложения этих функций к нахождению фундаментальных решений некоторых эллиптических уравнений. Например, установлено, что оба фундаментальных решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\frac{2\alpha}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{3}\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)u=0$$

при определенном наборе параметров a,b_1,b_2 и переменных x,y,z,t выписываются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию $\mathrm{H}_{4,1}^{1,0,0,0}$.

Литература

1. *Erdelyi A.* Integraldarstellungen fur Produkte Whittakerscher Funktionen. Nieuw Archief voor Wiskunde. 1939. Vol. 20, № 2. P. 1–34.

Об одном неравенстве, связанном с сильным суммированием в точке двойных рядов Фурье

Хашба Л.А.

АГУ, Сухум, Абхазия; aniballe@mail.ru

Пусть $L_\mu\left(T^2\right)$, $(\mu \geq 1,\ T = [-\pi, \pi])$ – множество 2π периодических по каждой из независимых переменных суммируемой в μ-ой степени функции двух переменных , $S\,[f]$ – ряд Фурье функции $f \in L_\mu\left(T^2\right)$, $S_{m,n}\left(f,x,y\right)$ – прямоугольные частные суммы ряда $S\,[f]$, $\rho_{m,n}\left(f,x,y\right) = S_{m,n}\left(f,x,y\right) - f\left(x,y\right)$, соответствующее отклонение.

Ранее нами доказано утверждение: если $f \in L_\mu\left(T^2\right)$, $\mu > 1$, $p \in (1, \mu)$, (x,y) p – точка Лебега функции f, $q > 0$. Тогда

$$\lim_{(m,n)\to\infty} \tilde{h}^{(q)}_{m,n,B}\left(f,x,y\right) = 0,$$

где $B \subset [m, 2m, n, 2n] \cap {N_0}^2$, $N_0 = \{0, 1, \ldots\}$, r_j, $j = 1, 2$ – мощность проекции множества B на соответствующие оси,

$$\tilde{h}^{(q)}_{m,n,B}\left(f,x,y\right) = \left\{\frac{1}{r_1 r_2}\sum_{(j,k)\in B}\left|\rho_{j,k}\left(f,x,y\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \cdot$$

$$\cdot\left(\ln\frac{(m+1)\,e}{r_1}\ln\frac{(m+1)}{r_2}e\right)^{-1}.$$

Пусть ϕ_γ, $\gamma > 0$ – множество функций φ возрастающие и непрерывные на $[0, \infty)$, для которых $\varphi\left(0\right) = 0$, $\varphi\left(u\right) > 0$, $u > 0$; $\varphi\left(2u\right) \leq a\varphi\left(u\right)$, $\forall u \in [0, \sigma_1]$, $\ln\varphi\left(u\right) = 0\left(u^\gamma\right)$, $u \to \infty$.

Теорема. *Пусть $f \in L_\mu\left(T^2\right)$, $\mu > 1$, $p \in (1, \mu)$, $(x,y)\,p$ – точка Лебега функции f, $\varphi \in \phi_{\frac{1}{2}}$. Тогда*

$$\frac{1}{(m+1)\,(n+1)}\sum_{j=m}^{2m}\sum_{k=n}^{2n}\varphi\left(\left|\rho_{j,k}\left(f,x,y\right)\right|\right) \leq A\varphi\left(\varepsilon_{m,n}\left(f,x,y\right)\right),$$

где $\varepsilon_{m,n}\left(f,x,y\right) = \sup h^{(1)}_{m_1,n_1}\left(f,x,y\right)$, а sup берется по всевозможным значениям входящих параметров $m_1 \geq m$, $n_1 \geq n$, A – постоянное число.

Нелокальная задача для нагруженного псевдопараболического уравнения с условием А.М. Нахушева

Холиков Д.К.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; xoliqov23@mail.ru

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим нагруженное уравнение в частных производных третьего порядка

$$Lu = f(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\alpha}^{\beta} u(x,t)dx, \tag{1}$$

здесь

$$Lu \equiv u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_x + d(x,t)u_t + e(x,t)u;$$

$a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$, $e(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные функции, а α и β – действительные постоянные, причем $0 \le \alpha < \beta \le l$.

Для уравнения (1) исследуем нелокальную задачу с условием типа А.М. Нахушева в следующей постановке: *найти в области D решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$ удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и следующим граничным условиям

$$u(0,t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)u\left(x_k,t\right) + \psi_1\left(t\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x\left(0,t\right) = \psi_2\left(t\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где x_k – произвольные фиксированные точки, причем $0 \le x_1 < x_2 < ... < x_n \le l$; $\varphi(x), \psi_1(t), \psi_2(t), \alpha_k(t)$ – заданные функции, такие что

$$\varphi^{'}\left(0\right) = \psi_2^{'}\left(0\right), \qquad \varphi\left(0\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(0)\varphi(x_k) + \psi_1\left(0\right).$$

В работе доказаны существование и единственность решения нелокальной задачи (1)–(4) для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

Работа выполнена при поддержке Международного Узбекско–Российского гранта MRU–OT–1/2017.

О задаче типа задачи Бицадзе – Самарского для нагруженного уравнения смешанного типа

Хубиев К.У.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; khubiev_math@mail.ru

В области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$, где $\Omega_1 = \{0 < x < 1, 0 < y < T\}$, $\Omega_2 = \{y < x < y+1, y < 0\}$, $J = \{0 < x < 1, y = 0\}$ для уравнения

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1(x,y)u(x,0) = f_1(x,y), \quad y > 0, \\ u_x + u_y + c(x,y)u + \lambda_2(x,y)u(x-y,0) = f_2(x,y), \ y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $c(x,y), \lambda_i(x,y), f_i(x,y)$ – заданные функции ($i = 1,2$), исследуется

Задача BS. *Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2_x(\Omega_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и условиям:*

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \quad 0 \le y \le T, \tag{2}$$

$$u(1,y) = \sum_{j=1}^{n} p_j(y)u(x_j,y) + \rho(y), \quad 0 < x_1 < ... < x_n < 1, \ n < \infty, \tag{3}$$

где $\varphi_0(y), p_j(y), \rho(y)$ – заданные функции.

Краевые задачи для модельных нагруженных уравнений смешанного типа с вырождением порядка в области его гиперболичности исследованы в [1, с. 159, с. 176], [2]. Задачи с условиями вида (3) для обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений эллиптического и смешанного типов исследованы в [3]–[5]. В данной работе доказана теорема существования и единственности решения задачи **BS**.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. *Хубиев К.У.* Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 149. С. 113–117.
3. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Нелокальная краевая задача для оператора Штурма – Лиувилля в дифференциальной и разностной постановках // Доклады АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 534–539.
4. *Нахушева З.А.* Об одной нелокальной эллиптической краевой задаче типа задачи Бицадзе – Самарского // Доклады АМАН. 2013. Т. 15, № 1. С. 18–23.
5. *Хубиев К.У.* Внутреннекраевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2008. № 6. С. 23–25.

Третья краевая задача в полуполосе для уравнения дробной диффузии

Хуштова Ф.Г.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; khushtova@yandex.ru

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где D_{0y}^{α} – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, $0 < \alpha \leqslant 1$ [1, с. 11], [2, с. 14]. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и такую, что $y^{1-\alpha}u \in C(\bar{\Omega})$, u_{xx}, $D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$u_x(0,y) = hu(0,y) - \nu(y), \quad 0 < y < T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$, $\nu(y)$ – заданные функции, $h = const$.

Далее $f(y) * g(y)$ – свертка Лапласа, $\alpha = 2\beta$, $\phi\left(-\beta, \beta; z\right)$ – функция Райта [2], $E_{\frac{1}{\beta}}\left(z; \beta\right)$ – функция типа Миттаг-Леффлера [3]. Обозначим

$$G^*(x,\xi,y) = G(x,\xi,y) - h\varPhi(x,\xi,y) * E(y),$$

$$G(x,\xi,y) = \frac{y^{\beta-1}}{2}\left[\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{|x-\xi|}{y^{\beta}}\right) + \phi\left(-\beta,\beta;-\frac{x+\xi}{y^{\beta}}\right)\right],$$

$$\varPhi(x,\xi,y) = y^{\beta-1}\phi\left(-\beta,\beta;-\frac{x+\xi}{y^{\beta}}\right), \quad E(y) = y^{\beta-1}E_{\frac{1}{\beta}}\left(-hy^{\beta};\beta\right).$$

Теорема. *Пусть $\varphi(x) \in C[0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) \exp\left(-\rho\, x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0$, $\rho < (2-\alpha)\, 2^{-\frac{2}{2-\alpha}} \left(\alpha/T\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$, $y^{1-\alpha}\nu(y) \in C[0,T]$. Тогда функция*

$$u(x,y) = \int\limits_0^{\infty} G^*(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^{y} G^*(x,0,y-\eta)\nu(\eta)d\eta$$

является решением задачи (1)–(3).

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
3. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Задача линейного сопряжения для эллиптической системы

Чернова О.В.

НИУ «БелГУ», Белгород, Россия; volga@mail.ru

Пусть $A \in C^{l\times l}-$ постоянная матрица, не имеющая вещественных собственных значений. Дифференциальный оператор $L_A = \partial/\partial y - A\partial/\partial x$ действует в классе $l-$вектор–функций и определяется матрицей A. Пусть Γ простой гладкий ориентируемый контур класса $C^{1,\nu}$ и открытое множество $D = \mathbb{C}\setminus\Gamma = D_1\cup D_2$, где область $D_1(D_2)$ конечна (бесконечна). Рассмотрим в D эллиптическую систему первого порядка

$$L_AU(z) + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

где $l\times l-$матричные коэффициенты a, b комплексны и заданы вне Γ. Задача линейного сопряжения для системы (1) ставится следующим краевым условием

$$C_{11}U^+(t) - C_{12}U^-(t) + \overline{C_{21}U^+(t) - C_{22}U^-(t)} = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

где $l\times l-$матричные коэффициенты $C_{ij} \in C^\nu(\Gamma)$ и черта означает комплексное сопряжение. Обозначим $C^\mu_\delta(\widehat{D},\infty), -1<\delta<0$ класс функций, определенный условием принадлежности их $C^\mu(\overline{D}_1)$, $\mu<\nu$ и весовому классу $C^\mu_\delta(\overline{D}_2,\infty)$, $-1<\delta<0$, определенному в [1]. Предполагая, что

$$a,\, b \in C^\mu_{\delta_0}(\widehat{D},\infty),\ f(t)\in C^\mu(\Gamma),\ F\in C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D},\infty),\ \delta_0<-1<\delta<0, \tag{3}$$

решение задачи (1)–(2) ищем в классе $C^\mu_{A,\delta}(\widehat{D},\infty)$, который явно определяется условиями

$$U \in C^\mu_\delta(\widehat{D},\infty), \quad L_AU \in C^\mu_{\delta-1}(\widehat{D},\infty). \tag{4}$$

Пусть $G(t)$ есть $2l\times 2l$ матрица–функция, элементы которой определяются коэффициентами C_{ij} условия (2) и элементами обратимой матрицы $B = (B_1, \overline{B}_2) \in \mathbb{C}^{l\times l}$, где $B_j =\downarrow (B_{1j}, B_{2j}) \in \mathbb{C}^{l\times l_j}, j = 1,2$.

Теорема. *В предположении (3), условие* $\det G(t) \neq 0$ *необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1)–(2) в классе (4) и ее индекс дается формулой* $æ = -2\,\mathrm{Ind}\,G$, *где* $\mathrm{Ind}\,G-$*индекс Коши матрицы–функции* G *на контуре* Γ, *ориентированном положительно по отношению к* D.

Литература

1. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63. С. 1–189.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект №1.7311.2017/8.9.)

Структурные свойства категории путей

Чернышев Г.В.

ИИПРУ КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; chern_gen@mail333.com

Формальное описание базируем на языке теории категорий [1], вводим категорию путей $\mathbb{C}_P$ [2]: класс объектов $O_P = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots\}$ с выделенным объектом v_r; множество морфизмов $M_P(v_i, v_j) ::- \langle v_i, \dots v_j\rangle$ с $|M_P(v_i, v_j)| = 1$ для всех $v_i, v_j \in O_P$; композицию морфизмов $(\circ)$, определяемую правилом конкатенации последовательностей; единичные морфизмы $1_v = \langle v\rangle$ для каждого $v \in O_P$.

Для введенной категории в докладе обсуждаются следующие результаты.

Предложение 1. *В категории $\mathbb{C}_P$ следующие условия эквивалентны:*

1) $|M_P(v_i, v_j)| = 1$ *для всех* $v_i, v_j \in O_P$*;*

2) *представления любых характеризующих морфизмов имеют одинаковые объекты, расположенные в начальном непрерывном фрагменте каждого из этих представлений.*

Предложение 2. *Терминальные характеризующие морфизмы из $\mathbb{C}_P$ являются образующими этой категории.*

Замечание 1. Любое подмножество терминальных характеризующих морфизмов фактически является представлением иерархической структуры с корнем v_r.

Теорема 3. *Существует функтор, порождающий из категории $\mathbb{C}_P$ с выделенным объектом v_r эквивалентную ей категорию $\mathbb{C}'_P$ с выделенным объектом v'_r ($v_r \neq v'_r$).*

Замечание 2. Из доказательства теоремы 3 следует конструктивный способ смены корня иерархической структуры.

Литература

1. *Маклейн С.* Категории для работающего математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 352 с.

2. *Чернышев Г.В.* Представление иерархических структур последовательностями // Известия КБНЦ РАН. 2015. № 2(64). С. 36–41.

Сравнение методов идентификации интенсивности источника загрязнения атмосферы

Чубатов А.А.[1]**, _Кармазан В.Н._**[2]

[1]*АГПУ, Армавир, Россия; chaa@inbox.ru*
[2]*КубГУ, Краснодар, Россия; karmazin@kubsu.ru*

Работа продолжает исследования представленные в [1]. В статье [1] описана математическая модель применения метода функциональной аппроксимации — последовательного future-time метода, использующего r последующих шагов по времени. Число r играет роль дискретного параметра регуляризации.

В данной работе произведен анализ решений (оценок интенсивности) полученных методами: функциональной аппроксимации и методом регуляризации на основе расширенных нормальных систем (РРНС) [2].

Подход основанный на использовании регуляризованных расширенных нормальных систем (РРНС), позволяет снять проблему выбора параметра регуляризации: необходимо только согласовать α с погрешностью входных данных (матрицы и правой части).

Проведены вычислительные эксперименты, построены устойчивые численные приближения искомой интенсивности при наличии погрешностей в исходных данных. Для оценки качества выбора α конкретным методом используем коэффициент эффективности $\eta_{eff}(\alpha_{meth}) \in [0;1]$

$$\eta_{eff}(\alpha_{meth}) = \|g(\alpha_{best}) - \bar{g}\| \, / \, \|g(\alpha_{meth}) - \bar{g}\| \, ,$$

где $\alpha_{best} = \arg\min\limits_{\alpha} \|g(\alpha) - \bar{g}\|$ — лучшее α, $\bar{g}$ — точное решение.

Отметим, что, не смотря на свою простоту, метод функциональной аппроксимации дает погрешности оценки интенсивности сопоставимые с методом РРНС.

Литература

1. *Чубатов А.А., Темердашев М.З., Кармазин В.Н.* Экспрессный метод мониторинга источника загрязнения атмосферы // Наука Кубани. 2013. С. 11-16

2. *Чубатов А.А.* Об одном алгоритме решения плохообусловленной переопределенной системы линейных уравнений // XIV Всерос. конф. мол. уч. по матем. моделир. и инф. технол., Томск, 2013. С. 32–33.

Принцип наименьшего действия в d-анализе для квазиодномерного случая

Чуриков В.А.

Томск, Россия; vachurikov@list.ru

Рассмотрим функцию Лагранжа $L^s(x_s, \dot{x}_s, t)$ для материальной точки в пространстве однородного фрактала $\mathbb{R}^s$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ (квазиодномерный случай), где x_s– координата и $\dot{x}_s$– фрактальная скорость с физическими размерностями $x_s = [l^s]$ и $\dot{x}_s = [l^s/t]$, l – длина, а t – одномерное время.

Действие S на временном отрезке $[t_1, t_1+\Delta t]$ выражается через функционал: $S = \int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t} L^s(x_s, \dot{x}_s, t)dt$.

Принцип наименьшего действия основан на нулевой вариации действия $\delta S/\delta x_s = 0$. Варьируя функционал и беря производные в рамках d-анализа, т. е. используя d-оператор и интегрируя по частям, получим:

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t} \left(\frac{\partial^s L^s}{\partial x^s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^s L^s}{\partial \dot{x}^s} \right) \delta x_s dt = C_{-s}(t)|_{t_1}^{t_1+\Delta t} = \text{const}.$$

Определённый интеграл в d-анализе вычисляется с точностью до *константы интегрирования определённого интеграла* $C_s(t)|_{t_1}^{t_1+\Delta t} \equiv C_s(t_1 + \Delta t) - C_s(t_1) = \text{const}$, где $C_s(t)$ – полином интегрирования. Ноль интеграла обеспечивается, если подынтегральное выражение в скобках, представляющее уравнение Эйлера – Лагранжа, даёт ноль. Для обеспечения минимума необходимо принять дополнительное условие $C_s(t)|_{t_1}^{t_1+\Delta t} = 0$.

Полученная функция Лагранжа будет $L^s(x_s, \dot{x}_s, t) = \frac{m\dot{x}_s^2}{2} - U(x_s)$, где $U(x_s)$ – потенциальная энергия материальной точки, а m, её масса.

Во фрактале должны идти диссипативные процессы. Для их учёта введём диссипативную функцию $F(\dot{x}_s) \geq 0$, учитывая которую получим уравнение движения материальной точки в пространстве $\mathbb{R}^s$

$$\frac{\Gamma(2s)}{\Gamma(s)}(m\ddot{x}_s)^s - \frac{\partial^s}{\partial x_s^s}U(x_s) = -\frac{d^s F}{d\dot{x}_s^s}.$$

Если диссипативная функция $F(\dot{x}_s)$ имеет степенную зависимость от фрактальной скорости как $F(\dot{x}_s) = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_s)^{2s}$, тогда уравнение будет:

$$\frac{\Gamma(2s)}{\Gamma(s)}(m\ddot{x}_s)^s + F_s^s(x) = -\frac{\alpha\Gamma(2s)}{\Gamma(s)}(\dot{x}_s)^s, \qquad \alpha = \text{const}.$$

Здесь $F_s^s(x)$ – сила в пространстве $\mathbb{R}^s$ выражается через фрактальный градиент от потенциальной энергии: $F_s^s(x) = -\frac{\partial^s}{\partial x_s^s}U(x_s)$. Член справа – сила сопротивления материальной точки. $\Gamma(...)$ – гамма-функция.

Колебания, резонансы и волны в нелокальной среде с источниками

Шабловский О.Н.

ГГТУ, Гомель, Беларусь; shablovsky-on@yandex.ru

Волновые уравнения с источниками относятся к фундаментальным уравнениям математической физики. В данной работе речь идет о процессах волнового теплопереноса в системе «среда – источник энергии». Волновое уравнение, учитывающее пространственно нелокальные эффекты переноса, имеет вид:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\tau}{\partial (x')^2} - \varepsilon\chi^2 \frac{\partial^4\tau}{\partial (x')^4} = k_v(\tau, x', t),$$

где $x' = x/w$; x – декартова координата; t – время; $w \equiv \mathrm{const}$ – скорость распространения тепловых возмущений; $\tau\ (x', t)$ характеризует отклонение температуры от равновесного значения; функция $k_v(\tau, x', t)$ определяет воздействие источников энергии; $\chi^2 = \chi_1^2/w^4$, и величина $\varepsilon\chi_1^2$ есть параметр слабой нелокальности задачи (библиография данного вопроса имеется в [1]). Применяем функцию источника $k_v = k_v^1\tau + s_v(x', t)$, k_v^1≡const; неоднородный по координате реономный источник s_v моделирует внешнее воздействие на нелокальную среду. Перечислим основные результаты: 1) построены решения, содержащие волны возмущения и определяющие трансзвуковой переход «дозвук-сверхзвук» (по отношению к скорости w); 2) проанализированы условия возникновения резонансных ситуаций; обнаружена нелинейная корреляция между собственной частотой колебаний и параметром затухания по координате x; 3) установлена важная роль безразмерного комплекса $k_v^1\varepsilon\chi^2$ при оценке границ устойчивости/неустойчивости колебаний; 4) при $s_v \equiv 0$ построено решение, описывающее состояние среды между двумя волнами, разбегающимися в разные стороны, и при $t \to \infty$ переходящее в стоячую волну. Данная работа является продолжением исследований [2].

Литература

1. *Алфимов Г.Л.* Нелокальное уравнение синус-Гордона: решения типа «кинк» в пределе слабой нелокальности // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 4. С. 585–602.

2. *Шабловский О.Н.* Нелокальность и возникновение резонансов в динамике волн // Фундаментальные физ.-матем. проблемы и моделирование технико-технологических систем. Вып. 18, М.: Янус-К, 2017. С. 125–138.

Алгоритм автоматического контроля скрытых изображений методами цифровой фильтрации

Шагрова Г.В., Жарких А.А., Дроздова В.И., Романенко М.Г.

СКФУ, Ставрополь, Россия; ist@stv.runnet.ru

Для решения задачи контроля скрытых изображений применяются методы, основанные на цифровой фильтрации [1]. На основе использования этих методов разработан алгоритм решения задачи автоматического контроля скрытых изображений, в которой выделены следующие подзадачи:

Задача 1. *Разработка алгоритма получения изображения, пригодного для анализа, с камеры и локальных или сетевых хранилищ.* Разработанный алгоритм включает в себя описание последовательности действий при захвате объекта контроля (документа, защищенного скрытым изображением) с камеры, отделения его от фона, а также требуемые коррекции яркости и контрастности анализируемого изображения, которые необходимы для проведения контроля. При отсутствии в области видимости устройства захвата пригодных для исследования объектов, представлена последовательность их поиска на различных хранилищах.

Задача 2. *Разработка алгоритма визуализации скрытых изображений для определения подлинности документа.* Алгоритм решения данной подзадачи зависит от того известен ли метод встраивания скрытого изображения или нет. В результате разработаны алгоритмы определения подлинности для случаев с конкретным и неустановленным методом встраивания изображения в защищаемый объект. В первом случае визуализация скрытого изображения осуществляется с использованием соответствующего фильтра из базы фильтров. Во втором случае осуществляется вейвлет-анализ изображения исследуемого документа.

Задача 3. *Разработка алгоритма принятия решения о последующих действиях.* Принятие решения о последующих действиях, выполняемых устройством контроля после определения подлинности документа, возможно двумя способами: автоматически и с подтверждением оператора. В первом случае оно автоматически принимается на основании результата проверки подлинности анализируемого объекта. Во втором случае окончательное решение о подлинности документа принимает оператор на основании выведенной на экран информации.

Литература

1. *Шагрова Г.В., Топчиев И.Н.* Способы формирования и выявления латентных изображений // Наукоемкие технологии. 2012. Т. 13. № 7. С. 88–93.

Структурная и параметрическая идентификация функций принадлежности нечетких множеств

Шамилова Б.Г.

БГУ, Баку, Азербайджан; bahar322@mail.ru

Рассматривается следующая задача построения функции принадлежности числового нечеткого множества по имеющимся экспериментальным данным о значениях принадлежности нечеткому множеству некоторых числовых данных.

Заданы N значений m_i принадлежности чисел x_i определенному нечеткому множеству A, $i = 1, \ldots, N$. Требуется по этим данным на классе кусочно-непрерывных функций построить функцию принадлежности нечеткого множества $A - \mu_A(x)$ такую, что $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$, $x \in R$. Для каждого интервала (a_s, a_{s+1}) непрерывности функции $\mu_A(x)$ используется параметрически заданный класс непрерывных функций $f(x, p^s)$, $p^s \in R^{k_s}$, $s = 0, \ldots, N_s - 1, N_s$ – число интервалов.

Задача идентификации функции принадлежности $\mu_A(x)$ заключается в оптимизации: 1) числа N_s интервалов кусочно-непрерывности функции принадлежности; 2) границ этих интервалов a_s, $s = 0, \ldots, N_s - 1$; 3) параметров p^s функции принадлежности для каждого из интервалов, $s = 0, \ldots, N_s - 1$.

В качестве критерия оптимальности использована функция среднеквадратичного отклонения. Получены аналитические формулы для компонент градиента целевой функции, позволившие использовать для решения задачи эффективные методы оптимизации первого порядка.

В докладе приводятся результаты численных экспериментов и их анализ.

Об общих точных решениях уравнений Навье – Стокса и квазигидродинамической системы

Шеретов Ю.В.

ТвГУ, Тверь, Россия; Sheretov.YV@tversu.ru

Квазигидродинамическая (КГД) система для слабосжимаемой вязкой жидкости была предложена автором в 1993 г. Физические принципы, лежащие в основе её построения, изложены в [1]. Указанная КГД система является диссипативной и обладает серией точных физически адекватных решений [2]. Она имеет глубокие связи с классическими моделями Навье–Стокса и Эйлера.

Точные решения КГД системы можно разделить на три непересекающихся класса. Решения первого класса удовлетворяют соответствующим системам Навье-Стокса и Эйлера. Исследованию решений второго класса, которые являются точными для системы Навье-Стокса, но не приводят к истинным равенствам при подстановке в уравнения Эйлера, посвящены работы [3–5]. В частности, приведены примеры общих точных решений систем Навье-Стокса и КГД, подчиняющихся обобщенному условию Громеки-Бельтрами. Труднее всего строить точные решения КГД системы третьего класса, не удовлетворяющие уравнениям Навье-Стокса и Эйлера. Пример такого решения можно найти в [1, стр. 106-107].

Литература

1. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

2. *Шеретов Ю.В.* Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

3. *Шеретов Ю.В.* О общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15.

4. *Шеретов Ю.В.* Об общих точных решениях системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25.

5. *Шеретов Ю.В.* О точных решениях квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. (В печати)

Об одной краевой задаче для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка

Шерматова Х.М.

ФерГУ, Фергана, Узбекистан; hilola-1978@mail.ru

В настоящей статье ставится краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа $(a(\partial/\partial x)+c)(Lu)=0$ в области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2$; $a,c\in R$, $a\neq 0$,

$$Lu=\begin{cases} u_{xx}-u_y, & (x,\,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,\,y)\in G_i,\ i=2,\,3,\end{cases}$$

$G_1=\{(x,\,y):\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$, $G_2=\{(x,\,y):\ -1<y<0,\ -1-y<x<y+1\}$, $G_3=\{(x,\,y):-1<x<0,\,0<y<1\}$, $J_1=\{(x,\,y):y=0,\ -1<x<1\}$, $J_2=\{(x,\,y):\ x=0,\ -1<y<1\}$.

Для уравнения $(a(\partial/\partial x)+c)(Lu)=0$ ставится следующая задача:

Задача 1. *Найти непрерывную в* $\overline{G}$, *функцию* $u\,(x,\,y)$ *удовлетворяющую уравнению* $(a(\partial/\partial x)+c)(Lu)=0$ *в области* G *при* $x\neq 0,\ y\neq 0$, *а на границе области краевым условиям:*

$$u\,(1,\,y)=\varphi_1\,(y)\,,u\,(-1,\,y)=\varphi_2\,(y)\,,u_x\,(-1,\,y)=\varphi_3\,(y)\,,\ \ 0\le y\le 1;$$

$$u|_{y=x-1}=\psi_1\,(x)\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=x-1}=\psi_3\,(x)\,,\ \ 0\le x\le 1;$$

$$u|_{y=-x-1}=\psi_2\,(x)\,,\ \ -1\le x\le -1/2\,;$$

и условиям склеивания вида:

$$u\,(x,\,+0)=u\,(x,-0)\,,u_y\,(x,\,+0)=u_y\,(x,\,-0)\,,u\,(+0,\,y)=u\,(-0,\,y)\,,$$

$$u_x\,(+0,\,y)=u_x\,(-0,\,y)\,,u_{xx}\,(+0,\,y)=u_{xx}\,(-0,\,y)\,,\ 0\le x,y\le 1,$$

где $\varphi_i,\ \ \psi_i, i=\overline{1,3}$ *заданные достаточно гладкие функции,* n – *внутренняя нормаль к прямой* $x+y=-1$ *или* $x-y=1$, *а* $E_1\,(-1/2\,,-1/2\,)$.

Теорема. *Если* $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \psi_1\in C^3\,[0,\,1]$, $\varphi_3,\ \ \psi_3\in C^2\,[0,\,1]$, $\psi_2\in C^3\,[-1,\,-1/2\,]$, $\psi_1\,(1)=\varphi_1\,(0)$, $\psi_2\,(-1)=\varphi_2\,(0)$, *то задача 1 допускает единственное решение.*

Об одном робастном методе кластеризации на основе поиска центров кластеров

Шибзухов З.М.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россиия; szport@gmail.com

Один классический общий метод поиска центров кластеров основан на минимизации функции

$$\mathcal{Q}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} D(\mathbf{x}_k, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K),$$

где

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K) = \min_{j=1,\ldots,K} d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j).$$

Здесь $\mathbf{x}, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K \in \mathbb{R}^n$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ – функция псевдорасстояния. Например, $d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \rho(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|)$. Однако, если в распределении значений $D_1, \ldots, D_N$, где $D_k = D(\mathbf{x}_k, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K)$, содержатся выбросы, то в результате минимизации функции $\mathcal{Q}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K)$ могут быть получены смещенные значения для центров кластеров.

Для преодоления этой проблемы предлагается использовать вместо среднего арифметического робастные оценки среднего, которые определяются следующим образом:

$$\mathsf{M}_\rho\{z_1, \ldots, z_N\} = \arg\min_u \sum_{k=1}^{N} \rho(z_k, u),$$

где $\rho(z, u)$ – функция несходства. Функция $\mathcal{Q}$ принимает вид:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K) = \mathsf{M}_\rho\{D(\mathbf{x}_1, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k), \ldots, D(\mathbf{x}_N, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k)\}.$$

Для ее минимизации можно применить процедуру итеративного перевзвешивания. В ней на каждом шаге t решается задача минимизации

$$\mathcal{Q}_t(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K) = \sum_{k=1}^{N} v_{tk} D(\mathbf{x}_k, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_K),$$

где $(v_{t1}, \ldots, v_{tN}) = \nabla\mathsf{M}_\rho\{D(\mathbf{x}_1, \mathbf{c}_{t,1}, \ldots, \mathbf{c}_{t,k}), \ldots, D(\mathbf{x}_N, \mathbf{c}_{t,1}, \ldots, \mathbf{c}_{t,k})\}$, где $\mathbf{c}_{t,1}, \ldots, \mathbf{c}_{t,k}$ – центры кластеров, вычисленные на шаге t. В результате находятся новые центры кластеров $\mathbf{c}_{t+1,1}, \ldots, \mathbf{c}_{t+1,k}$.

Литература

1. *Shibzukhov Z.M.* On the Principle of Empirical Risk Minimization Based on Averaging Aggregation Functions // Doklady Mathematics. 2017. T. 96, № 2. C. 494–497.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00050-а.

Краевые задачи для стационарного уравнения Бейли

Шогенова Е.М.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; shogenovae@inbox.ru

В работе [1] исследуются задачи Гурса для неоднородного дифференциального уравнения гиперболического типа. В [2, стр. 128] приводится ультрагиперболическое уравнение Бейли

$$(y^2 - xy)u_{xy} + \rho(1-y)u_y = u_t, \tag{1}$$

которое выступает как стохастическая модель эпидемии. Здесь $u(x, y, t)$ означает производящую функцию вероятностей, x – число восприимчивых индивидуумов к инфекции, y – число источников инфекции, $\rho = \frac{\gamma}{\lambda}$ – относительную частоту удаления зараженных индивидуумов, λ – частоту контактов, γ – частоту удаления из коллектива зараженных индивидуумов [3, стр. 212].

В работе рассматриваются краевые задачи для уравнения (1) в случае его стационарности. Выписываются решения поставленных задач в явном виде.

Литература

1. *Куликова Н.А.* Задачи Гурса для неоднородного дифференциального уравнения гиперболического типа // Математическая физика и нанотехнологии: материалы и доклады Международной методологической школы-конференции, Самара: Сер. «Современные проблемы математической физики», 2009. С. 54–58.

2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

3. *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1981. 326 с.

Устойчивость и сходимость решения краевой задачи Каттабрига для классического уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

Шхагапсоев А.М.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; sh2ps@yandex.ru

Уравнения третьего порядка с кратными характеристиками содержащее производную первого порядка по времени

$$u_t = u_{xxx} + \lambda_1(x,t)u_x + \lambda_2(x,t)u + f(x,t)$$

впервые было рассмотрено в работах [1, 2] при $\lambda_1, \lambda_2, f = 0$. Полученные в них результаты были обобщены в работах [3, 4]. Рассмотрим следующую задачу.

Задача. В прямоугольной области $D = \{(x,t) : 0 < x < r,\ 0 < t < h\}$ рассмотрим уравнение

$$u_t = u_{xxx} + \lambda_1(x,t)u_x + \lambda_2(x,t)u + f(x,t), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(r,t) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \quad 0 < t < h, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 < x < r. \tag{3}$$

В настоящей работе методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения дифференциальной задачи и соответствующей разностной задачи для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капуто по времени.

Литература

1. *Block H.* Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples // Ark. mat., astron., fys. 1912. Vol. 3, № 13. P. 1–34.

2. *Del Vecchio E.* Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x,y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_1(x,y) = 0$ // Mem. Real acad. cienc. Torino. 1915. Vol. 66. P. 1–41.

3. *Cattabriga L.* Potenzialli di linia edi domino per equation nom paraboliche in olue variabli a caracteristiche multiple // Rendi del Som. Mat. della Univ. di Padova. 1961. Vol. 3. P. 1–45.

4. *Cattabriga L.* Un problema al kontorno per una equazione di ordine dispary // Analli della scuola normale superior di pisa fis e mat. 1959. Vol. 13, № 2. P. 163–169.

Коэффициент смертности как предиктор ожидаемой предстоящей продолжительности жизни в преклонном возрасте

Эдиев Д.М.

СевКавГГТА, Черкесск, Россия; dalkhat@hotmail.com

В работе предлагается эконометрическая модель ожидаемой предстоящей продолжительности жизни в преклонном возрасте (x) как функции возрастного коэффициента смертности в том же возрасте x лет и дополнительных уточняющих демографических переменных. Предлагаемая модель апробирована на данных международной базы данных по смертности Human Mortality Database и показала точность, превосходящую точность традиционного экстраполяционного метода. Разработанная модель, в комбинации с методом условной экстраполяции (Ediev 2017) может быть полезна при оценке показателей смертности и продолжительности жизни престарелого населения в условиях, когда не могут быть использованы методы на основе моделей Хориучи-Коула и Митры (Ediev 2018; Horiuchi and Coale 1982; Mitra 1984).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 18-01-00289 «Математические модели и методы устранения искажений показателей смертности и продолжительности жизни престарелого населения»).

Математическое моделирование динамики возрастной структуры населения в старших возрастах

Эдиев Д.М.

СевКавГГТА, Черкесск, Россия; dalkhat@hotmail.com

В работе проводится математико-демографическое моделирование динамики возрастной структуры населения в старших возрастах при заданных оценках возрастной структуры смертности и численности населения в молодом возрасте с использованием моделей передвижки (Keyfitz and Caswell 2005; Luy 2011; Stockwell, Shryock, and Siegel 1976; Veron et al. 2002; Баркалов 1984) и возрастных показателей роста населения (Preston 1986). Указанная модель составляет теоретическую основу для разработки методов уточнения показателей смертности и продолжительности жизни престарелого населения в условиях искажения данных о возрасте.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 18-01-00289 «Математические модели и методы устранения искажений показателей смертности и продолжительности жизни престарелого населения»).

Демографические аспекты пенсионной реформы в России

Эдиев Д.М.

СевКавГГТА, Черкесск, Россия; dalkhat@hotmail.com

На основе уточненных данных о возрастной структуре и продолжительности жизни населения России в преклонном возрасте, проведен анализ демографических аспектов пенсионной реформы. Впервые представлены когортные оценки показателей дожития и демографической нагрузки. Показано, что, с одной стороны, назрела необходимость оздоровления баланса пенсионной системы в России, но, в то же время, показатели дожития мужского населения недостаточны для предложенной реформы. Полученные результаты указывают на острую необходимость дополнения реформы компенсаторными мерами и обеспечением условия раннего выходя на пенсию для лиц с ослабленным здоровьем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 18-010-01169 «Демографические изменения и экономический рост»).

Алгоритм покрытия предфрактального графа

Эльканова Л.М.

СевКавГГТА, Черкесск, Россия; Liza_Elkanova@mail.ru

Исследование сложных систем, к которым относятся современные сетевые системы, приводит к необходимости решать задачи, связанные с большими данными (Big data). Появляется необходимость в создании новых технологий обработки, хранения и анализа больших данных,разнородных по содержанию и структуре Одной из практических задач, связанных с задачами больших данных является задача маршрутизации. Для моделирования транспортных потоков в задачах с большими данными будем использовать предфрактальные [1] графы [2].

Рассмотрим [3] предфрактальный граф $G = (V_l, E_l)$, где $l = \overline{1, L}$ с затравкой $H = (W, Q)$. Под цепью C_t, $t = \overline{1, T}$ на предфрактальном графе будем понимать кратчайший маршрут между двумя парами вершин (v_i, v_j). Длина цепи $|c_t|$ — есть сумма всех весов ребер, входящих в эту цепь. Множество $C = c_t$ таких цепей, которые не включают полностью одна цепь c_t другую, т.е. ни одна из выделенных цепей не является подмножеством другой цепи, назовем покрытием предфрактального графа $G = (V_l, E_l)$, если каждая вершина инцидента хотя бы одной цепи. Обозначим его x. Множество всех покрытий обозначим через X, которое будем называть множеством допустимых решений.

Для построенного алгоритма α выделения покрытия на предфрактальном графе справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Алгоритм α строит покрытие предфрактального графа $G_l = (V_l, E_l)$ с затравкой $H = (W, Q)$, $l = \overline{1, L}$.*

Теорема 2. *Для всякого предфрактального графа $G_l = (V_l, E_l)$, $l = \overline{1, L}$ с затравкой $H = (W, Q)$, алгоритм α строит покрытие с оценками по критериям векторно-целевой функции: $f_1(x) \le \binom{(n-d_i+l)^2}{2}$, где $d_l = (2l-1)d$ – диаметр предфрактального графа; $G_l = (V_l, E_l)$; $f_2(x) \le 2 + 2^{l-1}$; $2 \le f_3(x) \le (n-1)^l, l = \overline{1, L}$.*

Литература

1. *Кочкаров А.М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998.

2. *Емеличев В.А.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

3. *Кочкаров Р.А.* Многовзвешенные предфрактальные графы с недетерминированными весами. М.: Озон, 2017.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-07-00231а.

Неравенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными началами

Энеева Л.М.

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; eneeva72@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) - q(x)u(x) = 0, \tag{1}$$

где D_{0x}^{α} и ∂_{1x}^{α} – дробные производные Римана – Лиувилля и Капуто порядка α с началом в точке $x = 0$ и в точке $x = 1$, соответственно, [1]; $q(x) \in C[0, 1]$; $\alpha \in]1/2, 1]$; $x \in]0, 1[$.

Уравнение (1) является модельным уравнением движения во фрактальной среде, возникающим при учете эффективной скорости [2], [3]. В случае, когда $q(x) \equiv const$ для уравнения (1) исследовались задача Дирихле [4], [5] и задача Неймана [6].

В данной работе доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Пусть уравнение (1) имеет нетривиальное решение $u(x)$, удовлетворяющее условиям $u(0) = u(1) = 0$. Тогда*

$$\int_0^1 |q(x)|\,dx > \frac{1}{h}(2\alpha - 1)\Gamma^2(\alpha),$$

где $h = \sup_{x\in(0,1)}\left[(1-x)^{2\alpha-1} - \left(1 - x^{2\alpha-1}\right)^2\right]$.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М: Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Рехвиашвили С.Ш.* К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования // Нелинейный мир. 2007. Т. 5, № 4. С. 194–197.

3. *Рехвиашвили С.Ш.* Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, № 2. С. 33–37.

4. *Энеева Л.М.* Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 3, № 2(11). С. 39–44.

5. *Энеева Л.М.* Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Известия КБНЦ РАН. 2017. № 1(75). С. 34–40.

6. *Энеева Л.М.* О задаче Неймана для уравнения с дробными производными с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. (в печати).

Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором непрерывно распределенного дифференцирования

Эфендиев Б.И.

_ИПМА, Нальчик, Россия; beslan_efendiev@mail.ru_

В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$\int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} u(x) d\alpha + \lambda u(x) = f(x), \qquad (1)$$

где

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

– оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля порядка α [1], $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $\mu(\alpha)$, $f(x)$ – заданные функции, λ – заданная постоянная.

Дифференциальный оператор вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} a_{\xi}(x) D_{0x}^{\xi} u(x) d\xi$$

был впервые введен в работе [1], а в [2] изучены его свойства.

В данной работе построено фундаментальное решение уравнения (1) и изучены его свойства. Найдено решение задачи Коши для уравнения (1) в явном виде. Доказана теорема единственности и существования решения исследуемой задачи.

Литература

1. _Нахушев А.М._ О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.

2. _Нахушев А.М._ О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00462.

О разрешимости краевой задачи для одного квазилинейного уравнения четного порядка

Юлдашева А.В.

НУУз, Ташкент, Узбекистан; yuasv86@mail.ru

В работе исследуется вопрос разрешимости следующей задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(t,x,u,u_t), (t,x) \in D\{0 < t < T, 0 < x < \pi\},\ k \in \mathbb{N},$$

$$u(0,x) = \varphi(x), u_t(T,x) = \psi(x),\ 0 \le x \le \pi,$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\ |_{x=0} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\ |_{x=\pi},\ \ i = 1,2,...,2k,\ 0 \le t \le T,$$

здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(t,x,u)$ – заданные функции, определенные на $[0,\pi]$ и $\overline{D} \times R^2$ соответственно и $u(t,x)$ – решение задачи.

Определение 1. Функцию $v(t,x) \in C(\overline{D})$ будем называть *тест функцией*, если она имеет непрерывные производные участвующие в уравнении, а также удовлетворяет краевым и следующим условиям

$$v(0,x) = v_t(T,x) = 0.$$

Определение 2. Функцию $u(t,x) \in C(\overline{D})$, удовлетворяющую интегральному равенству

$$\int_0^T \int_0^\pi \left\{ u \left[\tfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \tfrac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} \right] - f(t,x,u,u_t) v \right\} dxdt + \textstyle\int_0^\pi \psi(x) v(T,x) dx +$$
$$+ \int_0^\pi \varphi(x) v_t(0,x) dx = 0 \quad (1)$$

для произвольной функции $v(t,x)$ назовем *слабым обобщенным решением* рассматриваемой задачи.

Доказывается единственность, существование, а так же непрерывная зависимость слабого обобщенного решения от данных. Слабое решение ищется в виде ряда Фурье с неизвестными коэффициентам, которые определяются как решение системы интегральных уравнений. Решение найдено в банаховом пространстве B_T.

Литература

1. *Chandrov H.I.*On mixed problem for a class of quasilinear hyperbolic equation. Tbilisi, 1970.
2. *Halilov H.* On mixed problem for a class of quasilinear pseudo-parabolic equations // Applicable Analysis. 2000. Vol. 75, № 1-2. P. 61–71.

Решение юридических задач с помощью комбинаторики

Юнусова М.С.

ТГЮУ, Ташкент, Узбекистан; munir-1972@mail.ru

Комбинаторика - это отрасль математики, которая изучает конечные или дискретные множества и структуры (таких графов). Профессиональный юрист должен уметь логически комбинировать объекты. Во многих случаях практика приводит к так называемым комбинаторным задачам. Для логического комбинирования имеются ряд программных средств с искусственным интеллектом. При подготовки профессиональных юристов нужно их обучить работать на таких программных средствах. К примеру, программные средства ROOT MPriority, Мыслитель Экспресс, ESSChoice, Emperor 3.1. Программы, анализируя параметры подозреваемых, определяет виновника. В программном средстве ROOT MPriority рассмотрим уголовное дело. В программе нужно указывать цель задачи - определить виновника. Исходя из показаний свидетелей вводятся параметры подозреваемого: Критерий-худощавый, высокий, блондин, хромает. Подозреваемые: Алексей, Дмитрий, Коля вводятся в строке альтернативы. Исходя из показаний свидетелей нужно ввести данные как сравнит подозреваемых друг от другом. Юрист исходя из внешнего вида подозреваемого должен заполнить шкалу. В программу нужно ввести нужную информацию и программа сама, анализируя и сопоставив, дает свои выводы.

Итоговый результат показывает, по показаниям свидетелей наиболее подходящим подозреваемый Алексей. Шкала сравнения должна логически соответствовать друг с другом. Например: не должно быть, что Алексей выше, чем Коля, Коля выше, чем Дмитрий и Дмитрий выше, чем Алексей. Таким образом, с помощью комбинаторики и программных средств юрист может определить виновника из подозреваемых. Юристам необходимо изучать элементы математики и программные средства с искусственным интеллектом. Аналитическая комбинаторика направлена на то, чтобы точно предсказать симптоматики свойств структурированных комбинаторных конфигураций посредством подхода, который сам по себе является одним из аналитических методов.

Необходимые условия оптимальности для динамических систем дробного порядка

Юсубов Ш.Ш.

БГУ, Баку, Азербайджан; yusubov_sh@mail.ru

Оптимальное управление динамическими системами дробного порядка представляет собой сравнительно новое направление исследований. Данная работа также посвящена исследованию задачи оптимального управления для систем дробного порядка.

Пусть управляемый процесс на отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ описывается системой дробного порядка

$$ {}_{t_0}^{C}D_{t_1}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния системы, $u \in R^r$ – вектор управления, $f(t, x, u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, $x_0 \in R^n$ – заданная точка. ${}_{t_0}^{C}D_{t_1}^{\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования, $\alpha \in (0, 1]$. Дробную производную будем понимать как левостороннюю дробную производную Капуто. В качестве множества допустимых управлений берем множество кусочно-непрерывных r-мерных вектор-функций $u(t), t \in T$ принимающих значения из заданного непустого ограниченного множества V:

$$u(t) \in V \subset R^r, t \in T.$$

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt, \tag{3}$$

определенного на решениях системы (1),(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, где $\varphi(x)$ и $F(t, x, u)$ – заданные скалярные функции.

При некоторых ограничениях на данные задачи получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Non local BVP for the loaded parabolic-hyperbolic type equation of third order involving Caputo derivatives

Abdullaev O.Kh.[1], Matchanova O.A.[2]

[1]*NUUz, Tashkent, Uzbekistan; obidjon.mth@gmail.com*

[2]*TUIT, Tashkent, Uzbekistan; oygul87-87@mail.ru*

Let's Ω is connected domain, restricted by segments $\{(x,y): x=1, 0\leq y\leq h\}$, $\{(x,y): y=h, 0\leq x\leq 1\}$, $\{(x,y): x=0, 0\leq y\leq h\}$ and by the characteristics $x+y=0$, $x-y=1$ of the wave equation, furthermore $\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y<0\}$.

In Ω, we consider the equation

$$0=Lu\equiv\begin{cases}\left(a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-{}_cD_{0y}^{\alpha}u+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_kI_{0x}^{\beta_k}u(x,0)\right); (x,y)\in\Omega_1,\\ \left(a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}q_kI_{0x}^{\gamma_k}u(x,0)\right); (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}\tag{1}$$

where ${}_cD_{ay}^{\alpha}$ is the partial Caputo fractional derivative of order $0<\alpha,\beta,\gamma<1$, $a,\ b,\ p_k,\ q_k$ are given constants. We will enter definition of regular (classical) solution of the Eq.(1) which will be need further on :

Definition. A function $u(x,y)$ is called a regular solution of the Eq.(1), if $u(x,y)$ has continuously derivatives entering to operator Lu and ${}_CD_{oy}^{\alpha}u\in C\left(\overline{\Omega}_1\right)$, moreover this operator continuously differentiable by x.

Problem I. *Find a regular solution $u(x,y)$ of the Eq.(1) in the domains Ω_1 and Ω_2, which $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ and satisfies the following properties:* 1) *$u(x,y)$ satisfies boundary conditions:*

$$u(0,y)=\varphi_1(y), u(1,y)=\varphi_2(y), 0\leqslant y\leqslant h; u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y), 0\leqslant y<h,$$

$$\frac{d}{dx}u\left(\theta(x)\right)=a_1(x)u_y(x,0)+a_2(x)u_x(x,0)+a_3(x)u(x,0)+a_4(x), 0<x<\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left|_{AC}\right.=\psi(x),\quad 0\leqslant x<\frac{1}{2},$$

2)*on the line of change $\{0\leq x\leq 1, y=0\}$, for the $u(x,y)$ takes place gluing conditions:*

$$\lim_{y\to+0}{}_cD_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)\int\limits_0^x r(t)u(t,0)dt+\lambda_3(x),$$

where $\theta(x)=\theta\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)$, n is an internal normal and $a_j(x)$, $\lambda_j(x)$, $\varphi_i(y)$, $a_4(x)$, $\psi(x)(j=\overline{1,3})$ are given functions, moreover $\lambda_1^2(x)+\lambda_2^2(x)\neq 0$.

Under certain conditions on the given functions an existence and uniqueness of the investigated problem will be proved.

Krylov approximation of matrix functions

Agakhanova Ya.S.

MIPT, Moscow, Russia; ladushki_22@mail.ru

In many applications, the matrix A is large and typically sparse or structured. In this case it is prohibitive to first compute the generally dense matrix f(A) and then form the product with b. The rational Krylov methods reviewed here avoid this problem by using a projection or interpolation approach for computing approximations to the vector f(A) from a low dimensional search space without forming f(A) explicitly. Note that this is different from the direct approximation approach where f is replaced by an explicitly computed rational function r such that $r(A) \approx f(A)$ [1-3]. Therefore a rational Krylov iteration may be considerably more expensive (in terms of computation time) than a polynomial Krylov iteration, which involves only a matrix-vector product with A. The applicability of rational Krylov methods hinges on the efficiency by which these linear systems can be solved. Since rational functions may exhibit approximation properties superior to polynomials, the number of overall iterations required by rational Krylov methods is hopefully smaller than that required by polynomial methods, provided that the poles of the rational functions involved have been chosen in a suitable way.

References

1. *Stahl H.* General convergence results for rational approximants. Approximation Theory VI, edited by C.K. Chui, L.L. Schumaker, and J.D. Ward (Academic Press, Boston, MA, 1989). P. 605–6342.
2. *Saad Y.* Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator. SIAM J. Numer. Anal., 29(1):209–228, 1992.
3. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. SIAM, 2nd edition, 2003.

Resonance in the reaction $\nu e \to W\gamma$

Alikhanov I.[1,2]

[1] *Institute for Nuclear Research, Moscow, Russia;*
[2] *IAMA KBSC RAS, Nalchik, Russia;ialspbu@gmail.com*

The production of on-shell W bosons and photons in interactions of neutrinos with charged leptons has been studied in [1]. The corresponding cross sections grow slowly (logarithmically) with the total reaction energy and do not manifest a resonance structure.

In this work we show that in spite of this behavior the reactions proceed through a resonance excitation. The absence of the traditional resonance structure (the Breit–Wigner distribution) in the cross sections is explained by the smearing effect of the initial state radiation. As an example we consider the following reaction:

$$\bar{\nu}_e e^- \to W^- \gamma. \tag{1}$$

Representing the cross section for (1) as

$$\sigma(s) = \int_0^1 f_{\gamma/e}(1-x, s)\hat{\sigma}_{\bar{\nu}e\to W}(xs)dx, \tag{2}$$

where $f_{\gamma/e}(x,s)$ is the equivalent photon spectrum of the electron, $\hat{\sigma}_{\bar{\nu}e\to W}(s)$ is the cross section for the resonant subprocess $\bar{\nu}_e e^- \to W^-$ [2] (often referred to as the Glashow resonance), one can obtain an accurate reproduction of the behavior of $\sigma(s)$. Therefore reaction (1) is nothing but the Glashow resonance smeared by the initial state radiation and relatively small contributions from other channels which we discuss in detail. The analyzed reaction is similar to processes recently studied in [3,4].

References

1. *Seckel D.* Neutrino photon reactions in astrophysics and cosmology // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80. P. 900–903.

2. *Glashow S.L.* Resonant Scattering of Antineutrinos // Physical Review. 1960. Vol. 118. P. 316–317.

3. *Alikhanov I.* The Glashow resonance in neutrino–photon scattering // Physics Letters B. 2015. Vol. 741. P. 295–300.

4. *Alikhanov I.* Hidden Glashow resonance in neutrino–nucleus collisions // Physics Letters B. 2016. Vol. 756. P. 247–253.

On the boundary value problem with data on the characteristics for partial loaded differential equations of hyperbolic type

Assanova A.T.[1], **_Imanchiyev A.E._**[2], **_Kadirbayeva Z.M._**[3]

[1] *IMMM, Almaty, Kazakhstan; assanova@math.kz*

[2] *K. Zhubanov Aktobe regional State University, Aktobe, Kazakhstan; imanchiev_ae@mail.ru*

[3] *IMMM, Almaty, Kazakhstan; apelman86pm@mail.ru*

On $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ we consider boundary value problem with on the characteristics for partial loaded differential equations of hyperbolic type

$$u_{txx} = A_1(t,x)u_{xx} + A_2(t,x)u_{tx} + A_3(t,x)u_x + A_4(t,x)u_t + A_5(t,x)u+$$

$$+\sum_{i=0}^{l}\Big\{B_i(t,x)u_{xx}(\theta_i,x) + C_i(t,x)u_x(\theta_i,x) + D_i(t,x)u(\theta_i,x)\Big\} + f(t,x), \quad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{m}\Big\{K_j(x)u_{xx}(t_j,x) + L_j(x)u_x(t_j,x) + M_j(x)u(t_j,x)\Big\} = \varphi(x), \ x \in [0,\omega], \quad (2)$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad u_x(t,0) = \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \quad (3)$$

where $u = col(u_1, u_2, ..., u_n)$, the $(n \times n)$ matrices $A_s(t,x)$, $s = \overline{1,5}$, $B_i(t,x)$, $C_i(t,x)$, $D_i(t,x)$, $i = \overline{0,l}$, the n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω, $0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_l = T$, the $(n \times n)$ matrices $K_j(x)$, $L_j(x)$, $M_j(x)$, $j = \overline{0,m}$, the n vector function $\varphi(x)$ are continuous $[0,\omega]$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T$, the n vector functions $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

Partial differential equations of third-order with loads arise in various problems of mathematical biology, ecology, etc. [1, 2]. Multi-point problems for partial differential equations are directly related to the theory spline and interpolation, and are also used in the theory of multi-support beams.

In the communication we investigate of questions an existence and unique of solution to problem (1)-(3). Conditions of unique solvability to problem (1)-(3) are established and algorithm for finding its solution is proposed.

References

1. *Nakhushev A.M.* Problems with shift for partial differential equations. M.: Nauka, 2006. 287 p. [in Russian]
2. *Nakhushev A.M.* Loaded equations and their applications. M.: Nauka, 2012. 232 p. [in Russian]

The work is supported by Grant of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, project № AP 05131220.

On new families of Fibonacci identities

Goy T.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine; tarasgoy@yahoo.com

Fibonacci numbers are given by the recurrence $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ for $n \geq 2$ with initial terms $F_0 = 0$ and $F_1 = 1$. Applications of these numbers include computer algorithms such as the Fibonacci search technique and the Fibonacci heap data structure, and graphs called Fibonacci cubes used for interconnecting parallel and distributed systems.

We investigate some families of Toeplitz-Hessenberg determinants and permanents (see, for example, [1, 2] and the bibliography given there) the entries of which are Fibonacci numbers. As result, we discover new Fibonacci identities with multinomial coefficients. For example, for $n \geq 2$, the following formulas hold:

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{F_{i-1}}{3}\right)^{s_i} = \frac{1}{\sqrt{33}} \left(\left(\frac{3-\sqrt{33}}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{3+\sqrt{33}}{6}\right)^{n-1} \right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{F_{i}}{3}\right)^{s_i} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \left(\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)^{n} - \left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^{n} \right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n} p_n(s) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{F_{i}}{3}\right)^{s_i} = \frac{1}{2\sqrt{13}} \left(\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)^{n} - \left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)^{n} \right),$$

$$\sum_{\sigma_n=n} p_n(s) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{F_{i+1}}{3}\right)^{s_i} = \frac{3 \cdot 6^n + (-2)^n}{16 \cdot 3^n},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} (-1)^{|s|} p_n(s) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{F_{i+4}}{3}\right)^{s_i} = \frac{(-2)^{n-2}}{3^n},$$

$$\sum_{\sigma_n=n} p_n(s) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{F_{2i}}{3}\right)^{s_i} = \frac{9^n - 1}{8 \cdot 3^n},$$

where $\sigma_n = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$, $|s| = s_1 + \cdots + s_n$, $p_n(s) = \frac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!}$, and the summation is over integers $s_i \geq 0$ satisfying $\sigma_n = n$.

References

1. *Goy T.* On new identities for Mersenne numbers // Appl. Math. E–Notes. 2018. Vol. 18. P. 100-105.
2. *Goy T.* Some families of identities for Padovan numbers // Proc. Jangjeon Math. Soc. 2018. Vol. 21, № 3 (in press).

Non-classical variational-Cole-Hopf transformation approach for solving one-dimensional nonlinear homogeneous Burger's problem

Jawad K.T.

Al-Mustansiriya University, Baghdad, Iraq; jawadalisawi@uomustansiriyah.edu.iq

This paper is concerned with solving a homogeneous Burger's problem using the proposed non-classical variational-Cole-Hopf transformation approach. The procedure is divided into two steps, in the first step, a Cole-Hopf transformation approach is applied to the nonlinear Burger's problem using a suitable transformation function, so that the original nonlinear partial differential equation is transformed into a suitable linear partial differential equation with a suitable boundary and initial conditions. In the second step, and since the obtained linear operator after transformation is nonsymmetric with respect to the classical bilinear form, a non-classical variational approach has been developed to get a compact approximate solution up to a certain accuracy and then back substitute to the first transformation to get an approximate solution to the original nonlinear partial differential Burger's problem.

Robin type boundary value problem for the generalized Hallaire equation

Karova F.A.

IAMA KBSC RAS, Nalchik, Russia; karova.fatimat@mail.ru

Moisture movement in is capillary porous environment is described by the equation of Hallaire [1]. The a priori estimate for the solution of the diffusion equation in differential and difference settings is obtained in [2]. In the present paper the solution of Robin boundary value problem for the Hallaire equation in differential and difference settings are studied. The difference scheme for the fractional Hallaire equation is constructed. The stability and convergence of the difference scheme is proved. The obtained results are supported by the numerical calculations carried out for some test problems.

In rectangle $\overline{Q}_T = \{(x,t): \ 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ let us study the boundary value problem

$$\partial_{0t}^{\alpha,\lambda} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\beta,\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t), \quad (1)$$

$$\begin{cases} k(0,t)u_x(0,t) + \partial_{0t}^{\beta,\mu}\eta(0,t)u_x(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t), \\ -\left(k(l,t)u_x(l,t) + \partial_{0t}^{\beta,\mu}\eta(l,t)u_x(l,t)\right) = \beta_2(t)u(l,t) - \mu_2(t), 0 \le t \le T. \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ 0 \le x \le l, \quad (3)$$

where $\partial_{0t}^{\gamma,\delta}u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int\limits_0^t \delta(t-s)(t-s)^{-\gamma}u_s(x,s)\,ds$ is the generalized Caputo fractional derivative of order γ, $0 < \gamma < 1$, with weighting function $\delta(t) \in C^2[0,T]$, where $\delta \ge 0$ and $\delta'(t) \le 0$ for all $t \in [0,T]$, and $0 < c_1 \le k(x,t), \eta(x,t) \le c_2$, $\eta_t(x,t) \ge 0$, $q(x,t) \ge 0$ on $\overline{Q}_T$ [2].

References

1. *Chudnovsky A.F.* Thermophysics Soil, Moscow: Nauka, 1976. 136 p.
2. *Alikhanov A.A.* A time-fractional diffusion equation with generalized memory kernel in differential and difference settings with smooth solutions // Comput. Methods Appl. Math. 2017. Vol. 268. P. 12–22.

Deep random forest

Kirillov V.

Mississauga, Canada; vkirillov74@gmail.com

In this paper, we extend our preliminary study [1] which proposes the gcForest (multi-Grained Cascade Forest) approach for constructing deep forest, a non-NN style deep model. This is a novel decision tree ensemble, with a cascade structure which enables representation learning by forests. Its representational learning ability can be further enhanced by multi-grained scanning, potentially enabling gcForest to be contextual or structural aware. The cascade levels can be automatically determined such that the model complexity can be determined in a data-dependent way rather than manually designed before training; this enables gcForest to work well even on small-scale data, and enables users to control training costs according to computational resource available. Moreover, the gcForest has much fewer hyperparameters than DNNs. Even better news is that its performance is quite robust to hyper-parameter settings; our experiments show that in most cases, it is able to get excellent performance by using the default setting, even across different data from different domains.

References

1. *Ba J., and Caruana R.* Do deep nets really need to be deep? // Advances in Neural Information Processing Systems. 2014. P. 2654–2662.
2. *Breiman L.* Bagging predictors // Machine Learning. 1996. Vol. 24(2).

Pohozhaev identities for semi-linear elliptic-hyperbolic equations and for fractional Laplacian

Popivanov N.I.

IICT BAS; Sofia University St. Kliment Ohridski, Sofia, Bulgaria; nedyu@fmi.uni-sofia.bg

It is well known result of Pohozhaev (1965), that the homogeneous Dirichlet problem for semilinear elliptic equations

$$\Delta u + u|u|^{p-2} = 0,$$

in a bounded subset Ω of $\mathbb{R}^n$, with $n > 2$, permits only the trivial solution if the domain is star-shaped, the solution is sufficiently regular, and the power of nonlinearity $p > 2^*(n) := 2n/(n-2)$, where the latter quantity is the critical exponent in the Sobolev embedding of $H_0^1(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$ for $p < 2^*(n)$. To the opposite of this fact, in the case $2 < p < 2^*(n)$ there exist nontrivial solutions. In the last 50 years the Pohozhaev identities and results have been used and extended for a large class of elliptic problems. Let us mention now that using appropriated Pohozhaev identities in [1] it has been shown that the nonexistence principle in supercritical case also holds for certain two dimensional problems for the mixed elliptic-hyperbolic Gellersted operator L (instead of Δ), with some appropriate boundary conditions. In dimension 2, such operators have a long-standing connection with transonic fluid flow. Of course, the critical Sobolev embedding in this case is for a suitable weighted version of $H_0^1(\Omega)$ into $L^p(\Omega)$. As usual, in the BVP for such mixed elliptic-hyperbolic Gellersted operator L, the boundary data are given only on the proper subset of the boundary of Ω. To compensate the lack of a boundary condition on a part of boundary, a sharp Hardy-Sobolev inequality is used, as was first done in [1] and later in [2], [3], [4]. Some further results, already published or in progress, prepared jointly with colleagues from Italy and Norway will be also discussed. Let us mention also some first results from using Pohozhaev identities in the case of Fractional Laplacian BVP [5].

This work was partially supported by Bulgarian NSF and Russian NSF under Grant DHTC 01/2/2017 «Research on well-posed and correctly solvable multidimentional boundary value problems for mixed type equations» and by the Sofia University under Grant 80-10-189/2018.

References

1. *Lupo D., Payne K.* Critical exponents for semi-linear equations of mixed elliptic-hyperbolic types // Comm. Pure Appl. Math. 2003. Vol. 56. P. 403–424.

2. *Lupo D., Payne K., Popivanov N.* On the degenerate hyperbolic Goursat problem for linear and nonlinear equations of Tricomi type // Nonlinear Analysis, Series A: Theory, Methods & Appl. 2014. Vol. 108. P. 29–56.

3. *Dechevsky L., Payne K.R., Popivanov N.* Nonexistence of Nontrivial Generalized Solution for 2-D and 3-D Nonlinear Mixed Type Equation Problems // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1910. Art. № 040015, 43$^{\text{rd}}$ International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics AMEE.

4. *Popivanov N., Moiseev E., Boshev Y.* On the degenerate hyperbolic Cauchy-Goursat problem for nonlinear Gellerstedt equations in the frame of generalized solutions // AIP Conference Proceedings. 2019. (in print)

5. *Xavier Ros-Oton, Joaquim Serra* The Pohozaev Identity for the Fractional Laplacian // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer. 2014. Vol. 213, Issue 2. P. 587–628.

Two free boundaries problem for a quasilinear parabolic equation

Rasulov M.S.

Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan; rasulovms@bk.ru

Quasilinear parabolic equations form the basis of the mathematical models of various phenomena and processes in Physics, Biology, Ecology and many other sciences [1].

This article investigates the Stefan type problem for a quasilinear parabolic equation. Stefan problems with a nonlinear parabolic equation are investigated by many authors, for example, [2, 3, 4].

Problem. *Find a triple* $(u, h(t), s(t))$ *such that*

$$a(u)u_t = u_{xx}, \quad 0 < t < T, \;\; h(t) < x < s(t), \tag{1}$$

$$-h(0) = s(0) = s_0, u(0,x) = u_0(x), \quad -s_0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u(t, h(t)) = 0, \;\; u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$h'(t) = -\rho u_x(t, h(t)), \;\; s'(t) = -\mu u_x(t, s(t)) \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

where $x = h(t)$ *and* $x = s(t)$ *are the free boundaries to be determined together with* $u(t,x)$, $a(u) \ge a_0 > 0$ *and* μ, ρ *are positive constants.*

The initial functions $(u_0, -s_0, s_0)$ satisfy

$$u_0(x) > 0 \text{ in } (-s_0, s_0) \text{ and } u_0(s_0) = u_0(-s_0) = 0.$$

We establish the global existence and uniqueness results for a classical solution of (1)–(4).

Theorem. *Let* $(u(t,x), s(t), h(t))$ *be a solution of (1)–(4). Then*

$$0 < u(t,x) \le M_1, \;\; 0 \le t \le T, \;\; h(t) \le x \le s(t),$$

$$0 < s'(t) \le M_2(M_1, \mu), \qquad 0 \le t \le T,$$

$$0 > h'(t) \ge -M_3(M_1, \rho), \qquad 0 \le t \le T.$$

References

1. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York: Plenum Press, 1992. 785 p.

2. *Meirmanov A.M.* The Stefan problem. Novosibirsk: Nauka, 1986. 240 p.

3. *Du Y.,* Spreading and Vanishing for Nonlinear Stefan Problems in High Space Dimensions // J. Elliptic Parabol Equ. 2016. Vol. 2. P. 297–321.

4. *Takhirov J.O.* The nonlocal Stefan problem for quasilinear parabolic equation // Vest. Samar. State. Tech. Univ. «Phys.-Math.». 2012. Vol. 3. P. 99–106.

On the first boundary value problem for the elliptic systems with degeneracy at an inner point

Rutkauskas S.

Vilnius University, Lithuania; stasys.rutkauskas@mii.vu.lt

A weakly coupled system of elliptic equations

$$\Delta u - q(r)\Lambda u = 0, \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_N), \tag{1}$$

in the ball $\Sigma_R = \{x : |x| < R\} \subset R^3$ with the Dirichlet condition

$$u\Big|_{\mathrm{S}_R} = f = (f_1, f_2, \ldots, f_N), \quad S_R = \partial\Sigma_R, \tag{2}$$

is considered. Here Λ is a constant non-negative definite degenerate $N \times N$ matrix, q is scalar function such that $q(r) > 0$ for $r \neq 0$ and

$$q(r) \sim Ar^{-2\alpha}, \quad \text{as} \quad r \to 0,$$

where $A = \text{const} \neq 0$, $\alpha > 1$. Hence, the order of system (1) is strongly degenerate at the point $x = 0$. It is shown in (1–2) that the well-posedness of the weighted Dirichlet type problem to system (1) depends on the spectra of matrix Λ. Specifically, Λ must be negative defined matrix of the simple structure.

In this report, we consider the case where Λ has the multiple zero eigenvalue and corresponding to it adjoint vectors. Here, we obtain te sufficient conditions on the existence and uniqueness of the solutions of problem (1), (2) in the class $C^2(\Sigma_R^0) \cup C\left(\Sigma_R^0 \cup S_R\right)$ and in the class $C^2(\Sigma_R^0) \cup C\left(\Sigma_R \cup S_R\right)$, $\Sigma_R^0 = \Sigma_R \backslash (\{x = 0\}$, as well. Particularly, there is shown that boundary vector-function f must satisfy on the sphere S_R some orthogonality conditions, number of which depends on α and on the lengh of the chain of adjoint vectors of matrix Λ.

References

1. *Rutkauskas S.* // Lithuanian Math. J. 2001. **41**(4). P. 384–393.
2. *Rutkauskas S.* // Differ. Equations. **38** (3), 405–412 & **38** (5), 719–725 (2002).

Vector extrapolation methods

Sayeg T.H., Oblasova I.N., Zakharov V.V.

NCFU, Stavropol, Russia;
FSBEI HE Stavropol SAU, Stavropol, Russia

Vector extrapolation methods look at the sequence $x_0, \ldots, x_k$ produced by an iterative algorithm, and try to find its limit. Typically, they assume x_k was produced by a fixed-point iteration with function g as follows, $x_{k+1} = g(x_k)$. In most cases, convergence analysis bounds are based on a Taylor approximation of g, and produce only local rates. Recently, [1] showed global rates of convergence of regularized versions of Anderson acceleration. These results show in particular that, without regularization, classical extrapolation methods are highly unstable when applied to the iterates produced by optimization algorithms. However, the results hold only for sequences generated by our equation where g has a symmetric Jacobian [2,3]. To give a bit of intuition on extrapolation, let f be a (potentially) noisy objective function. We are interested in finding its minimizer. To find this point, we typically use an iterative optimization algorithm and after N iterations obtain a sequence of points $x_i = x_0, x_1, \ldots, x_N$ converging to the critical point where the gradient is zero. Vector extrapolation algorithms find linear combinations of the iterates x_i with coefficients ci to minimize the norm of the gradient.

References

1. *Acar E., Dunlavy D.M., Kolda T.G.* A scalable optimization approach for fitting canonical tensor decompositions // J. Chemom. 2011. 25(2). P. 67—86.
2. *Anderson D.G.* Iterative procedures for nonlinear integral equations // J ACM. 1965. 12(4). P. 547–560.
3. *Bezanson J. , Edelman A., Karpinski S., Shah. V.B.* Julia: A fresh approach to numerical computing // SIAM Rev. 2017. 59(1). P. 65—98.

On the stochastic stability of the second-order differential systems

Shumafov M.M., Tlyachev V.B.

ASU, Maykop, Russia; magomet_shumaf@mail.ru, stvb2006@rambler.ru

This research is concerned with stability of second-order systems of differential equations, some parameters of which are perturbed by Gaussian «white» noise. Such equations can be interpreted in two forms: Ito's and Stratonovich's ones (see, for instance, [1, 2]). In the monographs [1,2] and the paper [3] sufficient conditions of stability of some first-order and second-order stochastic differential equations and systems in Ito's form are given. In [4] Lyapunov functions for two-dimensional linear stochastic stationary systems and simplest non-linear ones are constructed, and on the basis of such functions sufficient conditions of stochastic stability are rendered. A modern state of theory of stability of stochastic differential equations are presented in survey [5].

In the present article by the construction of special quadratic Lyapunov functions necessary and/or sufficient conditions of stability on probability and exponential stability in mean square of trivial solution of second-order stochastic systems in Ito's and Stratonovich's forms are given. The comparative analysis of the stability conditions obtained for the two forms of systems is carried out. It turns out, that under consideration of physical problems the corresponding stochastic system interpreted in the sense of Stratonovich is often more adequate than the system of Ito's equations [1]. As an example a linear second order differential equation is considered when one of its coefficients is perturbed by white Gaussian noise.

References

1. *Khas'minskii R.Z.* Stability of the systems of differential equations under random perturbations of their parameters. M.: Nauka, 1969. 367 p. (in Russian) Stochastic Stability of Differential Equations. 2nd ed. Berlin: Springer, 2012. 342 p. (In English)

2. *Kushner H.* Stochastic Stability and Control. N.Y.-London: Academic Press, 1967. 160 p.

3. *Kushner H.J.* On the construction of stochastic Lyapunov functions // IEEE Trans. Autom. Control. 1965. Vol. 10, No. 4. P. 477-478.

4. *Shumafov M.M., Tlyachev V.B.* On the Construction of Lyapunov Functions for Second-Order Linear Stationary Stochastic Systems // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 149. P. 118-128.

5. *Visentin F.* A survey on stability for stochastic differential equations // Scientiae Mathematicae Japonicae. 2013. Vol. 76, № 1. P. 147–152.

Global existence and uniform boundedness of solutions to a chemotaxis system with cross-diffusion

Takhirov A.J.

Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan; al.takhirov@gmail.com

This paper is concerned with the initial-boundary value problem of the following quasilinear chemotaxis system

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (d_1(u)\nabla u) + \nabla \cdot (\chi\Phi(u)\nabla v) + (a_1 - b_1 u^\alpha - c_1 v)u \text{ in } Q_T, \\ v_t = \nabla \cdot (d_2(v)\nabla v) + (a_2 - b_2 u - c_2 v)v \text{ in } Q_T, \end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } S_T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad v(x,0) = v_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

where Ω is a bounded domain in $R^N (n \geqslant 1)$ with smooth boundary $\partial\Omega$ and outer unit norm ν. Denote $Q_T = \Omega \times (0,T)$ and $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, where $T > 0$ is a fixed time. We assume that $a_i, b_i, c_i (i = 1,2), \chi(x), \alpha$ are positive constants, while $a_i(\xi)$ and $\Phi(\xi)$ are C^2 – smooth functions of ξ, there exists same positive constants $M_i, m_i, i = 1,2$ such that

$$d_i(\xi) \geqslant M_1(1+\xi)^{m_i}, i = 1,2, \forall \xi \geqslant 0, 0 \leqslant \Phi(\xi) \leqslant M_2 \xi^{u_{m_2}}, \forall \xi \geqslant 0.$$

The model (1)–(3) was proposed to describe the directed movement of cells as a response to gradients of the concentration of a chemical signal substance in the surrounding environment, where the chemical signal substance is consumed rather that produced by the cells themselves [1-2].

We prove the existence and extension criterion of local in time solution (1)–(3) together with their important properties. We establish several a priori estimates which are essential for the proof of existence theorem.

References

1. *Keller E.F., Segel I.A.* Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability // J. Theor. Biol. 1970. № 26. P. 399–415.

2. *Fan L., Jin H.Y.* Global existence and asymptotic behavior to a chemotaxis system with consumption of chemoattractant in higher dimensions // J. of Math. Phys. 2017. № 58.

A FREE BOUNDARY PROBLEM FOR A DIFFUSIVE COMPETITION MODEL

Takhirov J.O.

Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan; prof.takhirov@yahoo.com

We consider a radially symmetric free boundary problem with logistic nonlinear terms [1]. The model consisting of an invasive species with density u and a native species with density v, in a radially symmetric setting with free boundary

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u - k_1\nabla u = u(a_1 - b_1 u - c_1 v), & t > 0, \quad 0 \leqslant r < h(t), \\ v_t - d_2\Delta v - k_2\nabla v = v(a_2 - b_2 u - c_2 v), & t > 0, \quad 0 \leqslant r < \infty, \end{cases}$$

$$\begin{gathered} u_r(t,0) = u_r(t,0) = 0, \quad u(t,r) = 0, \quad t > 0, \quad h(t) \leqslant r < \infty, \\ h'(t) = -\mu u_r(t,h(t)), \quad t > 0, \\ h(0) = h_0, u(0,r) = u_0(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant h_0, \\ v(0,r) = v_0(r), \quad 0 \leqslant r < \infty, \end{gathered}$$

where $\Delta u = u_{rr} + \frac{N-1}{r}u_r, \nabla u = u_r \nabla r$. $r = h(t)$ is the free boundary to be determined; $h_0, \mu, d_i, k_i, a_i, b_i, c_i (i = 1, 2)$ are given positive constants and the initial functions u_0 and v_0 satisfy

$$\begin{gathered} u_0 \in C^2([0,h_0]), u_0'(0) = u_0(h_0) = 0, u_0 > 0 \text{ in } [0,h_0], \\ v_0 \in C^2([0,+\infty)) \cap L^\infty(0,+\infty), v_0'(0) = 0, u_0 > 0 \text{ in } [0,+\infty). \end{gathered}$$

Ecologically, this problem describes the dynamical process of a new competitor invading into the habitat of a native species. The species $u(t,r)$, which exists initially in the ball $\{r < h_0\}$, disperses through random diffusion oven an expanding ball $\{r < h(t)\}$, whose boundary $\{r = h(t)\}$ is the invading front, and evolves according to the free boundary condition $h'(t) = -\mu u_r(t,h(t))$. The species $v(t,r)$ is native, which undergoes diffusion and growth in R^N.

By applying the contraction mapping principle, the parabolic Schauder estimates and parabolic L^p estimates, we prove that there exists a unique global classical solution of this problem.

In the case that $u(t,r)$ is a superior competitor, we show that a spreading-vanishing dichotomy holds.

References

1. *Cantrell R.S., Costner C.* Spatial ecology via reaction-diffusion equations. England: John Wiley and Sons Ltd., 2003. 408 p.

THE EXTREMUM PRINCIPLE FOR FRACTIONAL DERIVATIVES AND ITS APPLICATION TO NONLINEAR PROBLEMS

Torebek B.T.[1,2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;*
[2]*Al–Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan; torebek@math.kz*

Recently, with the development of fractional differential equations, the extremum principles for fractional differential equations have started to draw attention. This motivates us to consider the extremum principle for the Caputo and Hadamard derivatives.

In this paper we obtain new estimates of the Caputo and Hadamard fractional derivatives of a function at its extreme points. The extremum principle is then applied to show that the initial-boundary-value problem for linear and nonlinear time-fractional diffusion equations possesses at most one classical solution and this solution depends continuously on the initial and boundary conditions. The extremum principle for an elliptic equation with a fractional derivative is also proved.

An investigation of the maximum principle for time-fractional diffusion and fractional elliptic equations is devoted to [1-5].

References

1. *Luchko Y.* Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009. Vol. 351. P. 218–223.

2. *Al-Refai M., Luchko Y.* Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivative and its applications // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2014. Vol. 17, № 2. P. 483–498.

3. *Borikhanov M., Kirane M., Torebek B.T.* Maximum principle and its application for the nonlinear time-fractional diffusion equations with Cauchy-Dirichlet conditions // Applied Mathematics Letters. 2018. Vol. 81. P. 14–20.

4. *Cheng T., Huang G., Li C.* The maximum principles for fractional Laplacian equations and their applications // Communications in Contemporary Mathematics. 2017. Vol. 19, № 6. P. 1–12.

5. *Cabré X., Sire Y.* Nonlinear equations for fractional Laplacians, I: Regularity, maximum principle and Hamiltonian estimates // Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non liinéaire. 2014. Vol. 31. P. 23–53.

This work is supported by the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan, project № AP05131756.

Fractional differential equations in geophysics: a review

Uchaikin V.V.

UlSU, Ulyanovsk, Russia; vuchaikin@gmail.com

The report contains a survey of various differential equations of fractional orders which have found applications in mathematical description of different geophysical phenomena/problems such as atmospheric and oceanic turbulence, anomalous diffusion of water and oil through sand, soil and rocks, temperature fields in oil strata, seismic waves and earthquake aftershocks, hydraulic conductivity and underground flows. Climatology, meteorology, solar radiation transport and auroral ionospheric kinetics are also discussed from this point of view. But the central point and main aim of the review is to clarify the origin of the fractional operators in the description of this phenomena, its limitations and some unsolved methodological problems.

The work is supported by Russian Foundation of Basic Researches, project № 16-01-00556.

The backstepping control system of quadrocopter motion

Vinokursky D., Samoilov F., Ganshin K.

NCFU, Stavropol, Russia; dlvinokursky@gmail.com; fsamoilov@ncfu.ru; magnuskos@gmail.com

The UAV (Unmanned aerial vehicle) can be controlled by an occasional command or continuously, in the latter case the UAV is called a remotely piloted aircraft (RPA). The main advantage of the UAV / RPA is the significantly lower cost of its production and control (under the condition of equal efficiency in the performance of the tasks). Nowadays unmanned aerial vehicles (UAVs), which are mainly flying robots, constitute an important part of scientific research in military, civil and space fields. Replacing manned vehicles, UAVs have an advantage in complex and dangerous environments. Their reliability in severe conditions for humans is much higher. In the last decade, studies on various types of unmanned multi-rotors have received much attention in the field of automatic control. Quadrotor is the most popular type of multi-rotor UAV due to its simple mechanics and high maneuverability such as the fast vertical take-off and landing. In addition, the implementation of stable stationary flight is a valued opportunity for a quadrotor. In this paper we present a system for automatic control of a quadrocopter based on the backsteeping control system. The task is to ensure the motion of the quadrocopter along the given route and to control the stabilization of the quadrocopter in the air in a horizontal or in a given angular position by sending control signals to the engines. The nonlinear model of a quadrocopter is expressed in the form of a linear non-stationary system.

References

1. *Erginer B., Altug E.* Modeling and PD control of a Quadrotor VTOL vehicle // Intelligent Vehicles Symposium, 2007.
2. *Tayebi A. and McGilvray S.* Attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft // IEEE Trans. On Control Systems Technology, 2006. Vol. 14, № 3. P. 562–571.
3. *Blakelock J.H.* Automatic Control of Aircraft and Missiles 2nd ed., Wiley-Interscience, 1991.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АГПУ – Армавирский государственный педагогический университет
АГУ – Абхазский государственный университет
АГУ* – Адыгейский государственный университет
АГУНП – Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности
АН ЧР – Академия наук Чеченской республики
БГУ – Бакинский государственный университет
БуГУ – Бухарский государственный университет
ВГИ – Высокогорный геофизический институт
ВГУ – Воронежский государственный университет
ВГУИТ – Воронежский государственный университет инженерных технологий
Вычислительный центр ФИЦ ИУ РАН – Вычислительный центр имени Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН
ГГНТУ – Грозненский государственный нефтяной технический университет
ГГТУ – Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого
ДГТУ – Донской государственный технический университет
ДГУ – Дагестанский государственный университет
ДонНУ – Донецкий национальный университет
ИИПРУ КБНЦ РАН – Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН
ИКИР ДВО РАН – Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения РАН
ИМАН – Институт математики имени В.И. Романовского АН республики Узбекистан
ИМ СО РАН – Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН
ИМ АН РУз – Институт математики академии наук республики Узбекистан
ИММ НАНА – Институт математики и механики НАНА
ИМММ – Институт математики и математического моделирования
ИПМА КБНЦ РАН – Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН
ИПГ ДНЦ РАН – Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН
ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН – Институт радиотехники и элек-

троники имени В.А. Котельникова РАН
ИСУ НАНА – Институт систем управлении НАН Азербайджана
ИФ ДНЦ РАН – Институт физики им. А.Х. Амирханова Дагестанского научного центра РАН
ИЯФ АН РУз – Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан
КазНПУ им. Абая – Казахский национальный педагогический университет имени Абая
КазНУ им. аль-Фараби – Казахский национальный университет имени Аль-Фараби
КамГУ им. Витуса Беринга – Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга
КамчатГТУ – Камчатский государственный технический университет
КарГУ им. Е.А. Букетова – Карагандинский государственный университет имени академика Е.А. Букетова
КБГУ – Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова
КНИИ РАН – Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Комплексный научно-исследовательский институт имени Х.И. Ибрагимова РАН
КНИТУ-КАИ РАН – Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева
КубГУ – Кубанский государственный университет
КФУ – Казанский федеральный университет
МГУ им. М.В. Ломоносова – Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
МГТУ – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Майкопский государственный технологический университет»
РТУ МИРЭА – филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «МИРЭА - Российский технологический университет» в г. Ставрополе
МУДО ЦВР – МУДО «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района»
НГУ – Нахичеванский государственный университет
НамИСИ – Наманганский инженерно-строительный институт
НИУ «БелГУ» – Белгородский государственный национальный исследовательский университет
НИЯУ МИФИ – Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

НУУз – Национальный университет Узбекистана имени М. Улугбека
ООО «РН-УфаНИПИнефть» – Научно-исследовательский и проектный институт
Самарский университет – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
СамГТУ – Самарский государственный технический университет
СГУ – Сумгаитский государственный университет
СевКавГГТА – Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия
СГПИ – Ставропольский государственный педагогический институт
СКФУ – Северо-Кавказский федеральный университет
СОГУ – Северо-Осетинский государственный университет имени К.Л. Хетагурова
СФ ИСИ – Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований
СФ БашГУ – Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
ТАСИ – Ташкентский архитектурно-строительный институт
ТГЮУ – Ташкентский государственный юридический университет
ТерГУ – Термезский государственный университет
ТвГУ – Тверской государственный университет
ТТГУ – Термезский технический государственный университет
ТИ им. А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ) – Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета
ТФИ – Ташкентский финансовый институт
УлГУ – Ульяновский государственный университет
УлГТУ – Ульяновский государственный технический университет
ФерГУ – Ферганский государственный университет
ФерПИ – Ферганский политехнический институт
ХГУ – Худжандский государственный университет имени Бободжона Гафурова
ЦГИ – Центр географических исследований КБНЦ РАН
ЧГПУ – Чеченский государственный педагогический университет
ЧГУ – Чеченский государственный университет
ЮМИ ВНЦ РАН – Южный математический институт - филиал ФГБУН Владикавказского научного центра Российской академии наук
ЮФУ – Южный федеральный университет
ASU – Adygeya State University
FSBEI HE Stavropol SAU – Federal State Budgetary Educational Insti-

tution of Higher Education «Stavropol State Agrarian University»
IICT BAS – Institute of Information and Communication Technologies of Bulgarian Academy of Sciences
IAMA KBSC RAS – Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS
IMMM – Institute of mathematics and mathematical modelling
MIPT – Moscow Institute of Physics and Technology
NCFU – North-Caucasus Federal University
NUUz – National University of Uzbekistan named Mirzo Ulugbek
TUIT – Tashkent University of Information Technologies
UDE – University of Duisburg-Essen
UlSU – Ulyanovsk State University

Научное издание

МАТЕРИАЛЫ

V Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», посвященной 80-летию Адама Маремовича Нахушева

Макет выполнен в Институте прикладной математики и автоматизации – филиале Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»

9 785936 811326

Подписано в печать 22.11.2018
Бумага офсетная. Формат бумаги 84×108 1/32.
Гарнитура Таймс. 13 усл. печ. л. Тираж 300 экз.

Отпечатано в полном соответствии с оригиналом
в ООО «Редакция журнала «Эльбрус»
360051, КБР, г. Нальчик, ул. Кабардинская, 19
Тел./факс: (8662) 42-62-09
e-mail: elbrus@mail.ru
www.elbrus.ru