

B & N A K



приоритет2030⁺
лидерами становятся



VII

**INTERNATIONAL
SCIENTIFIC
CONFERENCE**

*Non-local
boundary value problems
and related problems
of mathematical
biology, informatics
and physics*

PROCEEDINGS

**December 4–8, 2023
Nalchik**

VII

**МЕЖДУНАРОДНАЯ
НАУЧНАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ**

*Нелокальные
краевые задачи
и родственные проблемы
математической биологии,
информатики
и физики*

МАТЕРИАЛЫ

**4–8 декабря 2023 г.
Нальчик**



приоритет2030^
лидерами становятся



B & N A K



VII

INTERNATIONAL
SCIENTIFIC
CONFERENCE

*Non-local
boundary value problems
and related problems
of mathematical
biology, informatics
and physics*

PROCEEDINGS

December 4–8, 2023
Nalchik

VII

МЕЖДУНАРОДНАЯ
НАУЧНАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ

Нелокальные
краевые задачи
и родственные проблемы
математической биологии,
информатики
и физики

МАТЕРИАЛЫ

4–8 декабря 2023 г.
Нальчик

УДК 51
ББК 22
М 49

М 49 Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы международной научной конференции. — Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН. 2023. — 380 с.

В сборнике представлены тезисы докладов VII Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (В&НАК 2023), 4–8 декабря 2023 года, Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, Россия.

Конференция приурочена к 85-летию со дня рождения Адама Маремовича Нахушева.



приоритет2030^

лидерами становятся

Мероприятие проводится в рамках Года педагога и наставника, Десятилетия науки и технологий, празднования 300-летия Российской академии наук и программы «Приоритет 2030».

Соорганизаторы конференции:

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН (Нальчик, Россия)

Адыгская (Черкесская) Международная академия наук

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова (Нальчик, Россия)

Математический центр в Академгородке (Новосибирск, Россия)

Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан)

Институт математики им. В. И. Романовского (Ташкент, Узбекистан)

Институт математики и механики (Баку, Азербайджан)

Конференция проводится при поддержке:

Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации;

Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова в рамках реализации программы «Приоритет 2030»;

Президента Адыгской (Черкесской) международной академии наук Арсена Башировича Канокова в рамках реализации проекта «Адыги-2040. Вектор развития».

ISBN 978-5-907725-30-0

© ИПМА КБНЦ РАН, 2023

© Авторы, 2023

Содержание

Аббасова М. О. Смешанная задача для уравнения Лапласа в гипероктанте многомерного шара	17
Абдрахманов А. М., Абдрахманова Р. П. Разрешимость краевых задач для эллиптических систем	19
Абдуллаев В. М., Гашимов В. А. Задача оптимального управления точками нагружения для параболического уравнения	20
Абдурахманов А. Г. Применение математических пакетов на примере предмета «математическое моделирование»	22
Агаркова Н. Н., Васильев В. Б. О краевой задаче в трехмерном пространстве с плоской щелью	24
Азизов М. С., Орипов Д. Д. Об одной нелокальной начально-краевой задаче для уравнения высокого четного порядка	26
Айда-заде К. Р., Ашрафова Е. Р. Обратная задача по определению параметров источников в колебательной системе сложной структуры	28
Акимжанова Ш. А. Система моментных уравнений Больцмана в пятом приближении при макроскопических граничных условиях	30
Александров Д. В., Маковеева Е. В., Титова Е. А., Иванов А. А. Влияние конвекции на морфологическую устойчивость плоского фронта кристаллизации	32
Алимов Ш. А., Шералиев Ш. Н. О гиперсингулярных уравнениях перидинамики	34
Анахаев К. Н. Моделирование дождевого стока на горных водосборах	36
Андрющенко А. В., Гура Д. А., Дьяченко Р. А. Особенности формирования датасетов для искусственной нейронной сети, способной распознавать объекты по фотографиям	37
Апаков Ю. П., Мамажонов С. М. Единственность решения нелинейной краевой задачи для нелинейного уравнение четвертого порядка	39
Апаков Ю. П., Хамитов А. А. Об одной граничной задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области	41
Артемьева М. В., Корпусов М. О. Разрушение решения одной задачи для уравнения Соболева с некоэрцитивным источником	43
Артюшин А. Н. К вопросу о гладкости решений уравнения дробной диффузии с переменным показателем дробной производной	44

Асташова И. В., Филиновский А. В. О параболической экстремальной задаче управления температурным режимом в промышленной теплице	44
Асхабов С. Н. Об одном операторе с обобщенным ядром типа потенциала	47
Аттаев А. Х. Задача Коши для нагруженного гиперболического уравнения второго порядка	49
Афанасьева Е. Б., Васильев В. Б. О дискретном варианте одной краевой задачи	49
Багов М. А. Метод построения альтернативных по структуре потоковых сетей Штейнера с удалением из них неэффективных точек ветвления потоков	51
Балкизов Ж. А. Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа второго порядка	53
Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Об использовании методов эквивалентных и подобных операторов в исследовании линейных операторов	54
Баротов Б. Х. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением	57
Бейбалаев В. Дж., Аливердиев А. А., Hristov J., Якубов А. Э. Математическая модель нестационарной теплопроводности, включающая эффекты памяти через дробную производную Капуто по времени	57
Беккиев К. М., Аджиева А. А., Шаповалов В. А., Машуков И. Х. Исследование процессов распространения оптического излучения в атмосфере при взаимодействии с загрязнителем на основе численной модели	58
Беркова Е. Д. Применение геоинформационных технологий в проектировании территорий и ведении кадастра недвижимости	60
Бештоков М. Х. Разностная схема повышенного порядка точности для нагруженного уравнения теплопроводности с граничными условиями первого рода	62
Бештокова З. В. Численный метод решения задачи Дирихле для нагруженного параболического уравнения в многомерной области	64
Бжеумихова О. И. Краевые задачи для гиперболических уравнений с инволютивным отклонением аргумента	66
Богатов А. В. Задача с динамическим нелокальным условием для гиперболического уравнения	67
Богатырева Ф. Т. О представлении общего решения уравнения дробной диффузии с операторами Джрбашяна–Нерсесяна	68
Бодренко И. И. О кручении Ван дер Вардена–Бортолотти подмногообразий в пространствах постоянной кривизны	69

Бойко К. В. Глобальное решение квазилинейного уравнения с дробными производными Герасимова–Капуто. Секториальный случай	71
Будко К. Л., Маслова О. И. Обзор сфер применения цифровой стеганографии	72
Булатов М. В., Будникова О. С. Подходы к численному решению интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью	72
Булатов Ю. Н. Δ_B -оператор Киприянова в произвольной весовой линейной форме	73
Бухурова М. М. Интеркаляция молекул фуллерена C_{60} между однослойным графеном и металлической подложкой	75
Васильев В. Б. Модельные уравнения, канонические области и дискретные аппроксимации	76
Винокурский Д. Л., Кононова Н. В., Авдеева Т. И. Отказоустойчивость и управление беспилотным летательным аппаратом	78
Винокурский Д. Л., Кононова Н. В., Авдеева Т. И., Эльканова Л. М. Адаптивный отказоустойчивый контроль управления беспилотным летательным аппаратом	79
Вирченко Ю. П. Пространства случайных множеств на графах	80
Водинчар Г. М., Феценко Л. К. Исследование модели крупномасштабного динамо с эредитарной обратной связью	81
Гадзова Л. Х. Задача Наймарка для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка	82
Ганьшин К. Ю., Новикова Е. Н., Свидницкий А. Д., Потопов И. Р., Будко К. Л. Нелинейные регуляторы управления квадрокоптером	83
Гапеев М. И. Моделирование областей повышенных деформаций земной коры перед сильными землетрясениями на Камчатке, произошедшими в период с 2020 по 2023 год	84
Геккиева С. Х. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения дробного порядка с меняющимся направлением времени	85
Геккиева С. Х., Керемов Б. М. Метод прямых решения смешанной краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка	87
Георгиева М. А., Аджиева А. А., Шаповалов В. А. Математическое моделирование эволюции поперечного речного профиля при береговой эрозии	88
Гилев А. В. О разрешимости двух нелокальных задач в характеристической области	89
Годова А. Д., Федоров В. Е. Задача Коши для одного класса вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах	91

Голубятников В. П. Циклы в модели молекулярного репрессилатора	93
Грязнева Е. А., Киселев И. С. Формула Грина для В-полигармонического оператора	94
Джамалов С. З., Сипатдинова Б. К. Об одной нелокальной краевой задаче периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде	96
Джамалов С. З., Туракулов Х. Ш., Собиров А. А. Об однозначной разрешимости одной полупериодической краевой задачи для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном параллелепипеде	98
Джамалов С. З., Халхаджаев Б. Б. О единственности слабого обобщенного решения уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка	99
Джамалов С. З., Худойкулов Ш. Ш. О корректности одной линейной двухточечной обратной задачи для многомерного уравнения теплопроводности с полунелокальными краевыми условиями	101
Дженалиев М. Т. О регулярности решения гиперболического уравнения	103
Джумаев Б. М. О размерности пространства решений одного класса переопределенных систем уравнений с частными производными второго порядка	105
Димитриченко Д. П. Оптимизация структуры нейронной сети при помощи вероятностных автоматов	107
Дроздова В. И., Крахоткина Е. В., Потапов И. Р., Будко К. Л., Свидницкий А. Д. Модельное управление беспилотным летательным аппаратом	109
Егоров И. Е., Сафонов С. В. Разрешимость второй краевой задачи для уравнения смешанного типа в весовом пространстве Соболева	109
Езаова А. Г., Босякова Т. Г. Об одной экономико-математической модели зависимости валового внутреннего продукта от времени	111
Елгондиев К. К., Бегжанов Ж. Б. Условия периодичности решения линейных однородных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием	112
Жилов Р. А. Кластеризация данных с использованием сигма-пи нейронной сети	113
Захарова Т. А., Федоров В. Е. Нелокальная разрешимость квазилинейного уравнения	115
Зикиров О. С., Сагдуллаева М. М. Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения третьего порядка	116

Зуннунов Р. Т., Эргашев А. А. Краевая задача со смещением для уравнения смешанного типа с дробной производной в области, параболическая часть которой – половина верхней полуплоскости	117
Ибавов Т. И. Краевая задача для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной	119
Иброхимов Х. К. О единственности решения краевой задачи для вязко-трансзвуковой уравнения	120
Ившин М. С. Об одной задаче оптимального управления для уравнения диффузии	122
Иманбаев Н. О системе корневых векторов возмущенного регулярного дифференциального оператора второго порядка не обладающего свойством базисности	123
Индукция Т. С., Соловарова Л. С. О численном решении дифференциально-алгебраических уравнений дробного порядка Хессенберговой формы	124
Иргашев Б. Ю. Задача с начальными условиями для уравнения высокого порядка с дробной производной Джрбашьяна–Нерсесяна	125
Исмоилов А. И. Краевая задача для неоднородного обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу	127
Кагермазов А. Х., Созаева Л. Т. Прогноз града по выходным данным глобальной модели атмосферы с заблаговременностью 30-36 часов	129
Кадырова О. А. Применение плоской трехмерной модели ГРП для описания распространения трещины в образце малого размера	131
Кажарова И. А., Таран А. Е., Фоменко Н. А. Особенности разработки современных демо-генетических моделей насекомых	132
Казаков М. А. Комбинированный алгоритм для исправления контраста изображений с широким динамическим диапазоном	135
Казакова Е. М. Гибридный алгоритм PSO-Яауа для задач оптимизации	137
Казаков Е. А., Водинчар Г. М. Численная схема для одного класса интегро-дифференциальных систем	137
Кайгермазов А. А. Математические модели динамики возрастной структуры популяции	139
Канаметова Д. А. Анализ и оптимизация экономических систем на основе петель обратной связи	140
Каримов О. Х., Габиен И. Д. Коэрцитивные оценки и разделимость для трижды гармонического линейного оператора с матричным потенциалом	142

Каримов К. Т., Олимова Д. С. Краевая задача для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в одной специальной области	143
Каримов Ш. Т., Орипов Ш. А. Задача Коши для уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя, действующим по геометрическому переменным	145
Каримов Ш. Т., Тулашева Е. Начально-краевая задача для уравнения четвертого порядка, содержащего квадрат оператора Бесселя	147
Кармоков М. М., Джашпуева Дж. Р. Применение метода граничных элементов для решения задач фазовых превращений в гидродинамике	149
Каткова Г. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И. Разработка и развитие программного обеспечения для моделирования процессов массопереноса радона в грунтовых водах	151
Керефов М. А., Геккиева С. Х. Краевые задачи для уравнения типа Аллера–Лыкова с дробной производной Капуто	153
Ким В. А. Математическое моделирование нелинейных осцилляторов с дробной производной переменного порядка в смысле Римана–Лиувилля	154
Киржинов Р. А. Об одной внутреннекраевой задаче с условиями периодичности для уравнения парабола-гиперболического типа второго порядка	155
Киричек В. А. Задача с вырождающимися интегральными условиями для гиперболического уравнения	156
Ковалева Л. А. О задаче Дирихле с контактными условиями	157
Кодзоков А. Х., Багуева И. А. Нелокальные краевые задачи со смещением для случая, когда характеристика пересекает параллельная оси x -ов прямая	159
Кожанов А. И. Обратные задачи определения параметров в дифференциальных уравнениях математической физики	159
Кожанов А. И. К вопросу о разрешимости задачи Ионкина для дифференциальных уравнений в частных производных	160
Кожемякин И. И., Литвинов В. В. Тестирование спектра Учайкина–Золотарева по расчетным и экспериментальным данным для межзвездной среды	161
Кудаев В. Ч., Абазоков М. Б. Компьютерное проектирование больших потоковых сетей высокого ранга оптимальности на динамическом базовом графе	162
Кулаев Р. Ч. Спектральные свойства дифференциального оператора 4-го порядка на графе	164
Кумыков Т. С. Моделирование влияния фрактальных свойств облачной среды на формирование гроз умеренных широт	166

Кундетова Л. М., Ширитов А. А. Модель построения оценки динамики процесса дожития	168
Куповых Г. В., Белоусова О. В. Применение методов математического моделирования к задачам электродинамики атмосферного приземного слоя	170
Ласурия Р. А. Приближение функций на сфере	172
Лафишев М. Х., Ашабоков Б. А., Хибиев А. Х. Метод суммарной аппроксимации для параболического уравнения общего вида, описывающего микрофизические процессы в однофазных конвективных облаках	173
Лосанова Ф. М., Кенетова Р. О. Об одной математической модели теории численности популяции	174
Лютикова Л. А. Использование логических методов для анализа решений нейронной сети	175
Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дробные размерности операторов Лапласа и размерности самоподобий классических фракталов по мере Лебега–Киприянова	176
Магомедова Е. С., Магомедов Р. И. Стохастическая математическая модель мобилизации организации	178
Макаров А. М., Ермаков А. С. Введение в теорию и приложения интегрального преобразования Меллина в обработке сигналов и шумов	180
Макаова Р. Х. Об одной смешанной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка	182
Маковеева Е. В. Нестационарный, установившийся и автоколебательный режимы объёмной кристаллизации с притоком массы и выводом кристаллов продукта. Анализ устойчивости	182
Мамажонов М., Шерматова Х. М. Постановка и исследование одной краевой задачи для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в смешанной треугольной области, когда угловой коэффициент характеристики оператора первого порядка меньше минус единицы	185
Мамедов И. Г., Абдуллаева А. Дж. Краевая задача заданной на геометрической середине области для одного интегро-дифференциального уравнения 3D Бианки	187
Мамедова А. А. Об одном уравнении распределенного порядка .	189
Мамчуев Мурат О. Метод необходимых нелокальных условий решения краевых задач для дробного диффузионно-волнового уравнения	191
Мамчуев Мухтар О. К моделированию устойчивости грунтовых массивов наклонных откосов на оползание	192
Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. К оптимальности особых управлений в стохастических дискретных управляемых системах	193

Марданов М. Дж., Рагимов А. Б. Подход к решению обратной задачи по восстановлению параметров источника специального вида	194
Масаева О. Х. О задаче Дирихле для обобщенного уравнения Пуассона	195
Маслова О. И., Потапов И. Р., Будко К. Л. Разработка метода стеганодетектирования скрытых изображений на основе нейронных сетей	197
Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений неавтономных уравнений с запаздыванием	198
Мелехина Д. В., Плеханова М. В., Околелов Н. А. Локальная разрешимость нелинейной обратной задачи для уравнения с производными Джрбашьяна–Нерсесяна	198
Мирсабуров М., Эргашева С. Б. Задача с комбинированным условием Трикоми и Франкля на одной граничной характеристике для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом	200
Нагуманова А. В. Обратная задача для вырожденного эволюционного уравнения с дробной производной Герасимова–Капуто	202
Нахушева З. А., Апинова И. В. Экономико-математическая модель устойчивой региональной экосистемы зеленой экономики	204
Нахушева Ф. М., Водахова В. А., Гучаева З. Х. Задача с нелокальными краевыми условиями на характеристиках для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения	206
Нахушева М. З., Езаова Б. З. Экономико-математическое моделирование объема загрязнения окружающей среды	208
Николаев В. Г. О структуре ядра задачи Шварца в двумерном случае	210
Николаева Н. А. О сопряжении тонких включений в упругих телах при наличии трещины	211
Одинабеков Дж. М. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с одной сингулярной точкой	211
Орипов Д. Д. Об одной граничной задаче для вырождающегося уравнения, высокого четного порядка	213
Охунов Н. К., Олими А. Г. К теории класса обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя сингулярными точками разного порядка	214
Очилова Н. К. Об одной задаче для вырождающегося уравнения смешанного типа с дробной производной	216
Ошхунов М. М., Семенова Ж. Б., Энес А. З. Конечно-элементное моделирование черепно-мозговых травм	217

Павленко В. А., Арсланбекова С. А., Дик Е. Н., Зиянгирова С. Р. Математическая модель процесса сушки ячменя путем ИК-нагрева	219
Паровик Р. И. Качественный анализ с помощью алгоритма Тест 0-1 дробной динамической системы Селькова с переменной памятью	220
Пачулия Н. Л., Голава М. Р. φ – сильные средние арифметические, типа Марцинкевича, ортогонального разложения функции	223
Переварюха А. Ю. Моделирование инвазионных процессов агрессивных насекомых с запаздывающей регуляцией	224
Петракова В. С., Криворотько О. И. Использование моделей «среднего поля» для прогнозирования динамики распространения эпидемий	226
Плеханова М. В., Ижбердеева Е. М. Вырожденное линейное неоднородное уравнение с производной Джрбашьяна–Нерсесяна в секториальном случае	227
Плеханова М. В., Пестерев И. Н. Вырожденные семейства операторов для уравнения с производными Джрбашьяна–Нерсесяна	229
Попов С. В., Попов Н. С. Нелокальные интегро-дифференциальные краевые задачи для псевдогиперболических уравнений	230
Потапов И. Р., Маслова О. И. Сравнительный анализ платформ обработки Big Data: Hadoop и Spark	231
Псху А. В. Обобщенное преобразование Станковича и эволюционные уравнения распределенного порядка	232
Пулькина Л. С. Об одной нелокальной задаче для уравнения четвертого порядка	233
Рамазанов М. И., Гульманов Н. К., Копбалина С. С. Параболическое уравнение в неканонической вырождающейся области	234
Рахматуллаев М. М., Расулова М. А. $G_k^{(4)}$ -периодические основные состояния для модели Поттса с внешним полем и счетным множеством значений спина	235
Рехвиашвили С. Ш., Гаев Д. С. Эффективный способ увеличения быстродействия полупроводниковых приборов и интегральных схем	237
Рузиев М. Х., Юлдашева Н. Т. Об одной нелокальной задаче для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом	237
Сабиров К. К. Вывод граничных условий для дробно-пространственного оператора порядка $0 < \alpha < 1$ на вершинах метрических графов	239
Сабитов К. Б. Обратные задачи по отысканию правой части вырождающегося уравнения смешанного типа	240

Сафаров Ж. Ш. Обратная задача для двумерного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в ограниченной области	241
Свидницкий А. Д., Ганьшин К. Ю., Новикова Е. Н., Потапов И. Р., Будко К. Л. Диагностика неисправностей датчиков и стратегия отказоустойчивого управления квадрокоптером	243
Сербина Л. И. Некоторые вопросы качественного анализа квазилинейного параболического уравнения подземного переноса . .	244
Ситник С. М. Критический обзор основных классов операторов дробного интегродифференцирования	245
Ситник С. М., Шишкина Э. Л., Алзамили Х. Ф., Маслов М. Г. Применение резольвентных тождеств Гильберта для вычисления интегралов от специальных функций	247
Скорынин А. С., Федоров В. Е. Интегрированные разрешающие функции для уравнений с дробной производной Герасимова–Капуто	250
Созаева Л. Т. Математическое моделирование рассеяния радиоволн на облачных каплях	251
Сокуров А. А. Методика численного расчета интегралов в теории функционала электронной плотности с применением GPU . . .	253
Солдатов А. П. Метод триангуляции в краевых задачах на римановых поверхностях	254
Твердый Д. А., Паровик Р. И. Об одной обратной задаче для неоднородного дробного уравнения с оператором типа Герасимова–Капуто переменного порядка	255
Твердый Д. А., Малкин Е. И. Компьютерное моделирование распространения плоской электромагнитной волны в волноводе земля-ионосфера и эффектов ее взаимодействия с неоднородностями проводимости границ	256
Тетуев Р. К. Применение ИИ при поиске аналитических соотношений для сверхбыстрого преобразования спектральных коэффициентов	258
Тотиева Ж. Д. О разрешимости двумерной обратной задачи для уравнения термовязкоупругости	259
Туров М. М., Гомзикова Ю. А. Начальная задача для уравнений с дробными производными различных типов	261
Тусупбекова Э. Е. Исследование и анализ математической модели преобразования биомассы	263
Тутукова Б. А. Экономико-математическая модель оценки эффективности реализации нацпроектов	264
Умаров Р. А. Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками с переменными коэффициентами	267

Умаров Х. Г. Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи Коши для модельного уравнения третьего порядка . . .	269
Уринов А. К., Окбоев А. Б. Видоизмененная задача Коши для неоднородного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода	271
Уртаева А. А. О свойствах собственных значений краевой задачи четвертого порядка на сети	273
Усмонов Д. А. Нелокальная задача для вырождающегося уравнения четвертого порядка, содержащего интегро-дифференциальный оператор дробного порядка с функцией Бесселя в ядре	275
Утебаев Д., Тлеуов К. О. Разностные схемы повышенной точности для параболического уравнения с дробной производной .	277
Учайкин В. В. Мезофрактальная модель спектра мощности турбулентной суспензии	278
Учайкин В. В., Кожемякина Е. В. Нелокальные уравнения в статистике афтершоков	280
Федоров В. Е., Мамедова А. А. Начальная задача для уравнения с распределенной производной Римана–Лиувилля	280
Федотов Е. Д. Задача Коши для уравнения с обратимым оператором при старшей производной Капуто по времени	281
Филин Н. В. Об однозначной разрешимости задачи Коши для уравнений с распределенной дробной производной Герасимова–Капуто, заданной интегралом Стилтжеса	282
Фоменко Л. Ю., Сафонова У. Н., Грибкова Л. А. Математическое моделирование в кадастровой деятельности	283
Хайруллоев Ш. А. Оценка специальных кратных тригонометрических сумм	285
Халилов К. С. Задачи с интегральными условиями для парабологиперболического уравнения с дробной производной Капуто . .	286
Хибиев А. Х. Устойчивость и сходимость разностных схем второго порядка аппроксимации для обобщенного нелинейного диффузионно-волнового уравнения с запаздыванием	289
Хубиев К. У. Аналог задачи Трикоми для одного модельного нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа . . .	290
Хуштова Ф. Г. Краевая задача с условием третьего рода для уравнения дробной диффузии	291
Чернышев Г. В. К формализации построения информационных моделей	294
Чуриков В. А. Геометрические особенности функции степеней единицы	295

Шалая А. А., Гура Д. А., Дьяченко Р. А., Косолапов П. А. Геоинформационная система пространственного анализа данных на основе результатов трехмерного лазерного сканирования	297
Шананин Н. А. О продолжении решений уравнений с аналитическими коэффициентами	298
Шерматова Х. М. Об одной краевой задаче для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка в смешанной треугольной области, когда угловой коэффициент характеристики оператора первого порядка больше единицы	300
Шитикова М. В. Критический обзор использования операторов дробного порядка в динамических задачах механики деформируемого твердого тела	302
Щенявская Л. А., Олейникова Л. А. Использование информационного моделирования в проектировании и строительстве . .	304
Эдиев Д. М. Бихевиоральная модель возрастной аккумуляции с приложениями к реконструкции возрастной структуры населения	305
Энеева Л. М. Нелокальная краевая задача для уравнения с производными дробного порядка с различными началами	307
Энес А. З., Хажметов М. В., Бжихатлов К. Ч., Канкулов С. А. Разработка модуля предобработки изображений методом поиска в ширину для системы распознавания кожных заболеваний на основе мультиагентной нейрокогнитивной архитектуры	308
Эфендиев Б. И. К теории обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования в младших членах	310
Юлбарсов Х. А. Вторая начально-краевая задача для псевдопараболического уравнения третьего порядка с дробной производной и с оператором Бесселя	310
Abdullayev O. Direct and inverse problems for a parabolic-hyperbolic equation with the nonlinear loads	313
Aksyonov A. M., Murashkina T. I., Kukushkin A. N. Math modeling fiber-optic microtransducer of rotation angle	314
Antonov N. A. Application of the fractional power series to solving some fractional Emden–Fowler type equations	316
Arzikulov Z. O. Some systems of PDE associated with the multiple confluent hypergeometric functions and their applications	318
Ashurov R. R. Non-local and inverse problems for the Rayleigh–Stokes equation	320
Ashurov R. R., Murzambetova M. B. Inverse problem of determining the fractional derivative order in the mixed-type equations .	322

Ashurov R. R., Saparbayev R. A. Forward and inverse problems for fractional telegraph equation	323
Bodrenko A. Trajectory of movement of a jumping brachiating robot	325
Chubatov A. To solving of multidimensional fully nonlinear parabolic equations using backward SDEs and deep learning	326
de Oliveira H. B., Khompysh Kh., Shakir A. G. Navier–Stokes–Voigt system governing density-dependent flows with vacuum . . .	328
Dzhamalov S. Z., Mambetsapaev K. A. Direct and inverse problems with non-local boundary conditions for mixed-type equations in bounded and unbounded domains	330
Durdiev D. K., Rahmonov A. A. Investigation of a kernel in a nonlocal problem for the time-fractional diffusion equation . .	331
Farmonov Sh. R. About an analogi of Frankl problem for mixed type equation with strong degeneration	332
Guliyev H., Askerov I. Optimal problem of control with the high coefficient of the second order parabolic equation with an unstable solution	333
Juraev D. A. Regularization of the Cauchy problem for systems of equations of elliptic type with constant coefficients	336
Karimov E. Bivariate Mittag-Leffler type functions as a key part of solutions to fractional differential equations	338
Karimov E. T., Turdiev Kh. N. Boundary-value problem with Wantzell–Neumann condition for a subdiffusion equation involving Hilfer–Prabhakar fractional derivative	340
Khompysh Kh. Nonlocal problems for pseudo-parabolic equation with $p(u(x, t))$ -Laplace operator	342
Khompysh Kh., Shazyndayeva M. K. An inverse problem for integro-deifferential pseudoparabolic equation	343
Komilova N. J. Generalized solution of the Cauchy problem for the degenerating hyperbolic equation of the second kind	344
Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the initial-value problem for a semilinear wave equation with a dirac potential . . .	346
Koshanov B., Bakytbek M. On some nonlocal boundary value problems for second order elliptic systems	348
Kosmakova M., Izhanova K. Boundary value problem for a fractional diffusion equation with a fractional load	351
Kukushkin M. V. Decomposition on the root vector series of the non-selfadjoint operators. The convergence exponent less or equal to the order of summation	353
Litvinov V. L., Litvinova K. V. Stochastic vibrations of a string with moving boundaries	353
Mamanazarov A. O. An instantaneous blow-up of solutions of Cauchy problems for Sobolev-type nonlinear equations on the Heisenberg group	354

Mardanov M. J., Sharifov Y. A. Existence and uniqueness theorems for the first-order non-linear impulsive differential equations with multipoint boundary conditions	355
Mazhgikhova M. G. Dirichlet–Neumann boundary value problem for a fractional order differential equation with delay	356
Mukhambetkaliyev M. B. Time dependent inverse source problem for pseudoparabolic equation with memory	357
Oshkhunov M. M. A new version of the least squares method for linear regression analysis	358
Oshkhunov M. M., Zhazaeva E. M., Bechelova A. R., Esankulova M. H. Short-time prognostic models for COVID-19 distribution by modified least square method	360
Pramanick T., Sinha R. K. Composite finite element method implementation for nonlinear parabolic problems in nonconvex domains	362
Providas E., Parasidis I., Guliyev S. Z. Taking into account the state of a dynamic object at current and delayed moments in time when controlling it with feedback	363
Pyatkov S. G. On some classes of inverse problems in stratified media	365
Rahmatullaev M., Abdukahorova Z. On weakly periodic p -adic generalized Gibbs measures for the p -adic Ising model on the Cayley tree of order three	366
Rasulov M. S. A free boundary problem for a quasilinear Leslie-Gower prey-predator system	368
Shumafov M. M., Tlyachev V. B. Stochastic stability of differential equations of the second order	369
Sobirov Z. A., Turemuratova A. A. Inverse source problem for the space-time fractional parabolic equation on a star graph with integral over-determination condition	371
Takhirov J. O. On the mathematical model of tumor-immune interactions	372
Tashpulatov S. M. Spectra of the energy operator of two-magnon systems with four-spin exchange Hamiltonian in the lattice	374
Tulakova Z. R. Lauricella function and its application to the exterior Neumann problem for a multidimensional singular elliptic equation	376

**СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА
В ГИПЕРОКТАНТЕ МНОГОМЕРНОГО ШАРА**

Аббасова М. О.

Наманганский университет, Наманган, Узбекистан

abbasovamunira21@gmail.com

Пусть R_m – m -мерное евклидово пространство, $x := (x_1, \dots, x_m) \in R_m$ и $\Omega_n^m \subset R_m$ – 2^{-n} -ая часть m - мерного шара радиуса R с центром в начале координат: $\Omega_n^m = \{x : x_1^2 + \dots + x_m^2 < R^2, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ (здесь и далее $m \geq 2, 0 < n \leq m$), а S_n^m – такая же часть соответствующей этому шару сферы: $S_n^m = \{x : x_1^2 + \dots + x_m^2 = R^2, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$.

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0$$

в области Ω_n^m , где $u(x)$ – искомая функция переменных $x := (x_1, \dots, x_m)$.

Введем обозначения:

$$\tilde{x}_p = (x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_m) \in R_{m-1};$$

$$d\tilde{x}_p = dx_1 \dots dx_{p-1} dx_{p+1} \dots dx_m;$$

$$D_p := \left\{ \begin{array}{l} x : x_1^2 + \dots + x_{p-1}^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_m^2 < R^2, \\ x_1 > 0, \dots, x_{p-1} > 0, x_{p+1} > 0, \dots, x_n > 0 \end{array} \right\}, p = \overline{1, n}.$$

$$R^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2, \quad \rho^2 = \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \quad r^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - \xi_i)^2, \quad \tilde{r}^2 = \sum_{i=1}^m \left(x_i - \frac{R^2}{\rho^2} \xi_i \right)^2,$$

$$I_p = \{(i_1, \dots, i_p) : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n, p = \overline{1, n}\}; \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m);$$

$$r_{I_p}^2 = \sum_{j \in I_p} (x_j + \xi_j)^2 + \sum_{j \in (1, \dots, m) \setminus I_p} (x_j - \xi_j)^2;$$

$$\delta_k(i_j) := \begin{cases} 1, & 1 \leq i_j \leq k \leq n, \\ 0, & 0 \leq k \leq i_j \leq n, \end{cases}, \quad \delta_k(I_p) = \sum_{j=1}^p \delta_k(i_j), \quad k = \overline{0, n}.$$

Нетрудно заметить, что $\delta_0(I_p) = 0$ и $\delta_n(I_p) = p$.

Обобщенная задача Хольмгрена (смешанная задача) $D^k N^{n-k}$.
Найти гармоническое решение $u_k(x) \in C(\overline{\Omega_n^m}) \cap C^2(\Omega_n^m)$ уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при $0 \leq k \leq n$, удовлетворяющее условиям:

$$u_k(x)|_{x_p=0} = \tau_p(\tilde{x}_p), \quad \tilde{x}_p \in \overline{D_p}, \quad p = \overline{1, k}, \quad (1)$$

$$\left(x_p^{2\alpha_p} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_p} \right) \Big|_{x_p=0} = \nu_p(\tilde{x}_p), \quad \tilde{x}_p \in D_p, \quad p = \overline{k+1, n}, \quad (2)$$

$$u(x)|_{S_n^m} = \varphi(x), \quad x \in S_n^m, \quad (3)$$

где $\tilde{x}_p = (x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_m)$, $\tau_p(\tilde{x}_p)$ и $\varphi(x)$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\tau_p(\tilde{x}_p)|_{S_n^m} = \varphi(\tilde{x}_p)$ ($p = \overline{1, k}$).

Отметим, что при $k = 0$ исчезают условия (1), а при $k = n$ – условия (2). Задачи, соответствующие предельным значениям k , т. е. задачи Хольмгрена и Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω_m^n исследованы в работах [1] и [2], соответственно.

Теорема. *Смешанная задача $D^k N^{n-k}$ для уравнения Лапласа в области Ω_m^n имеет не более одного решения при $0 \leq k \leq n$.*

Доказательство единственности решения поставленной задачи проводится аналогично доказательству теорем единственности решения задачи Хольмгрена [1].

Существование решения докажем методом функции Грина. Для определенности положим $m > 2$ (исследование классического случая $m = 2$ можно найти в монографии [3]).

Для построения функции Грина в случае областей с достаточно широкой группой симметрий весьма эффективным оказывается метод симметрий. К числу таких областей, для которых функция Грина может быть легко построена, относятся шар, полушарие, четверть шара, четверть шара и т. д.

В случае 2^{-n} -ой части шара, функция Грина смешанной задачи $D^k N^{n-k}$ для уравнения Лапласа при $0 \leq k \leq n$ имеет вид:

$$G_k(x; \xi) = \frac{\Gamma(m/2)}{2(m-2)\pi^{m/2}} \left\{ \sum_{p=0}^n \sum_{I_p} \frac{(-1)^{\delta_k(I_p)}}{r_{I_p}^{m-2}} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2} \sum_{p=0}^n \sum_{I_p} \frac{(-1)^{\delta_k(I_p)}}{\tilde{r}_{I_p}^{m-2}} \right\}.$$

Теперь, следуя [1] и [2], решение смешанной задачи для уравнения Лапласа в области Ω_m^n с условиями (1)–(3) можно получить в явном виде:

$$u_k(\xi) = \sum_{p=1}^k \int_{D_p} \tau(\tilde{x}_p) \cdot \frac{\partial G_k(x; \xi)}{\partial x_p} \Big|_{x_p=0} d\tilde{x}_p - \\ - \sum_{p=k+1}^n \int_{D_p} \nu(\tilde{x}_p) \cdot G_k(x; \xi) \Big|_{x_p=0} d\tilde{x}_p + \int_{S_m^n} \varphi(x) \cdot \frac{\partial G_k(x; \xi)}{\partial N} dS_m^n,$$

где N – внешняя нормаль к S_m^n .

Литература

1. *Ergashev T. G., Abbasova M. O.* Holmgren's problem for the Laplace equation in the hyperoctant of the multidimensional ball // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 6. Pp. 1303–1312.
2. *Abbasova M. O., Ergashev T. G., Yuldashev T. K.* Dirichlet problem for the Laplace equation in the hyperoctant of the multidimensional ball // Lobachevskii Journal of Math. 2023. Vol. 44, no. 3. Pp. 1072–1079.
3. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Абдрахманов А. М., Абдрахманова Р. П.

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия; *abdrai@mail.ru*

Для одного линейного уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа задача Дирихле не может иметь более одного решения, по крайней мере локально (в малой области). Для эллиптических систем оказалось, что свойства разрешимости классических граничных задач существенно отличаются от случая одного уравнения.

В 1948 году А. В. Бицадзе привел пример эллиптической системы

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} - 2v_{xy} = 0, \\ 2u_{xy} + v_{xx} - v_{yy} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

задача Дирихле для которой в круге имеет бесконечное число решений (то есть эллиптичность системы не обеспечивает единственность решения задачи).

В комплексной записи система (1) имеет вид

$$w_{z\bar{z}} = 0, \quad (2)$$

где

$$w = u + iv, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Общее решение системы (2) имеет вид

$$w = \bar{z}\phi(z) + \psi(z),$$

где $\phi(z)$ и $\psi(z)$ – произвольные голоморфные функции от $z = x + iy$. Понятно, что для разрешимости задачи Дирихле нужно, чтобы tf было граничным значением голоморфной внутри области D функции. В этом случае решение задачи будет выглядеть так

$$w = (1 - z\bar{z})\chi(z) + \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{tf(t)}{t - z} dt,$$

где $\chi(z)$ – произвольная голоморфная функция.

Рассмотрим далее систему

$$\begin{cases} x\Delta u + y\Delta v + 2\lambda(u_x - v_y) = 0, \\ -y\Delta u + x\Delta v + 2\lambda(u_x + v_y) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

для которой задача Дирихле в единичном круге будет зависеть от вырождения и коэффициента при младших членах.

Система (3) в комплексной записи имеет вид $zw_{z\bar{z}} + \lambda w_{\bar{z}} = 0$. Для этой системы доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\lambda > 0$, тогда однородная задача Дирихле имеет только тривиальное решение, а неоднородная задача Дирихле всегда разрешима и притом единственным образом для функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t^{k+1}} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2[\lambda] + 2,$$

где $[\lambda]$ – целая часть λ .

Теорема 2. Пусть $\lambda \leq 0$, $\lambda = -m + \alpha$, тогда однородная задача Дирихле имеет $m + 1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача Дирихле всегда разрешима.

Рассмотрим систему

$$z^\nu w_{z\bar{z}} + \lambda w_{\bar{z}} = 0,$$

где ν – целое число, $\nu \geq 2$, λ – произвольное комплексное число.

Теорема 3. Пусть $\nu \geq 2$, λ – произвольное комплексное число, тогда однородная задача Дирихле имеет только тривиальное решение, а неоднородная задача Дирихле всегда разрешима и притом единственным образом.

Систему (1) запишем в следующем виде

$$\begin{cases} -\Delta u + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \\ -\Delta v - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{cases}$$

Таковыми же свойствами будет обладать и система

$$\begin{cases} -\Delta u + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \\ -\Delta v + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \end{cases}$$

которую можно обобщить на случай n переменных.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТОЧКАМИ НАГРУЖЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Абдуллаев В.М.^{1,2,a}, Гашимов В.А.^{1,b}

¹ Институт систем управления НАН Азербайджана

² Азербайджанский государственный университет нефти
и промышленности, Баку, Азербайджан

^a vaqif_ab@rambler.ru, ^b vugarhashimov@gmail.com

Рассматривается задача оптимального управления точками нагружения и соответствующими функциями реакций, описываемая параболическим уравнением:

$$u_t(x, t) = \mathcal{L}u(x, t) + \sum_{s=1}^n q_s(t) \mathcal{N}(\xi_s(t)) u(x, t) + F(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (t_0, t_f],$$

с начальными и краевыми условиями:

$$u(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad u(0, t) = \chi_1(t), \quad u(l, t) = \chi_2(t), \quad x \in [0, l].$$

Здесь $u_t(x, t)$ – непрерывно дифференцируемая по $t \in [t_0, t_f]$ и дважды непрерывно дифференцируемая по $x \in [0, l]$ функция, определяющая фазовое состояние исследуемого процесса; t_0, t_f – начальный и конечный момент времени протекания процесса; непрерывные функции $\varphi_0(x), \chi_1(t), \chi_2(t)$ заданы. Оптимизируемые кусочно-непрерывные функции $q_s(t), s = 1, 2, \dots, n$, определяющие реакции в точках нагружения, должны удовлетворять условиям:

$$\underline{q}_s \leq q_s(t) \leq \overline{q}_s, \quad t \in [t_0, t_f], \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

n – заданное число точек нагружения.

Оператор \mathcal{L} и оператор нагружения $\mathcal{N}(\cdot)$ определены следующим образом:

$$\mathcal{L}u(x, t) = a_0^2 u_{xx}(x, t) + a_1 u_x(x, t) + a_2 u(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in (t_0, t_f),$$

$$\mathcal{N}(\xi) u(x, t) = u(\xi, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in (t_0, t_f].$$

Координаты точек нагружения $\xi_s(t), s = 1, 2, \dots, n$, являются управляемыми и описываются дифференциальными уравнениями:

$$\dot{\xi}_s(t) = f_s(\xi_s(t), \vartheta_s(t), t), \quad t \in (t_0, t_f], \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

с начальными условиями:

$$\xi_s(t_0) = \xi_s^0 \in (0, l), \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Заданные функции $f_s(\cdot, \cdot, t), s = 1, 2, \dots, n$, непрерывно дифференцируемые по первым двум аргументам и кусочно-непрерывные по t , определяют закон движения точек нагружения, кусочно-непрерывные функции $\vartheta_s(t)$ являются управляющими воздействиями на движение точек нагружения $\xi_s(t), s = 1, 2, \dots, n$.

Имеются позиционные ограничения на управления:

$$\underline{\vartheta}_s \leq \vartheta_s(t) \leq \overline{\vartheta}_s, \quad t \in [t_0, t_f], \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Рассматриваемая задача заключается в нахождении допустимых оптимальных управляющих воздействий $q = q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ и $\vartheta = \vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_n(t))$, которые вместе с соответствующим фазовым состоянием $u(x, t)$ доставляют минимальное значение функционалу:

$$J(q, \vartheta) = \int_0^l \mu(x) [u(x, t_f; q, \vartheta) - U(x)]^2 dx + \mu_1 \|q(t)\|^2 + \mu_2 \|\vartheta(t)\|^2.$$

Здесь кусочно-непрерывная функция $U(x)$, $x \in [0, l]$, определяющая желаемое конечное состояние процесса; $\mu(x)$, μ_1 , μ_2 – весовые функция и параметры являются заданными.

Рассматриваемая постановка задачи может возникать как при оптимизации нагруженных систем, так и при решении обратных задач по идентификации неизвестных мест нагружения и функций реакции на нагружения. Эти задачи возникают также при решении задач управления с обратной связью, в которых точки замера состояния могут перемещаться. Специфика и новизна исследуемой задачи заключается в том, что координаты точек нагружения являются решением системы дифференциальных уравнений и изменяются во времени под действием управляющих воздействий.

Получены необходимые условия оптимальности оптимизируемых параметров, участвующих в нагруженной начально-краевой задаче и задачах Коши, описывающих движения точек нагружения. Условия оптимальности содержат формулы для градиента целевого функционала, которые использованы при применении методов оптимизации первого порядка для численного решения задачи по управлению перемещением мест нагружения и функциями реакции на нагружения.

В докладе будут приведены результаты компьютерных экспериментов и проведен их анализ.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 230 с.
2. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 823 с.
3. *Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р.* Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 1. С. 99–112.
4. *Айда-заде К. Р., Гашимов В. А.* Управление с обратной связью процессом нагрева пластины с оптимизацией мест расположения источников и контроля // Автомат. и телемех. 2020. № 4. С. 120–139.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ НА ПРИМЕРЕ ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Абдурахманов А. Г.

*Чирчикский государственный педагогический университет, Чирчик,
Узбекистан; abdushukur1969@mail.ru*

Система образования играет особую роль в информатизации общества. Ведь образование, с одной стороны, как потребитель информации, с другой стороны, как создатель новых информационных технологий (путем выпуска высококвалифицированных кадров). Умение работать с информацией – одна из приоритетных задач современного человека. На

современном этапе развития система образования развивает у учащихся навыки критического мышления (критическое мышление – это знание, понимание, применение, анализ, синтез, оценка). Информатизация образования означает процесс обеспечения сферы образования методологией, технологией и оптимальным использованием современных ИК-технологий, направленных на реализацию психолого-педагогических целей образования и обучения и их использование в удобных и комфортных условиях. IT-специалист, обладающий знаниями прикладной информатики, востребован во всех сферах деятельности, где используются информационные технологии. Работник с этим профилем безусловно имеет преимущество перед другими кандидатами. На сегодняшнем уровне прикладная информатика представлена практически во всех сферах. Важную роль в обучении прикладной математике играют математические пакеты. Особенно это наглядно видно в математическом моделировании. Модель – это искусственно созданное изображение, описывающее структуру и основные свойства реального объекта, системы, ситуации или явления для их изучения. Термин «модель» происходит от латинского *modulus* – мера, образец. Процесс построения моделей называется моделированием. Моделирование относится к особой группе универсальных учебных действий, которые, в широком смысле, определяют инвариантную основу способности обучаемого к обучению, саморазвитию и самосовершенствованию. Использование математических пакетов намного облегчает усвоение предмета «математическое моделирование». Рассмотрим на примере одной простой модели распространения гриппа в городе с населением 260000 человек (примерно как город Чирчик).

Пусть в городе живет 260000 человек. В начальный период эпидемии инфицировано a_0 человек. Остальные $z_0 = 260000 - a_0$ человек здоровы. Будем считать, что все, перенесшие заболевание, приобретают иммунитет к нему и больше не болеют. Поэтому число заболевших в первый день пропорционально произведению числа больных на число еще не болевших: $z_1 = p a_0 z_0$, где p – коэффициент пропорциональности, зависящий от различных мер профилактики. Обозначим через a_i – число человек, заболевших в течении i -го дня, через z_i – число человек еще не болевших к концу этого дня. Тогда математическую модель эпидемии можно описать двумя уравнениями: $a_i = p a_{i-1} z_{i-1}$, $z_i = z_{i-1} - a_i$. Спрашивается, как развивается эпидемия, т. е. как ежедневно изменяется число, а больных и число z не болевших?

Пусть в городе с населением $N = 260000$ человек первоначально заболели 20 человек, а коэффициент $p = 0,000005$. Конечно, все это вычислять вручную огромный труд, а вычисление с помощью программы Maple не составляет труда: `>with(plots)`

```
>gr1:=Listplot([bol], color=red)
>gr2:=Listplot([Nebol], color=blue)
>display([gr1,gr2], view=[1..n,0..N], thickness=2,
```

axis=[gridlines=[15, color=green]]);

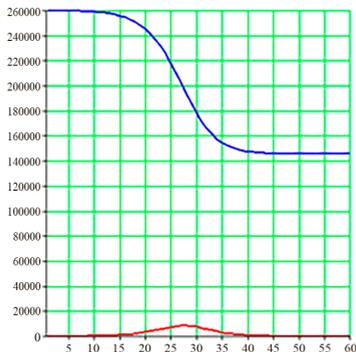


Рис. 1. Зависимость больных и здоровых по дням.

```
>Bol[28],Nebol[28] 8235, 193794
>Bol[60],Nebol[60] 1, 145435
>trunc(B[j],j=0...n) 114564
```

Как мы видим, приложение информационных технологий в образовании намного облегчает усвоение предмета и усиливает мотивацию для изучения математики.

Литература

1. *Melnikov O. I.* Mathematical modeling using the MAPLE system. Minsk, 2009. 100 p.
2. *Абдурахманов А. Г.* Использование информационных технологий в образовании // VI Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии информатики и физики» 5-9 декабря 2021. Нальчик. С. 22–23.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПЛОСКОЙ ЦЕЛЬЮ

Агаркова Н. Н.^a, Васильев В. Б.^b

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия; ^aagarkova_n@bsu.edu.ru, ^bvbv57@inbox.ru

Рассмотрим следующую задачу. Пусть задано уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in W_+^a \equiv C_+^a \times (-\infty, +\infty) \subset \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

где $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}$, $A : H^s(\mathbb{R}^3) \rightarrow H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^3)$ – ограниченный псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющий условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq c_2 c_1(1 + |\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

с положительными постоянными c_1, c_2 и допускающим волновую факторизацию относительно W_+^a с индексом α , таким, что $1/2 < \alpha - s < 3/2$.

К уравнению (1) добавляется граничное условие Дирихле на сторонах двугранного угла W_+^a

$$u|_{x_2-ax_1=0} = f(x_2 + ax_1, x_3), \quad u|_{x_2+ax_1=0} = g(x_2 - ax_1, x_3), \quad (2)$$

где f, g – заданные функции из $H^{s-1}(\mathbb{R}_+^2)$, и решение задачи (1), (2) разыскивается в пространстве $H^s(W_+^a)$.

Краевая задача (1), (2) была сведена к системе интегральных уравнений с параметром [1, 3], однозначная разрешимость которой гарантировала однозначную разрешимость рассматриваемой краевой задачи.

В этой работе мы рассматриваем задачу (1), (2) как допредельный вариант следующей краевой задачи. Пусть Γ – полуплоскость в \mathbb{R}^3 вида $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_1 = 0, x_2 > 0\}$. Интересующая нас задача имеет вид

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \\ u|_{\Gamma} = h(x_2, x_3), \end{cases} \quad (3)$$

где $h \in H^{s-1}(\mathbb{R}_+^2)$ – заданная функция. Геометрически переход от задачи (1), (2) к задаче (3) получается в пределе при $a \rightarrow \infty$, и двугранный угол вырождается в полуплоскость.

В предположении наличия специальной волновой факторизации символа [1] при всех достаточно больших a удается обосновать предельный переход от задачи (1), (2) к задаче (3) и свести задачу (3) к эквивалентному интегральному уравнению.

Ранее в работах [2–5] были рассмотрены другие случаи, как двумерные, так и трехмерные, связанные с обоснованием предельного перехода, когда размеры конуса стремятся к своим предельным значениям. В частности, были рассмотрены случай единственного решения уравнения (1) и краевые задачи с интегральным условием.

Более сложную задачу представляет собой случай, когда конус имеет вид $C_+^a \times (0, +\infty)$, который при $a \rightarrow \infty$ вырождается в плоский квадрант.

Литература

1. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: URSS, 2010. 135 с.
2. *Vasilyev V. B.* On certain 3-dimensional limit boundary value problems // *Lobachevskii J. Math.* 2020. Vol. 41, no. 5. Pp. 917–925.
3. *Васильев В. Б., Кутаиба Ш., Ядута А. З.* Асимптотический анализ эллиптической краевой задачи в клине // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* 2021. Т. 195. С. 3–9.
4. *Васильев В. Б., Кутаиба Ш.* Эллиптические задачи в области с вырожденными особенностями // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* 2022. Т. 216. С. 50–56.
5. *Агаркова Н. Н., Васильев В. Б., Гебресласи Х. Ф.* О задаче Дирихле в плоской области с разрезом // *Прикладная математика & Физика.* 2023. Т. 55, № 3. С. 258–264.

**ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА**

Азизов М. С.^a, Орипов Д. Д.^b

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

^a *muzaffar.azizov.1988@mail.ru*, ^b *dastonbekoripov94@gmail.ru*

В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее уравнение высокого четного порядка вида

$$B_{\gamma-1/2}^t u + (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) = f(x, t), \quad (1)$$

вырождающегося на боковой стороне $x = 0$ области Ω , где α, γ, k, T – заданные действительные числа, причем $0 \leq \alpha < 1, k \in N$, а $f(x, t)$ – заданная функция.

Исследуем следующую начально-граничную задачу:

Задача. *Найти функцию $u(x, t)$, обладающую следующими свойствами:*

1) $\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \in C(\bar{\Omega}), \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\Omega), \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \in C(\bar{\Omega}), j = \overline{0, k-1};$

$t^{2\gamma} u_t \in C(\bar{\Omega}); B_{\gamma-1/2}^t u, \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega);$

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3) удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^{2\gamma} u_t(x, t) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < 1;$$

$$p \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(0, t) = q \frac{\partial^j}{\partial x^j} u(1, t), \quad j = \overline{0, k-1}, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$q \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \Big|_{x=0} = p \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \Big|_{x=1}, \quad j = \overline{0, k-1}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные непрерывные функции.

Отметим, что поставленная задача для уравнения (1) при $\alpha = 0, k \in \mathbb{N}$ изучена в работе [1], а в работе [2] рассмотрена нелокальная краевая задача.

Доказаны следующие лемма и теорема.

Лемма 1. *Пусть функция $g(x)$ непрерывна вместе со своими производными до $(k-1)$ -го порядка включительно, функция $x^\alpha g^{(k)}(x)$ непрерывна вместе со своими производными также до $(k-1)$ -го порядка включительно, а функция $(x^\alpha g^{(k)}(x))^{(k)}$ непрерывна вместе со своими производными также до $(k-1)$ -го порядка включительно,*

$$x^{\alpha/2} \left[x^\alpha g^{(k)}(x) \right]^{(2k-1)} \in C(0, 1), \quad x^{\alpha/2} \left[x^\alpha g^{(k)}(x) \right]^{(2k)} \in L_2(0, 1),$$

$$p g^{(j)}(0) = q g^{(j)}(1), \quad q \left(x^\alpha g^{(k)}(x) \right)^{(j)} \Big|_{x=0} = p \left(x^\alpha g^{(k)}(x) \right)^{(j)} \Big|_{x=1},$$

$$p\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{(k+j)} = q\left(x^\alpha g^{(k)}(x)\right)\Big|_{x=1}^{(k+j)}, \quad j = \overline{0, k-1}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^3 g_n^2 \leq \int_0^t x^\alpha \left[\left(x^\alpha g^{(k)}(x) \right)^{(2k)} \right]^2 dx.$$

Теорема 1. Пусть $\gamma \in (0, 1/2)$ и функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 1, а функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 1 по аргументу x равномерно по t . Тогда функция

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) + \right. \\ & + \frac{\pi}{2 \cos \gamma \pi} \int_0^t \left[J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} \tau) - \right. \\ & \left. \left. - J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} \tau) \right] \left(\frac{t}{\tau} \right)^{1/2-\gamma} \tau f_n(\tau) d\tau \right\} v_n(x) \end{aligned}$$

определяет единственное решение поставленной задачи, где $a_n = (1/2) \times (\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2} \Gamma(1/2-\gamma) \varphi_{2n}$, $b_n = (\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma} \Gamma(1/2+\gamma) \varphi_{1n}$, $J_\nu(x)$ – функция Бесселя первого рода [3], $\Gamma(z)$ – гамма-функция [4], а $\varphi_{1n} = \int_0^p \varphi_1(x) v_n(x) dx$, $\varphi_{2n} = \int_0^p \varphi_2(x) v_n(x) dx$, $f_n(t) = \int_0^p f(x, t) v_n(x) dx$, λ_n и $v_n(x)$, $n \in N$ – собственные значения и собственные функции следующей спектральной задачи:

$$Mv \equiv (-1)^k \left[x^\alpha v^{(k)}(x) \right]^{(k)} = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1;$$

$$pv^{(j)}(0) = qv^{(j)}(1), \quad q \left(x^\alpha v^{(k)}(x) \right)^{(j)} \Big|_{x=0} = p \left(x^\alpha v^{(k)}(x) \right)^{(j)} \Big|_{x=1}, \quad j = \overline{0, k-1}.$$

Литература

1. Уринов А.К., Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 273–292.
2. Уринов А.К., Азизов М.С. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // Вестн. Удмур. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, № 2. С. 240–255.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: ИЛ., 1949. 798 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ
ИСТОЧНИКОВ В КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ СЛОЖНОЙ
СТРУКТУРЫ**

Айда-заде К. Р.^{1, 2, a}, Ашрафова Е. Р.^{1, 3, b}

¹Институт систем управления НАН Азербайджана

²Институт математики и механики НАН Азербайджана

³Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

^akamil_aydazade@rambler.ru, ^bashrafova.yegana@gmail.com

В работе решается обратная задача по определению параметров источников в колебательной системе сложной структуры [1]. Рассматривается объект, состоящий из M стержней в произвольном порядке соединенных своими концами. Представим эту систему в виде ориентированного графа, у которого каждая дуга представляет собой объект, распределенный по длине дуги и изменяющийся во времени состоянием.

Пусть состояние колебания каждого из стержней длиной l^{ks} при $x \in (0, l^{ks})$, $t \in [t_0, T]$ описывается уравнением гиперболического типа

$$u_{tt}^{ks}(x, t) = a^{ks} u_{xx}^{ks}(x, t) - b^{ks} u_t^{ks}(x, t) + q^{ks}(t) \delta(x - \xi^{ks}) \quad (1)$$

с нелокальными $2M$ неразделенными краевыми условиями:

$$\sum_{k \in I_i^-} [\alpha_{ik}^\nu u^{ik}(0, t) + \beta_{ik}^\nu u_x^{ks}(0, t)] + \sum_{k \in I_i^+} [\alpha_{ki}^\nu u^{ki}(l^{ki}, t) + \beta_{ki}^\nu u_x^{ks}(l^{ik}, t)] = \gamma_i^\nu. \quad (2)$$

Здесь $\nu = \overline{1, n_i}$, $i \in I$; I – множество вершин, $u^{ks}(x, t)$ – состояние (k, s) -й дуги в точке x в момент времени t , $(k, s) \in J$; J – множество дуг; γ_i^ν – ν -ая характеристика внешнего воздействия в i -ой вершине; a^{ks} , $b^{ks} > 0$, α_{ik}^ν , β_{ik}^ν заданы; непрерывная функция $q^{ks}(t)$ определяется мощностями внешних или внутренних источников, сосредоточенных в точках $\xi^{ks} \in (0, l^{ks})$ (k, s) -го звена. Множество звеньев, содержащих сосредоточенные источники, обозначим через $J^{ист} \subset J$.

Задача заключается в определении значений мощностей источников $q^{ks}(t)$ и мест сосредоточения $\xi^{ks} \in (0, l^{ks})$, $(k, s) \in J$.

Известно [2], что при длительном функционировании колебательного процесса существует такое τ , $\tau > t_0$, что при $t > \tau$ на текущее состояние процесса существенно влияют лишь значения краевых условий на временном интервале $[\tau, T]$. Поэтому будем предполагать, что в некоторый начальный момент времени t_0 начальные условия для процесса (1)

$$u^{ks}(x, t_0) = \phi_0^{ks}(x), \quad u_t^{ks}(x, t_0) = \phi_1^{ks}(x), \quad (k, s) \in J \quad (3)$$

определены не точно, а задано некоторое множество U^0 их возможных значений, которые могут быть определены в параметрическом виде:

$$U^0 = \{ \phi^{ks}(x, \gamma) = (\phi_0^{ks}(x; \gamma), \phi_1^{ks}(x; \gamma)) : (k, s) \in J, \quad \gamma \in \Gamma \in R^\nu \}. \quad (4)$$

Здесь Γ – заданное множество возможных значений параметров, функция $\phi(x, \gamma)$ определена с точностью до $\gamma \in \Gamma$ с заданными функциями плотности $\rho_\Gamma(\gamma) = (\rho_\Gamma^{\phi_0}(\gamma), \rho_\Gamma^{\phi_1}(\gamma))$.

Пусть для определения неизвестных параметров в некоторых точках графа $\eta^{ks} \in (0, l^{ks})$ некоторых звеньев $(k, s) \in \bar{J}$, $\bar{J} \subset J$ ведутся замеры состояния колебательных процессов:

$$(u^{ks}(\eta^{ks}, t), u_t^{ks}(\eta^{ks}, t)) \equiv (V_0^{ks}(t), V_1^{ks}(t)). \quad (5)$$

Исходя из смысла задачи будем предполагать, что имеются естественные ограничения на идентифицируемые функции и параметры:

$$0 \leq \xi^{ks} \leq l^{ks}, \quad \underline{q} \leq q^{ks}(t) \leq \bar{q}, \quad t \in [t_0, T], \quad (k, s) \in J^{\text{ист}}, \quad (6)$$

где \underline{q} , \bar{q} – заданные величины.

Предположим, что неизвестные мощности $q^{ks}(t)$ и места расположения источников ξ^{ks} на звеньях заданного множества звеньев $J^{\text{ист}} \subset J$ требуется определить, используя наблюдаемую дополнительную информацию (5) о состоянии процессов на звеньях. Сформулированная обратная задача сводится к оптимизационной задаче, в которой использованы условия (5) для формирования минимизируемого функционала:

$$\begin{aligned} \Phi(q, \xi) = \int_\Gamma \sum_{(k, s) \in \bar{J}} \left\{ \int_\tau^T [u^{ks}(\eta^{ks}, t; \gamma, q, \xi) - V_0^{ks}(t)]^2 + \right. \\ \left. + [u_t^{ks}(\eta^{ks}, t; \gamma, q, \xi) - V_1^{ks}(t)]^2 dt \right\} \rho_\Gamma(\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

Здесь $u^{ks}(\eta^{ks}, t; q, \xi)$, $(k, s) \in J$, – расчетные значения состояния процесса в момент времени t в наблюдаемых точках $\eta^{ks} \in (0, l^{ks})$ решения краевой задачи (1)–(2) при допустимых местах и мощностях источников $(\xi, q(t))$; $[\tau, T]$ – интервал времени слежения за процессом, состояния которого уже не зависят от начальных условий при $t = t_0$.

Для решения задачи можно использовать численные методы оптимального управления, основанные на итерационных процедурах оптимизации первого порядка (например, методы проекции градиента или сопряженного градиента). Получены результаты компьютерных экспериментов.

Литература

1. Айда-заде К. Р., Ашрафова Е. Р. Численное решение задачи определения мест и объемов утечек при неустановившемся движении жидкости в трубопроводной сети сложной структуры // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2017. Т. 57, № 12. С. 36–52.
2. Ашрафова Е. Р. Численное исследование зависимости длительности влияния начальных режимов на процесс движения жидкости в трубопроводе // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, № 5. С. 1199–1207.

СИСТЕМА МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА В ПЯТОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Акимжанова Ш. А.

*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы,
Казахстан; shinar_a@mail.ru*

Приведем постановку начально-краевой задачи для одномерного нестационарного уравнения Больцмана при граничных условиях Максвелла, не вдаваясь в подробности взаимодействия газа со стенкой. Будем аппроксимировать исходную начально-краевую задачу для уравнения Больцмана соответствующей задачей для системы моментных уравнений Больцмана в пятом приближении. В заключение приведем постановку и разрешимость начально-краевой задачи для системы моментных уравнений Больцмана.

Постановка задачи. Найти решение следующей начально-краевой задачи для однородного одномерного уравнения Больцмана [1, 2]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + |v| \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} = J(f, f), \quad t \in (0, T], \quad x \in (-a, a), \quad v \in R_3^v, \quad (1)$$

$$f|_{t=0} = f^0(x, v), \quad (x, v) \in [-a, a] \times R_3^v, \quad (2)$$

$$f^+(t, x, v_1, v_2, v_3) = \beta f^-(t, x, v_1, v_2, -v_3) + (1 - \beta)\eta \exp\left(-\frac{|v|^2}{2RT_0}\right),$$

$$v_3 = |v| \cos \theta, \quad (n, v) = (n, |v| \cos \theta) > 0, \quad x = -a \text{ или } x = a, \quad (3)$$

где $f \equiv f(t, x, v)$ – функция распределения частиц в пространстве по скорости и времени; $f^0 \equiv (x, v)$ – распределение частиц в начальный момент времени (заданная функция);

$$J(f, f) \equiv \int [f(v')f(w') - f(v)f(w)]\sigma(\cos x)dw dv$$

– нелинейный оператор столкновений, записанный для максвелловских молекул; n – внешний единичный нормальный вектор границы.

Согласно условию (3), определенная часть падающих частиц отражается зеркально, а остальные частицы абсорбируются стенкой и испускаются затем с максвелловским распределением, соответствующим температуре стенки T_0 .

Если разложим функцию распределения частиц в ряд Фурье по полной ортогональной системе собственных функций, то уравнение Больцмана окажется эквивалентным бесконечной системе уравнений в частных производных относительно моментов функции распределения частиц. На практике решить бесконечную систему уравнений невозможно, поэтому ограничиваются изучением конечной системы уравнений. При этом возникают задачи получения конечной системы уравнений и аппроксимации граничного условия (3).

Начально-краевую задачу для системы моментных уравнений Больцмана в пятом приближении при граничных условиях Максвелла–Аужана [3] запишем в векторно-матричной форме [4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} = J_1(u, w)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A' \frac{\partial u}{\partial x} = J_2(u, w), \quad t \in (0, T], \quad x \in (-a, a), \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad w|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in (-a, a), \quad (5)$$

$$(Aw^+ - Bu^+)|_{x=-a} = \beta(Aw^- + Bu^-)|_{x=-a} + \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}(1-\beta)F, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$(Aw^+ + Bu^+)|_{x=a} = \beta(Aw^- - Bu^-)|_{x=a} + \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}(1-\beta)F, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

где A – квадратная матрица 6-го порядка, A' – транспонированная матрица;

$$u = (f_{00}, f_{02}, f_{04}, f_{10}, f_{12}, f_{20}), \quad w = (f_{01}, f_{03}, f_{05}, f_{11}, f_{13}, f_{21}),$$

$$J_1(u, \nu) = (0, J_{02}, J_{04}, 0, J_{12}, J_{20}), \quad J_2(u, \nu) = (0, J_{03}, J_{05}, J_{11}, J_{13}, J_{12}),$$

$u_0(x)$, $w_0(x)$ – заданные начальные вектор-функции, J_{kl} – моменты интеграла столкновений, которые выражаются через коэффициенты Тальми и Клебша–Гордона. Требуется найти решение системы уравнений (4), удовлетворяющее начальному условию (5) и граничным условиям (6) и (7). Для задачи (4)–(6) справедлива следующая теорема (мы рассмотрим чисто зеркальное отражение от границы $\beta = 1$).

Теорема. Если $W_0 = (u_0(x), w_0(x)) \in L^2[-a, a]$, то задача (4)–(6) имеет единственное решение $W = (u, w)'$ в области $[-a, a] \times [0, T]$, принадлежащее пространству $C([0, T]; L^2[-a, a])$, причем

$$\|W\|_{C([0, T]; L^2[-a, a])} \leq C_1 \|W_0\|_{L^2[-a, a]},$$

где C_1 постоянная, не зависящая от W и $T \sim O\left(\|W_0\|_{L^2[-a, a]}^{-1}\right)$.

Литература

1. Коган М. Н. Динамика разряженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 496 с.
3. Sakabekov A., Auzhani Y. Boundary conditions for the one-dimensional nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system equations // Journal of mathematical physics. 2014. Vol. 55, no. 12.
4. Акимжанова Ш. А., Сакабеков А. Макроскопические граничные условия на твердой поверхности в потоке разряженного газа для одномерной нелинейной нестационарной двенадцатимоментной системы уравнений Больцмана // ЖВМ и МФ. 2019. Т. 59, № 10.

ВЛИЯНИЕ КОНВЕКЦИИ НА МОРФОЛОГИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Александров Д. В.^а, Маковеева Е. В., Титова Е. А.,
Иванов А. А.

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
^а dmitri.alexandrov@urfu.ru

Конвекция оказывает сильное влияние на процессы кристаллизации и в некоторых случаях изменяет микроструктуру затвердевших материалов (например, выравнивает температуру расплава и перемешивает растворенные примеси) [1]. Из-за сильной нелинейности задачи роль конвективных потоков на морфологическую устойчивость плоского фронта кристаллизации исследована лишь частично с использованием ряда конкретных гипотез [2–4].

В данном исследовании проведен линейный анализ морфологической устойчивости плоской границы раздела фаз твердое тело-жидкость, описывающий процессы затвердевания бинарного расплава с конвекцией. Разработанная теория включает кондуктивные и конвективные механизмы тепло- и массопереноса вблизи границы раздела фаз и обобщает ранее известные теории морфологической устойчивости. Получены зависимости частоты возмущений от длины волны и кривой нейтральной устойчивости, разделяющей параметрические области устойчивой и неустойчивой кристаллизации. Найден критерий концентрационного переохлаждения в установившихся условиях затвердевания с конвекцией. Полученные дисперсионное соотношение и кривая нейтральной устойчивости определяют различные сценарии кристаллизации: (i) – морфологическая неустойчивость и концентрационное переохлаждение, приводящие к образованию двухфазной области с дендритоподобными структурами; (ii) – морфологическая устойчивость и концентрационное переохлаждение, приводящие к образованию двухфазной области с кристаллами; (iii) – морфологическая устойчивость без концентрационного переохлаждения при стабильном плоском фронте кристаллизации и (iv) – морфологическая неустойчивость без концентрационного переохлаждения с образованием мезоскопически грубой границы раздела фаз.

Математическая модель процесса кристаллизации состоит из конвективных уравнений теплопроводности и диффузии примеси в жидкой ($z > Z'$) и твердой ($z < Z'$) фазах (диффузией примеси в твердом веществе пренебрегается)

$$\frac{\partial T_l}{\partial \tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_l = D_l \nabla^2 T_l + V \frac{\partial T_l}{\partial z}, \quad z > Z',$$

$$\frac{\partial C_l}{\partial \tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla C_l = D_C \nabla^2 C_l + V \frac{\partial C_l}{\partial z}, \quad z > Z', \quad \frac{\partial T_s}{\partial \tau} = D_s \nabla^2 T_s + V \frac{\partial T_s}{\partial z}, \quad z < Z'.$$

Здесь T_l и T_s – температуры в жидкой и твердой фазах, соответственно, D_l и D_s – коэффициенты температуропроводности в этих фазах, C_l

и D_C – концентрация примеси и коэффициент диффузии примеси в расплаве, τ – время, z – пространственная координата, направленная вдоль процесса кристаллизации, \mathbf{u} – вектор скорости жидкости, V – постоянная скорость процесса кристаллизации, индексы l и s соответствуют жидкой и твердой фазам, Z' обозначает морфологически возмущенную координату фронта кристаллизации (для плоского фронта $Z' = 0$).

Первые два граничных условия определяют равенство температуры на межфазной границе $T_l = T_s$ температуре фазового перехода, зависящей от кривизны границы и концентрации примеси, т.е.

$$T_l = T_s = T_* + \Gamma H + f(C_l), \quad \Gamma = T_* \gamma / L_V,$$

где T_* – температура фазового перехода чистого расплава, Γ – коэффициент Гиббса, H – кривизна межфазной границы, $f(C_l)$ – функция, зависящая от концентрации примеси, γ – поверхностная энергия, а L_V – скрытая теплота кристаллизации. Отметим, что $H = 0$ в случае плоской межфазной границы, $H \approx \nabla^2 Z'$ при рассмотрении линейной теории морфологической устойчивости, $f(C_l) = m_e C_l$ при линейном уравнении ликвидуса (m_e – коэффициент наклона линии ликвидуса).

Граничные условия, отражающие тепловой и массовый балансы на межфазной границе, имеют следующий вид в случае конвективного тепло-массопереноса в жидкости

$$L_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (k_s \nabla T_s - \mathbf{j}_T) \cdot \mathbf{n}, \quad (1 - k_e) C_l \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{j}_C \cdot \mathbf{n},$$

$$\mathbf{j}_T \cdot \mathbf{n} = k_l \mathbf{n} \cdot \nabla T_l + \alpha_h \rho_l c_l u_* (T_\infty - T_l), \quad \mathbf{j}_C \cdot \mathbf{n} = D_C \mathbf{n} \cdot \nabla C_l + \alpha_m u_* (C_\infty - C_l).$$

Здесь α_h и α_m – коэффициенты конвективного переноса тепла и массы соответственно; ρ_l и c_l – плотность и теплоемкость жидкой фазы; u_* – скорость трения; T_∞ и C_∞ – температура и концентрация примеси вдали от межфазной границы (k_e – равновесный коэффициент распределения примеси).

Данное исследование получило финансовую поддержку Российского научного фонда (проект № 23-19-00337).

Литература

1. Voller V. R., Prakash C. A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems // Int. J. Heat Mass Trans. 1987. Vol. 30, no. 8. Pp. 1709–1719.
2. Forth S. A., Wheeler A. A. Coupled convective and morphological instability in a simple-model of the solidification of a binary alloy // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 236. Pp. 61–94.
3. Chen Y. J., Davis S. H. Directional solidification of a binary alloy into a cellular convective flow: localized morphologies // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 395. Pp. 253–270.
4. Alexandrov D. V., Malygin A. P. Flow-induced morphological instability and solidification with the slurry and mushy layers in the presence of convection // Int. J. Heat Mass Trans. 2012. Vol. 55, no. 11–12. Pp. 3196–3204.

О ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРИДИНАМИКИ

Алимов Ш. А., Шералиев Ш. Н.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
филиал в г. Ташкенте

Основное уравнение перидинамики, предложенное в работе [1], в линейризованном варианте имеет следующий вид:

$$u_{tt} - Au(x, t) = f(x, t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

где сингулярный интегральный оператор A определяется равенством

$$Au(x) = \int_D K(x, y)[u(y) - u(x)] dy.$$

В этом уравнении D – ограниченная n -мерная ($n \geq 3$) область с кусочно-гладкой границей, $u: D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – неизвестная функция, $n \times n$ -матрица-функция K , определенная в $D \times D$, является заданным ядром интегрального оператора, функция $f: D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ представляет собой внешнюю силу.

На диагонали ядро $K(x, y)$, описывающее распределенное взаимодействие между частицами твердого тела D , может иметь неинтегрируемую особенность, компенсируемую разностью $u(y) - u(x)$.

В настоящем сообщении мы рассматриваем интегральный оператор A в виде свертки в пространстве периодических функций, а именно:

$$Au(x) = \int_{\mathbb{T}^n} K(x - y)[u(y) - u(x)] dy, \quad x \in \mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n. \quad (1)$$

Сингулярное ядро имеет вид

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{T}^n.$$

Мы предполагаем, что матрица-функция $\Omega(x)$ является гладкой в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и для любого $\lambda > 0$ удовлетворяет условию

$$\Omega(\lambda x) = \Omega(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор

$$Sf(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x - y) dy. \quad (2)$$

Определим матрицу Ω^* , представляющую собой среднее значение ядра Ω по единичной сфере:

$$\Omega^* = \frac{1}{\omega_n} \int_{\theta} \Omega(\theta) d\theta. \quad (3)$$

В случае, когда $\Omega^* = 0$, т. е. все элементы Ω_{ij}^* ($i, j = 1, 2, \dots, n$) этой матрицы равны нулю, интегральный оператор (2) является оператором типа Кальдерона–Зигмунда (см. [2]). Известно, что в этом случае оператор (2) естественным образом определяется в классе гладких функций и продолжается до оператора, непрерывного из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_p(\mathbb{T}^n)$. Отметим, что условие $\Omega^* = 0$ является необходимым для справедливости данного утверждения.

В случае $\Omega^* \neq 0$ оператор (2) становится гиперсингулярным, в связи с чем необходимо откорректировать его определение. Такую корректировку можно произвести, опираясь на основное уравнение перидинамики (1).

Фиксируем ρ из интервала $0 < \rho < \pi$ и введем функцию $\chi(r) \in C^\infty(\mathbb{R})$, равную 1 при $r \leq \rho/2$ и нулю при $r \geq \rho$. Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \chi(|y|)[f(x-y) - f(x)] dy. \quad (4)$$

Ясно, что в случае $\Omega^* = 0$ оператор (4) совпадает с сингулярным оператором типа Кальдерона–Зигмунда.

Введем в рассмотрение самосопряженный оператор $\Lambda = \sqrt{1 - \Delta}$, где Δ – самосопряженное расширение в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператора Лапласа, отвечающее периодическим граничным условиям.

Для любого $s \geq 0$ рассмотрим положительный самосопряженный в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператор $\log^s(1 + \Lambda)$. Область определения этого оператора обозначим символом $H_{\log}^s(\mathbb{T}^n) = D(\log^s(1 + \Lambda))$.

Каждое пространство H_{\log}^s является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(f, g)_s = (\log^s(1 + \Lambda)f, \log^s(1 + \Lambda)g)_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ и соответствующей нормой $\|f\|_s$.

Символом $\|\Omega^*\|$ обозначим норму матрицы Ω^* .

Теорема 1. *Для любого $s \geq 1$ оператор A действует из $H_{\log}^s(\mathbb{T}^n)$ в $H_{\log}^{s-1}(\mathbb{T}^n)$ и удовлетворяет оценке*

$$\|Af\|_{s-1} \leq C\|\Omega^*\| \cdot \|f\|_s + C\|f\|_{s-1}. \quad (5)$$

Доказательство теоремы проводится методом, примененным в работе [3].

Особую роль в перидинамике играет оператор A_p со специальным сингулярным ядром

$$\Omega_p(x) = \frac{x \otimes x}{(x, x)}$$

(см. [1], формула (61)). В этом случае $\Omega_p^* \neq 0$, т. е. оператор A_p является гиперсингулярным.

Для оператора A_p нами доказана справедливость противоположной оценки (см. [4]) и, тем самым, показана точность оценки (5). Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого натурального s и любой функции $f \in H_{\log}^s(\mathbb{T}^n)$ выполняется оценка

$$\|f\|_s \leq C\|Af\|_{s-1} + C\|f\|_{s-1}.$$

Замечание. Пример функции $f(x) \equiv 1$ показывает, что второе слагаемое в правой части данной оценки не может быть исключено.

Литература

1. *Silling S. A.* Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // *J. Mech. Phys. Solids.* 2000. Vol. 48, no. 1. Pp. 175–209.
2. *Calderon A. P., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals // *Acta Math.* 1952. **88**. Pp. 85–139.
3. *Alimov Sh., Sheraliev Sh.* On the solvability of the singular equation of peridynamics // *Complex Variables and Elliptic Equations.* 2019. Vol. 64, no. 5. Pp. 873–887.
4. *Алимов Ш. А., Шералиев Ш. Н.* О гиперсингулярных операторах, связанных с перидинамикой // *Дифференц. уравнения.* 2023. Т. 59, № 7. С. 914–918.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОЖДЕВОГО СТОКА НА ГОРНЫХ ВОДОСБОРАХ

Анахаев К. Н.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; anaha13@mail.ru*

Для горных районов Центрального Кавказа значения максимальных дождевых расходов $Q_{1\%}$ ($\text{м}^3/\text{с}$) для водосборов $F \leq 200 \text{ км}^2$ определяются по формуле (тип III) [1, п. 7.44; 2, п. 4.18]

$$Q_{1\%} = q'_{1\%} \varphi H_{1\%} F, \quad (1)$$

где $q'_{1\%}$ – максимальный модуль стока (в долях от $\varphi H_{1\%}$) [2, прил. 21, 22], зависящий от гидрогеоморфологической характеристики русла Φ_p и времени добега $\tau_{\text{ск}} = 10$ мин [2, п. 4.20]; φ – коэффициент стока, равный для горных районов Кавказа $\varphi \approx 0,2 - 0,6$ [2, прил. 27]; $H_{1\%} = 120$ (мм) – максимальное значение суточного слоя осадков 1% обеспеченности.

Гидрогеоморфологическая характеристика Φ_p находится по формуле (2) в виде [1, 2]:

$$\Phi_p = \frac{1000L}{m_p J_u^m \sqrt{F} \varphi H_{1\%}}, \quad J_u = \frac{\nabla_m - \nabla_k}{0.5L - l_k} 1000, \quad (2)$$

где L (км) – длина водотока; J_u (в промилях) – уклон низовой части русла водотока; ∇_m, ∇_k (м) – отметки средней части реки и вершины

конуса выноса; l_k (км) – длина конуса выноса; m_p , m – гидравлические параметры состояния и шероховатости русла, принимаемые при $J_u \geq 35$ соответственно, $m_p = 10$ м/мин, $m = 1/7 = 0,143$ [1, табл. Б8; 2, прил. 18, с. 23].

Значение модуля $q'_{1\%}$ для Центрального Кавказа (с высотами более 1500 м) определяется либо по таблице [2, прил. 21, с. 26], либо по предлагаемой аппроксимирующей зависимости

$$q'_{1\%} = (0,5\gamma^3 - 3,7\gamma^2 - 1,43\gamma + 38,4) \cdot 10^{-2},$$

где $\gamma = \ln |\Phi_p|$, где $|\Phi_p|$ – модульное значение (без размерности) формулы (2).

Коэффициент стока φ в (1) может быть определен также по упрощенной формуле

$$\varphi = 0,15 (1 + 0,5L^2/F).$$

Ливневые расходы другой ($p\%$) обеспеченности $Q_{p\%}$ определяются $Q_{p\%} = Q_{1\%} \cdot \lambda_{p\%}$, где значение переходного коэффициента

$$\lambda_{p\%} = 1 - 0,173 \cdot \ln(p\%).$$

Значения дождевых расходов по предлагаемым зависимостям для 16 водотоков Центрального Кавказа дают достаточно близкое соответствие (со средней погрешностью + 4,6 %) с базовыми значениями [3, 4], а также впервые просчитаны дождевые расходы еще для 16 водотоков.

Литература

1. *СП 33-101-2003* Определение основных расчетных гидрологических характеристик. Госстрой России. М., 2004.
2. *СНиП 2.01.14-83* Определение расчетных гидрологических характеристик. М., 1985. 36 с.
3. Схема инженерной защиты городов и населенных пунктов КБАССР от опасных геологических процессов. Ч. III. СКГВХ. Пятигорск, 1987. 86 с.
4. Методические рекомендации по обеспечению противоселевой безопасности объектов экономики. Под ред. Анахаева К. Н. Нальчик, 2016. 60 с.

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ДАТАСЕТОВ ДЛЯ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ, СПОСОБНОЙ РАСПОЗНАВАТЬ ОБЪЕКТЫ ПО ФОТОГРАФИЯМ

Андрющенко А. В.^{1,a}, Гура Д. А.^{1,2,b}, Дьяченко Р. А.^{1,c}

¹ Кубанский государственный технологический университет

² Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия

^a antonandr72@gmail.com, ^b gda-kuban@mail.ru, ^c emessage@rambler.ru

Для обучения искусственной нейронной сети, способной распознавать объекты по фотографиям, ключевую роль играет правильное формирование датасетов. В качестве основных аспектов для формирования

датасетов можно выделить: разнообразие, качество изображений, метки и аннотации, баланс классов, размер датасета.

Разнообразие. Благодаря датасетам модель искусственной нейронной сети имеет доступ к большому объему данных для обучения. Для обучения нейронной сети важно, чтобы информация была разнообразной. Таким образом, датасет должен включать в себя фотографии объектов в разных условиях. Объекты должны отличаться по форме, размеру, цвету, а также на фотографиях должен отличаться фон. Это поможет нейронной сети обобщать полученную информацию и распознать объекты в разных контекстах [1].

Качество изображений. Немаловажным аспектом является качество изображений, по которым обучается нейросеть. Чем выше разрешение и четкость изображения, тем легче нейросети идентифицировать на них объекты. Плохое разрешение, размытие, зашумление могут значительно замедлить обучение.

Метки и аннотации. Изображения необходимо снабдить метками или аннотациями, а именно, если на фотографии изображены твердые бытовые отходы, то метка должна содержать информацию о том, что это твердые бытовые отходы. Метки и аннотации позволяют нейронной сети понимать какие именно объекты находятся на изображении, а также как их классифицировать [2].

Баланс классов. Важным аспектом при формировании датасета является его классификация. При этом каждый класс должен быть правильно сбалансирован. Если нейронная сеть должна распознавать и классифицировать твердые бытовые отходы, то каждый вид отходов (стекло, бумага и картон, пластик и металл и т.д.) должен быть представлен в датасете в равных пропорциях. Это необходимо для того, чтобы нейронная сеть не предпочитала один класс другому [3].

Размер датасета. Большую роль при формировании датасета играет его размер. Чем больше данных будет иметь нейросеть для обучения, тем выше будет ее эффективность. Стоит отметить, что размер датасета зависит от конкретной задачи, решаемой искусственной нейронной сетью, и для каждого отдельного случая размер датасета необходимо подбирать индивидуально. Также правильно подобранный размер датасета значительно снизит риски возможного переобучения нейронной сети [4, 5].

Таким образом, разнообразие, качество изображений, метки и аннотации, баланс классов и размер датасета играют важную роль при обучении искусственной нейронной сети, так как благодаря ним определяется насколько хорошо модель способна обучиться и проявить себя в реальных сценариях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Кубанского научного фонда в рамках научно-инновационного проекта № НИП-20.1/22.16.

Литература

1. *Гараев Н. Р.* Обзор методов расширения наборов данных для задач классификации // Альманах научных работ молодых ученых Университета ИТМО. Материалы XLIX научной и учебно-методической конференции. 2020. С. 69–74.
2. *Сенин С. С., Яковлев Д. С.* Сравнение нескольких моделей методов машинного обучения // StudNet. 2021. С. 65.
3. *Чернышов Б. С., Фоминых И. Д., Рудак Л. В., Федяев О. И.* Современное решение проблемы распознавания лиц на основе нейронных сетей // Программная инженерия: методы и технологии разработки информационно-вычислительных систем (ПИИВС-2018). Сборник научных трудов II Международной научно-практической конференции. 2018. С. 180–184.
4. *Дьяченко Р. А., Гура Д. А., Беспяточук Д. А. и др.* К вопросу о применении нейросетевого алгоритма для мониторинга состояния городской среды // Экологические системы и приборы. 2023. № 8. С. 42–50.
5. *Дьяченко Р. А., Шароватов А. С., Зима А. М. и др.* Разработка информационной системы адаптивного нейросетевого прогнозирования параметров объектов электроэнергетики // Научные чтения имени профессора Н. Е. Жуковского. Сборник научных статей IV Международной научно-практической конференции, 2014. С. 111–113.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Апаков Ю. П.^{1,2, а}, Мамажонов С. М.^{1, б}

¹Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент

²Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан; ^аyusurjonapakov@gmail.com, ^бsanjarbekmatajonov@gmail.com

Для уравнения

$$u_{xxxx}(x, y) + a_1 u_{xx}(x, y) + a_2 u_x(x, y) + a_3 u(x, y) - u_{yy}(x, y) = f(u(x, y)) \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ изучим следующую задачу.

Задача А. Найдти функцию $u(x, y)$ из класса $C_{x,y}^{4,2}(\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = \varphi_1(u_y(x, 0)), \quad u(x, q) = \varphi_2(u_y(x, q)), \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2)$$

$$u(0, y) = u(p, y) = u_{xx}(0, y) = u_{xx}(p, y) = 0, \quad (3)$$

где $p, q, a_i \in R, i = \overline{1, 3}, \varphi_1(u_y(x, 0)), \varphi_2(u_y(x, q)), u f(u(x, y))$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работах [1–3], исследованы краевые задачи для уравнения (1) когда правая часть линейная. В работах [4–6] исследованы краевые задачи для уравнения (1) с переменными коэффициентами, когда правая часть линейная.

Теорема. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1 \leq 0$, $a_3 \geq 0$, $f'(\tilde{u}(x, y)) \leq 0$, $\varphi'_1(\tilde{u}(x, 0)) \geq 0$, $\varphi'_2(\tilde{u}(x, q)) \leq 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное пусть задача A имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет задаче A . Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

В области Ω справедливо тождество

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(uu_{xxx} - u_x u_{xx} + a_1 uu_x + \frac{1}{2} a_2 u^2 \right) + u_{xx}^2 - a_1 u_x^2 + a_3 u^2 - \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) + u_y^2 = u(f(u_1) - f(u_2)), \quad (4)$$

Интегрируя тождество (4) по области Ω и учитывая краевые условия (2), (3) и имея $u = u_1 - u_2$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^p (u_{1y}(x, 0) - u_{2y}(x, 0))(\varphi_1(u_{1y}(x, 0)) - \varphi_1(u_{2y}(x, 0)))dx + \\ & + \int_0^p \int_0^q u_{xx}^2(x, y)dxdy + a_3 \int_0^p \int_0^q u^2 dxdy - \\ & - \int_0^p (u_{1y}(x, q) - u_{2y}(x, q))(\varphi_2(u_{1y}(x, q)) - \varphi_2(u_{2y}(x, q)))dx - \\ & - a_1 \int_0^p \int_0^q u_x^2 dxdy + \int_0^p \int_0^q u_y^2 dxdy = \int_0^p \int_0^q (u_1 - u_2)(f(u_1) - f(u_2))dxdy. \end{aligned}$$

По формуле Лагранжа

$$\begin{aligned} \varphi(u_1) - \varphi(u_2) &= \frac{d}{du} \varphi(u) \Big|_{u=\tilde{u}} (u_1 - u_2) = \varphi'(\tilde{u})(u_1 - u_2), \\ \tilde{u}(x, y) &\in (u_1(x, y), u_2(x, y)), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} & \int_0^p \int_0^q u_{xx}^2 dxdy + \int_0^p \int_0^q u_y^2 dxdy - a_1 \int_0^p \int_0^q u_x^2 dxdy + a_3 \int_0^p \int_0^q u^2 dxdy + \\ & + \int_0^p u_y^2(x, 0)\varphi'_1(\tilde{u}(x, 0))dx - \int_0^p u_y^2(x, q)\varphi'_2(\tilde{u}(x, q))dx - \int_0^p \int_0^q u^2 f'(\tilde{u})dxdy = 0. \end{aligned}$$

Из первого и второго интеграла получим

$$u(x, y) = xb_1 + b_2, \quad b_1, b_2 = \text{const.}$$

Учитывая условие (3) получим $u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \bar{\Omega}$. Теорема доказана.

Литература

1. *Apaikov Y. P., Matajonov S. M.* Boundary-value problem for the fourth-order equation with multiple characteristics in a rectangular domain // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 272, no. 2. Pp. 185–201.
2. *Matajonov S. M.* The third boundary problem for a fourth-order non-homogeneous equation with constant coefficients // Bull. Inst. Math. 2022. Vol. 5, no. 6. Pp. 100–109.
3. *Апаков Ю. П., Мамажонов С. М.* Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами // Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 2. С. 157–172.
4. *Апаков Ю. П., Мамажонов С. М.* Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2022. № 4. С. 7–13.
5. *Апаков Ю. П., Мамажонов С. М.* Краевая задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с младшими членами // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 2. С. 183–192.
6. *Апаков Ю. П., Мамажонов С. М.* Решение второй краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // Научный вестник НамГУ. 2023. № 7. С. 70–80.

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Апаков Ю. П.^{1, 2, a}, Хамитов А. А.^{2, b}

¹Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент

²Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан; ^a*yusupjonapaikov@gmail.com*, ^b*azizbek.khamitov.93@mail.ru*

В области $D^+ = \{(x, y, z) : 0 < x < +\infty, 0 < y < q, 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

где $q > 0, r > 0$ – постоянные вещественные числа, и для него исследуем следующую задачу.

Задача Е. Найти решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C_{x,y,z}^{3,2,2}(D^+) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(D^+ \cup \Gamma)$, имеющее ограниченные первые производные

по y , по z и вторую производную по x при $x \rightarrow +\infty$, и $u_y, u_z \in L_2(D^+)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha u(x, y, 0) + \beta u_z(x, y, 0) = 0, \\ \gamma u(x, y, r) + \delta u_z(x, y, r) = 0, \\ u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y, z) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y, z) = 0, 0 \leq y \leq q, 0 \leq z \leq r,$$

где $\Gamma = \partial D^+$ – граница области D^+ , $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – заданные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, а $\psi_1(y, z)$ – заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^i \psi_1(y, 0)}{\partial z^i} + \beta \frac{\partial^{i+1} \psi_1(y, 0)}{\partial z^{i+1}} = 0, \\ \gamma \frac{\partial^i \psi_1(y, r)}{\partial z^i} + \delta \frac{\partial^{i+1} \psi_1(y, r)}{\partial z^{i+1}} = 0, \quad i = 0, 2, \\ \frac{\partial^4 \psi_1(0, z)}{\partial z^4} = \frac{\partial^4 \psi_1(q, z)}{\partial z^4} = 0, \\ \frac{\partial^6 \psi_1(0, z)}{\partial z^4 \partial y^2} = \frac{\partial^6 \psi_1(q, z)}{\partial z^4 \partial y^2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что в полуограниченных областях в работах [1–3] исследованы некоторые корректные краевые задачи, а также в работах [4–6] в конечных областях трехмерного пространства изучены краевые задачи.

Теорема 1. Если задача E имеет решение, то при выполнении условий $\alpha\beta \leq 0, \gamma\delta \geq 0$, оно единственно.

Теорема 1 о единственности решения доказана методом интегралов энергии.

Теорема 2. Если функция $\frac{\partial^7 \psi_1(y, z)}{\partial z^4 \partial y^3} \in L_2[0 < y < q, 0 < z < r]$ и выполняются условия согласования (2), то решение задачи E существует и представляется в виде

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\|V_{n,m}\|^2} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \psi_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} Z_m(z) \sin \frac{n\pi y}{q}, \quad (3)$$

где

$$Z_m(z) = (\alpha \sin \sqrt{\mu_m} z - \beta \sqrt{\mu_m} \cos \sqrt{\mu_m} z) A_m,$$

$$\|V_{n,m}\|^2 = A_{n,m}^2 \left[\frac{1}{2} (\alpha^2 r + \beta^2 r \mu_n - \alpha\beta) + \left(\frac{\beta^2 \sqrt{\mu_m}}{4} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{\mu_m}} \right) \sin 2\sqrt{\mu_m} r + \frac{\alpha\beta}{2} \cos 2\sqrt{\mu_m} r \right] \frac{q}{2},$$

а $\psi_{1n,m}$ – коэффициент Фурье функции $\psi_1(y, z)$, т. е.

$$\psi_{1n,m} = \frac{1}{\|V_{n,m}\|^2} \int_0^q \int_0^r \psi_1(y, z) Z_m(z) \sin \frac{n\pi y}{q} dy dz.$$

Доказано, что ряд (3) и его производные входящие в уравнение (1), сходятся абсолютно и равномерно в области $D^+ \cup \Gamma$.

Литература

1. Апаков Ю. П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях // Известия КБНЦ РАН. 2008. № 2(22). С. 147–151.
2. Апаков Ю. П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. Ташкент: Fan va texnologiya, 2019. 156 с.
3. Апаков Ю. П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье в областях с некомпактными границами // Узбекский математический журнал. 2008. № 1. С. 14–22.
4. Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // Известия вузов. Математика. 2021. № 10. С. 60–70.
5. Апаков Ю. П., Хамитов А. А. О решения одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве // Научный вестник Наманганского государственного университета. 2020. № 4. С. 21–31.
6. Apakov Yu. P., Hamitov A. A. Third boundary value problem for an equation with the third order multiple characteristics in three dimensional space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 2. Pp. 523–532.

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВА С НЕКОЭРЦИТИВНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Артемяева М. В.^а, Корпусов М. О.^б

Московский государственный университет, Москва, Россия

^аartemeva.mv14@physics.msu.ru, ^бkorpusov@gmail.com

Поведение зарядов во внешнем поле полупроводниковой плазмы описывается нелинейным уравнением соболевского типа

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta u - 4\pi\rho(u)) = 4\pi e^2 E_0 \frac{\partial^2 n_0(u)}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial Q_1(u)}{\partial t} + Q_2(u), \quad (1)$$

где $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_1$ – внешнее электрическое поле, $n_0(u) = N_0 u^2$ – квазистационарная плотность свободных зарядов, зависящая от электрического потенциала u , $Q_1(u) = q_1 u^3$ – источник свободных зарядов, зависящий от потенциала электрического поля u , $\rho(u) = \rho_0 + \rho_1 u + \rho_2 |u|^{p-2} u$ – это

плотность связанных зарядов, зависящая от потенциала электрического поля u . Кроме того, учитывается временная дисперсия, описываемая слагаемым

$$\int_0^t Q_2(u)(\tau) d\tau,$$

где $Q_2(u) = q_2 u$. Электрический пробой в электромагнитной среде с математической точки зрения представляет собой эффект разрушения решения этой начально-краевой задачи за конечное время.

В настоящей работе представлены исследования, изложенные в работе [1]. Доказано существование непродолжаемого во времени классического решения задачи (1). При помощи модифицированного энергетического метода Х. А. Левина, изложенного в работе [2], доказано разрушение решения задачи, а также получена оценка сверху на время разрушения.

Литература

1. *Артемяева М. В., Корпусов М. О.* О разрушении решения одной задачи для соболевского уравнения с некоэрцитивным источником // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 7. С. 893–903.
2. *Al'shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations // De Gruyter Series in Nonlinear Anal. Appl. 2011. Vol. 15. P. 648.

К ВОПРОСУ О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Артюшин А. Н.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
alexsp3@yandex.ru*

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с гладкой границей $Q = (0, T) \times \Omega$, $S = (0, T) \times \partial\Omega$. В цилиндре Q рассматривается смешанная задача для модельного уравнения

$$\partial^{\nu(x)} u(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

$$u(t, x)|_S = 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = 0. \quad (3)$$

Здесь $0 < \nu(x) < 1$ и $\partial^{\nu(x)}$ – производная Герасимова–Капуто по переменной t . Рассматриваются некоторые подходы к доказательству существования регулярных решений задачи (1)–(3) в пространстве $L_p(Q)$, $1 < p < \infty$.

О ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РЕЖИМОМ В ПРОМЫШЛЕННОЙ ТЕПЛИЦЕ

Астахова И. В.^{1,3,a}, Филиновский А. В.^{1,2,b}

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

²Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

³Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва,

Россия; ^a *ast.diffiety@gmail.com*, ^b *fnv@yandex.ru*

Будем рассматривать смешанную задачу для уравнения с конвективным слагаемым и обедняющим потенциалом:

$$u_t = (a(x, t)u_x)_x + b(x, t)u_x + h(x, t)u, \quad (1)$$

$$(x, t) \in Q_T = (0, 1) \times (0, T), \quad T > 0,$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

с гладкими в \overline{Q}_T коэффициентами a , b и h , граничными и начальной функциями $\varphi, \psi \in W_2^1(0, T)$, $\xi \in L_2(0, 1)$. Будем считать, что $0 < a_1 \leq a(x, t) \leq a_2 < \infty$. Изучается задача управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ на левом конце отрезка (функции ψ и ξ считаем фиксированными), стараемся сделать температуру $u(x_0, t)$ в некоторой точке $x_0 \in (0, 1)$ близкой к заданной функции $z(t)$ на всем интервале времени $(0, T)$. Эта задача возникает в модели управления климатом в промышленных теплицах (см. [1]). Будем рассматривать слабое решение задачи (1)–(3) из пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$ (см. [2–5]). Качество управления оцениваем функционалом

$$J[z, \rho, \varphi] = \int_0^T (u_\varphi(x_0, t) - z(t))^2 \rho(t) dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

где u_φ – решение задачи (1)–(3) с заданной управляющей функцией φ . Весовая функция $\rho \in L_\infty(0, T)$, $\text{ess inf}_{t \in (0, T)} \rho(t) = \rho_1 > 0$. Определим норму функций из

$$L_2(0, T) : \|\varphi\|_{L_{2,\rho}(0,T)} = \left(\int_0^T \varphi^2(t) \rho(t) dt \right)^{1/2}.$$

Обозначим через $\Phi \subset W_2^1(0, T)$ множество управляющих функций φ , а через $Z \subset L_2(0, T)$ – множество целевых функций z . Будем далее считать множество Φ непустым, замкнутым и выпуклым. Считая функции $z \in Z$ и ρ фиксированными, рассмотрим задачу минимизации

$$m[z, \rho, \Phi] = \inf_{\varphi \in \Phi} J[z, \rho, \varphi]. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть $a_t \geq 0$, $b_x - h \geq 0$, $(x, t) \in Q_T$; $b \geq 0$, $(x, t) \in [0, x_0] \times [0, T]$, $x_0 \in (0, 1]$; $b(1, t) \leq 0$, $t \in [0, T]$. Тогда имеет место неравенство

$$\|\varphi\|_{L_1(0, T)} \geq \|z\|_{L_1(0, T)} - \left(\frac{TJ[z, \rho, \varphi]}{\rho_1} \right)^{1/2} - \frac{x_0}{a_1} (a_2 \|\psi\|_{L_1(0, T)} + \|\xi\|_{L_1(0, 1)}).$$

Теорема 2. Пусть $\psi = 0$, $\xi = 0$, $\varphi = \gamma\varphi_1 + \varphi_2$, где $\|\varphi_1\|_{W_2^1(0, T)} = 1$, $\gamma \in R$. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_2^1(0, T)} \leq \frac{1}{\|u_{\varphi_1}(x_0, t)\|_{L_{2, \rho}(0, T)}} & \left((J[z, \rho, \varphi])^{1/2} + \|u_{\varphi_2}(x_0, t)\|_{L_{2, \rho}(0, T)} + \right. \\ & \left. + \|z\|_{L_{2, \rho}(0, T)} + \|\varphi_2\|_{W_2^1(0, T)} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Если множество Φ ограничено, то доказано (в случае $h = 0$ см. [4]), что для любого $z \in L_2(0, T)$ существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой $m[z, \rho, \Phi] = J[z, \rho, \varphi_0]$. В случае ограниченного множества $\Phi \subset W_2^1(0, T)$, не зависящих от t коэффициентов a , b и h в уравнении (1) и $m[z, \rho, \Phi] > 0$ доказано [3], что $\varphi_0 \in \partial\Phi$. Установлено также, что для любого Φ_1 , такого, что $\Phi_1 \subset \text{Int}\Phi$, справедливо неравенство $m[z, \rho, \Phi_1] > m[z, \rho, \Phi]$.

Следующее определение используется для того, чтобы, применяя оценку (5), при доказательстве существования минимизирующей функции φ_0 в задаче (4), отказаться от условия ограниченности множества управляющих функций Φ .

Определение 1. Множество $\Phi \subset W_2^1(0, T)$ будем называть *конечномерно аппроксимируемым*, если существуют конечная система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in \Phi$ и постоянная M , такие что для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо неравенство $\|\varphi - \sum_{j=1}^N \gamma_j \varphi_j\|_{W_2^1(0, T)} < M$, для некоторых действительных $\gamma_1, \dots, \gamma_N$.

Теорема 3. Если множество Φ непусто, замкнуто, выпукло и конечномерно аппроксимируемо, то для любой $z \in L_2(0, T)$ существует единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, для которой

$$m[z, \rho, \Phi] = J[z, \rho, \varphi_0].$$

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта 20-11-20272.

Литература

1. Astashova I. V., Filinovskiy A. V., Lashin D. A. On maintaining optimal temperatures in greenhouses // WSEAS Trans. on Circuits and Systems. 2016. Vol. 15, no. 23. Pp. 198–204.
2. Astashova I. V., Filinovskiy A. V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. Vol. 71. Pp. 9–25.

3. *Astashova I. V., Filinovskiy A. V.* On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // *Opuscula Math.* 2019. Vol. 39, no. 5. Pp. 595–609.
4. *Асташова И. В., Лашин Д. А., Филиновский А. В.* Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // *Труды Моск. матем. общ-ва.* 2019. Т. 80, № 2. С. 258–274.
5. *Асташова И. В., Лашин Д. А., Филиновский А. В.* Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления.* 2022. Т. 504. С. 28–31.

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ С ОБОБЩЕННЫМ ЯДРОМ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

Асхабов С. Н.

*Чеченский государственный педагогический университет
Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, Грозный,
Россия; askhabov@yandex.ru*

Известно, что понятие положительного оператора тесно связано с понятием положительно-определенной (по Бохнеру) функции, играющее основополагающую роль в гармоническом анализе и других разделах современной математики. Свойство положительности дискретных, интегральных и интегро-дифференциальных операторов нашло широкое применение при исследовании соответствующих как линейных, так и нелинейных уравнений в различных банаховых пространствах (см, например, [1–5]). Напомним некоторые определения и обозначения. Пусть X есть вещественное банахово пространство, а X^* – сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. Если X гильбертово пространство, то $\langle y, x \rangle$ совпадает со скалярным произведением (y, x) . Линейный оператор A , действующий из X в X^* , называется положительным в X , если $\forall x \in X$ выполняется неравенство $\langle Ax, x \rangle \geq 0$.

В работе А. М. Нахушева [2] был изучен оператор

$$(P_{01}^\varphi u)(x) = \int_0^1 \varphi(|x-y|)u(y) dy$$

в предположении, что ядро φ удовлетворяет *условию монотонности* M , то есть функция $\varphi(x)$ определена в интервале $(0, 1)$ и такова, что

$$\varphi \in C^1(0, 1], \varphi(x) \geq 0, \int_0^1 \varphi(x) dx < \infty, \varphi(x) \geq \varphi(y), \varphi'(x) < \varphi'(y) \quad \forall x < y.$$

Им было доказано, что $(P_{01}^\varphi u, u) \geq 0 \quad \forall u \in L_2(0, 1)$ и $(P_{01}^\varphi u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u(x) = 0$, то есть оператор P_{01}^φ является строго положительным в пространстве $L_2(0, 1)$, что равносильно положительности всех его собственных значений

Так как функции $\varphi(x) = x^{-\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$ и $\varphi(x) = -\ln x$ удовлетворяют условию монотонности M , то этот результат А. М. Нахушева охватывает как риссов, так и логарифмический потенциалы и тем самым обобщает соответствующие результаты Ф. Трикоми и С. Геллерстедта (подробнее о риссовых и логарифмических потенциалах см. [2], а также [1]). Поэтому P_{01}^φ естественно назвать оператором с обобщенным ядром типа потенциала.

Условию M удовлетворяют также модифицированная функция Бесселя, функция $\varphi(x) = e^{-\alpha x}$ при любом $\alpha > 1$ и многие другие, приведенные в монографии [1].

Заметим, что условие невозрастания функции $\varphi(x)$ в условии M существенно для положительности оператора P_{01}^φ так как, например, в случае возрастающей функции $\varphi(x) = x$ этот оператор не является ни положительным, ни отрицательным и, кроме того, имеет как положительные, так и отрицательные собственные значения [1].

Примеры функций $\varphi_1(x) = \frac{1}{2} - x$ (не является неотрицательной на $(0, 1)$) [1] и $\varphi_2(x) = 1 - 2x$ при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $\varphi_2(x) = \frac{1}{2} - x$ при $\frac{1}{2} < x \leq 1$ (не является неотрицательной и дифференцируемой в точке $x = \frac{1}{2}$) [3], при которых оператор P_{01}^φ является положительным, показывают, что другие требования в условии M можно ослабить. В этой связи введем следующий класс.

Определение. Скажем, что $\varphi \in \Omega(0, 1]$, если $\varphi(x)$ непрерывная невозрастающая выпуклая вниз в промежутке $(0, 1]$ функция такая, что $\int_0^1 \varphi(x) dx \geq 0$.

Очевидно, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат классу $\Omega(0, 1]$, но не удовлетворяют условию M .

Из результатов работ [4], [5] вытекает, в частности, следующая теорема.

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$, $q = p/(p - 1)$, $\varphi \in L_{q/2}(0, 1) \cap \Omega(0, 1]$ при $1 < p \leq 2$ и $\varphi \in L_1(0, 1) \cap \Omega(0, 1]$ при $2 < p < \infty$. Тогда оператор P_{01}^φ действует непрерывно из $L_p(0, 1)$ в сопряженное с ним пространство $L_q(0, 1)$ и положителен.

Данная теорема допускает обобщение на случай пространств Лебега с общим (не обязательно степенным) весом, что в свою очередь позволяет, следуя работам [3], [5], методом монотонных (по Браудеру–Минти) операторов доказать глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений и их систем, содержащих опера-

тор с обобщенным ядром типа потенциала P_{01}^{ρ} , в вещественных весовых пространствах Лебега $L_{01}^p(\rho)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FEGS-2020-0001).

Литература

1. Porter D., Stirling D. Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1990. 382 p.
2. Нахушев А. М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
3. Асхабов С. Н. Уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью на отрезке // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 9. С. 1182–1188.
4. Асхабов С. Н. Условия положительности операторов с разностными ядрами в рефлексивных пространствах // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 149. С. 3–13.
5. Асхабов С. Н. Градиентный метод решения нелинейных дискретных и интегральных уравнений с разностными ядрами // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 192. С. 26–37.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аттаев А. Х.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; attaev.anatoly@yandex.ru*

Для уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = \lambda u(x_0, y) \quad (1)$$

будет обсуждаться вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши

$$u|_{\gamma} = \tau(x), \quad \frac{\partial u}{\partial N}|_{\gamma} = \nu(x), \quad (x, y) \in \gamma, \quad (2)$$

где $\gamma = kx$, $0 \leq k \leq 1$, $0 \leq x \leq l$, $\tau(x)$ и $\nu(x)$ – заданные на γ достаточно гладкие функции, $\partial u / \partial N$ – производная по нормали к γ , $0 \leq x_0 \leq l$ – заданное число.

Сущность метода исследования состоит в эквивалентной редукции разрешимости задачи (2) для уравнения (1) к интегральному уравнению второго рода, разрешимость которого удастся доказать при определенных условиях на k и x_0 .

О ДИСКРЕТНОМ ВАРИАНТЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Афанасьева Е. Б.^a, Васильев В. Б.^b

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия;

^a*afanaseva@bsu.edu.ru, ^bvbv57@inbox.ru*

Мы продолжаем изучение дискретных псевдодифференциальных уравнений и краевых задач в модельных областях, начатое в работе [1]. Здесь рассматривается дискретный аналог следующей краевой задачи для модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения [2] в плоском угле $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}$

$$\begin{aligned} (Au)(x) &= 0, \quad x \in C_+^a, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2) dx_2 &= f(x_1), \end{aligned} \quad (1)$$

и последующего сравнения дискретных и непрерывных решений.

Пусть \mathbb{Z}^2 – целочисленная решетка на плоскости, $h > 0$, $\hbar = h^{-1}$. Обозначим $K_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a_n|x_1|, a_n > 0\}$ угол раствора $2\arctg a_n$, где a_n может принимать значения вида $n, 1/n, n \in \mathbb{N}$, $K_{n,d} = \hbar\mathbb{Z}^2 \cap K_n$. Мы работаем с функциями дискретной переменной $u_d(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \hbar\mathbb{Z}^2$.

Обозначим $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2$, $\hbar = h^{-1}$. Функции, определенные на $\hbar\mathbb{T}^2$, мы трактуем как периодические функции на \mathbb{R}^2 с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$.

На функциях u_d дискретного аргумента можно определить дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in \hbar\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}) \hbar^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

По заданной в \mathbb{R}^2 измеримой периодической функции $\tilde{A}_d(\xi)$ (называемой символом) с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$ можно определить дискретный псевдодифференциальный оператор A_d в дискретном угле $K_{n,d}$ следующей формулой

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in \hbar\mathbb{Z}^2} \hbar^2 \int_{\hbar\mathbb{T}^2} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x} - \tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_{n,d}.$$

Говорят, что оператор A_d – эллиптический, если

$$\text{ess} \inf_{\xi \in \hbar\mathbb{T}^2} |A_d(\xi)| > 0.$$

Дискретный аналог задачи (1) выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} (A_d u_d)(\tilde{x}) &= 0, \quad \tilde{x} \in C_+^a, \\ \sum_{\tilde{x}_2 \in \hbar\mathbb{Z}} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \hbar &= f_d(\tilde{x}_1). \end{aligned} \quad (2)$$

Определяются дискретные аналоги $H^s K_{n,d}$ пространств Соболева–Слободецкого [1], в которых ограничено действуют дискретные псевдодифференциальные операторы.

Основной результат этой работы заключается в описании условий разрешимости дискретной задачи (2) и обосновании однозначной разрешимости дискретной задачи (2) при достаточно малых h , исходя из однозначной разрешимости задачи (1).

Другие варианты дискретных краевых задач были рассмотрены в работах [3–5], где получены аналогичные результаты.

Литература

1. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // *Math. Model. Anal.* 2018. Vol. 23, no. 3. Pp. 492–506.
2. *Vasilyev V. B.* Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // *Opusc. Math.* 2019. Vol. 39, no. 1. Pp. 109–124.
3. *Васильев В. Б., Ходырева А. А.* Об одном дискретном уравнении в четверти плоскости и связанной с ним краевой задаче // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* 2022. Т. 206. С. 15–22.
4. *Васильев В. Б., Машинцев А. А.* О дискретной краевой задаче в четверти плоскости // *Вестник российских университетов. Математика.* 2023. Т. 28, № 142. С. 169–181.
5. *Afanasyeva E. B., Khodyreva A. A., Vasilyev V. B.* On a discrete boundary value problem in a quarter-plane // *Lobachevskii J. Math.* 2023. Vol. 44, no. 8. Pp. 3191–3196.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПО СТРУКТУРЕ ПОТОКОВЫХ СЕТЕЙ ШТЕЙНЕРА С УДАЛЕНИЕМ ИЗ НИХ НЕЭФФЕКТИВНЫХ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ ПОТОКОВ

Багов М. А.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия*

В статье [1] были представлены математические модели и метод оптимизации потоковых сетей Штейнера, основанный на динамической декомпозиции сети на фрагменты равной размерности и их структурно-параметрической оптимизации. Разработаны алгоритм и программа (св. № 2020660999) для ЭВМ, позволяющие проектировать трубопроводные гидравлические потоковые сети Штейнера.

Компьютерное проектирование потоковых сетей показало, что топология исходного остоного дерева высокого ранга оптимальности [2] и количество точек ветвления (точек Штейнера) результирующей потоковой сети Штейнера имеют большое значение при проектировании реальных распределительных сетей. Для проектных организаций построение потоковых сетей Штейнера с большим количеством точек ветвления потоков приводит к удорожанию сети за счет увеличения затрат на

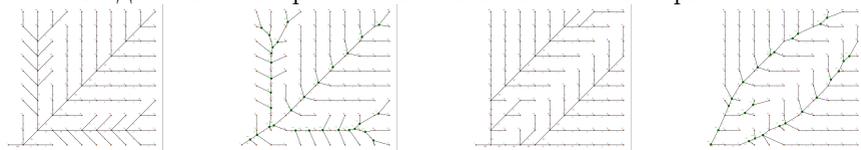
построение дополнительных узловых соединений. Кроме того, при проектировании желательно иметь несколько рабочих проектов потоковой сети для выбора из них конструкторами сети наилучшей.

В данной работе представлен метод построения потоковых сетей Штейнера с оптимальным количеством точек Штейнера. Метод состоит в последовательном удалении из полученной потоковой сети Штейнера точек Штейнера, достаточно близко расположенных к узлам сети и друг к другу, и оптимизации координат эффективных точек Штейнера. В программе также предусмотрена возможность загрузки нескольких начальных остовных деревьев высокого ранга оптимальности для проведения сравнения и анализа результатов оптимизации.

Алгоритм построения альтернативных по структуре потоковых сетей Штейнера с удалением из них неэффективных точек ветвления потоков:

1. Выделяется очередная текущая вершина k -сети Штейнера.
2. Определяются M_k^{p-1} , \overline{M}_k^p , \overline{M}_k^{p+1} .
3. Устраняются все дуги между вершинами из M_k^p .
4. Устраняются внутренние точки Штейнера k -ой подсети и формируется множество $M\Phi_k^{p-1}$ фиксированных внутренних вершин.
5. Определяется количество внутренних точек Штейнера $\left| \overline{M}_k^p \cup M\Phi_k^{p-1} \right| - 2$ в формируемой подсети P_k^* .
6. Формируется (генерируется) очередная подсеть Штейнера, стягивающая точки множества $M\Phi_k^{p-1} \cup \overline{M}_k^p$.
7. Решается задача оптимизации координат точек Штейнера сформированной подсети, определяется общая стоимость ее коммуникаций. При этом для наилучшего согласования оптимизации подсети со всей остальной сетью, внутренний контур подвижен для его точек Штейнера, а внешний контур фиксирован, т. е. варьируются координаты не только внутренних точек Штейнера, но и точек Штейнера, расположенных на внутреннем контуре сети.
8. Пп. 6, 7 повторяются для всех генерируемых альтернативных подсетей Штейнера текущей вершины k с отбором оптимальной по стоимости коммуникаций. Далее переходим к оптимизации P_{k+1} -ой подсети сети Штейнера. Процесс оптимизации структуры сети завершается при построении такой сети Штейнера, любая подсеть P -го ранга которой оптимальна.
9. Определяем Δ -среднее расстояние между узловыми вершинами исходного остовного дерева. После завершения построения сети Штейнера определяются и последовательно удаляются точки Штейнера, находящиеся вблизи узловых вершин и друг с другом на расстоянии до 25 % от Δ .

10. Удаление точек Штейнера продолжается до тех пор, пока разность значений стоимости между текущей сетью и исходной сетью Штейнера не превзойдет порог в 0,1 %.
11. Вывод графических и текстовых результатов проектирования на каждом шаге построения потоковой сети Штейнера.



а б в г

- а) Нач. ост. дерево – 47,698 млн руб.; б) Дерево Штейнера – 46,631 млн руб.;
в) Нач. ост. дерево – 49,304 млн руб.; г) Дерево Штейнера – 47,271 млн руб.

Литература

1. Багов М. А., Кудаев В. Ч. Построение потоковой сети Штейнера второго ранга оптимальности // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 154. С. 32–42.
2. Абазожов М. Б., Багов М. А., Кудаев В. Ч. Компьютерное проектирование больших трубопроводных сетей высокого ранга оптимальности // Доклады АМАН. 2022. Т. 22, № 4. С. 39–56.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Балкизов Ж. А.

*Институт прикладной математики и автоматизации КВНЦ РАН,
Нальчик, Россия; Giraslan@yandex.ru*

На евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \\ u_{xx} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y), & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где m, λ – заданные числа, причем $m > 0, |\lambda| \leq \frac{m}{2}$; $a(x, y), b(x, y), c(x, y), f(x, y)$ – заданные функции; $u = u(x, y)$ – искомая функция.

Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$, где Ω_1 – это область, ограниченная при $y < 0$ характеристиками $\sigma_1 = AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$ и $\sigma_2 = CB : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$ уравнения (1), выходящими из точки $C = (r/2, y_C), y_C = -\left[\frac{r(m+2)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}$, проходящими через точки $A = (0, 0)$ и $B = (r, 0)$, соответственно, и отрезком $I = AB$ прямой $y = 0$; Ω_2 – прямоугольная область, ограниченная отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B и AB прямых $x = 0, y = h, x = r, y = 0$ ($h > 0, r > 0$), соответственно, при $y > 0$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$; $u_x(x, 0), u_y(x, 0) \in L_1(0, r)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Аналогом задачи Трикоми для уравнения (1) является следующая

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(r, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u[\theta_0(x)] = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (3)$$

где $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -(2 - 2\varepsilon)^{\varepsilon-1} x^{1-\varepsilon}\right)$, $\varepsilon = \frac{m}{m+2}$; $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ – заданные на отрезке $[0, h]$ функции, а $\psi(x)$ – заданная на отрезке $[0, r]$ функция, причем выполнено условие согласования: $\varphi_1(0) = \psi(0)$.

Справедливы следующие теоремы единственности и существования регулярного в области Ω решения задачи (2)–(3) для уравнения (1).

Теорема 1. Пусть заданные функции $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$, таковы, что выполнены следующие условия:

$$a(x, y), b(x, y), b_x(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}_2), \quad c(x, y) \in C(\bar{\Omega}_2), \quad (4)$$

$$b(x, y) < 0, \quad c(x, y) \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}_2, \quad (5)$$

$$\frac{b_{xx}(x, 0)b(x, 0) - 2b_x^2(x, 0)}{b^3(x, 0)} + \left[\frac{2a(x, 0)}{b(x, 0)} \right]' \leq \frac{\gamma_1}{2\Gamma(\varepsilon)}(r - x)^{\varepsilon-1} \quad \forall x \in [0, r], \quad (6)$$

где $\gamma_1 = \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_1)\Gamma(\varepsilon)(2 - 2\varepsilon)^{1-\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon_2)\Gamma(2 - \varepsilon)}$, $\varepsilon_1 = \frac{m - 2\lambda}{2(m + 2)}$, $\varepsilon_2 = \frac{m + 2\lambda}{2(m + 2)}$.

Тогда, если существует решение задачи (1)–(3), то оно единственно.

Теорема 2. Пусть заданные функции $a(x, y), b(x, y), c(x, y), f(x, y), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi(x)$ таковы, что они обладают свойствами (4)–(6) и, кроме того, выполнены следующие условия:

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C[0, h]; \quad \psi(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r); \quad f(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}_2).$$

Тогда существует регулярное в области Ω решение задачи 1.

Отметим, что полученные в рамках данного доклада результаты являются продолжением исследований, проведенных в работах [1], [2].

Литература

1. Салахитдинов М. С., Бердышев А. С. О некоторых нелокальных краевых задачах для смешанного парабола-гиперболического уравнения // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. науки. 1982. № 4. С. 25–31.
2. Салахитдинов М. С., Бердышев А. С. Задача Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. науки. 1983. № 4. С. 20–25.

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДОВ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ
И ПОДОВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ
ОПЕРАТОРОВ**

Баскаков А. Г.^{1,a}, Гаркавенко Г. В.^{1,b}, Ускова Н. Б.^{2,c}

¹*Воронежский государственный университет,*

²*Воронежский технический университет, Воронеж, Россия;*

^a*anatbaskakov@yandex.ru,* ^b*g.garkavenko@mail.ru,* ^c*nat-uskova@mail.ru*

Пусть \mathcal{X} – комплексное банахово пространство и $End\mathcal{X}$ банахова алгебра ограниченных операторов в \mathcal{X} . Напомним, что два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует такой ограниченный обратимый оператор U , что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1Ux = UA_2x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в A_2 . Иногда записывают $A_1U = UA_2$ или $A_1 = UA_2U^{-1}$.

Широкое применение преобразования подобия и подобных операторов связано с совпадением их спектров, а также тем, что зная спектральные характеристики одного из операторов, легко можно получить соответствующие характеристики другого. Обобщением понятия подобных операторов является понятие сплетаемых операторов [1, 2], в этом случае обратный к оператору U может не существовать или не быть ограниченным. Соответствующий метод называется методом операторов преобразования (transmutation operator method) [1, 2]. Оператор U называется также сплетающим оператором. Спектры сплетаемых операторов могут не совпадать.

Другим обобщенным методом подобных операторов являются эквивалентные операторы. Напомним (см. [3]), что операторы называются эквивалентными, если $A_1 = UA_2V$, где U, V – ограниченные обратимые операторы и $VD(A_1) = D(A_2)$. Отметим, что есть и другие, равносильные, определения эквивалентных операторов, которые более удобны в случае, если эквивалентные операторы действуют в разных пространствах. Эквивалентные операторы также могут иметь несовпадающие спектры (в случае совпадения спектров они называются спектрально или сильно эквивалентными), но одинаковые состояния обратимости (см. определение, например, в [3]). Так, например, если один из эквивалентных операторов имеет конечномерное ядро и замкнутый образ, то и второй тоже имеет конечномерное ядро и замкнутый образ. Или, если один из эквивалентных операторов обратим, то обратим и другой.

Приведем пример эквивалентных операторов (см. также [4]). Рассмотрим в банаховом пространстве \mathcal{X} семейство эволюционных операторов $\{U(t, s), -\infty < s \leq t < \infty\} \subset End\mathcal{X}$. Семейству U сопоставляется оператор $\mathcal{L}U : D(\mathcal{L}U) \subset L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty)$. При этом функцию $x \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ отнесем в $D(\mathcal{L}U)$, если существует $f \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ такая, что почти для всех $s \leq t$ имеет место равенство

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau)d\tau,$$

при этом полагаем $\mathcal{L}\mathcal{U}x = f$.

Линейный оператор $\mathcal{L}\mathcal{U} : D(\mathcal{L}\mathcal{U}) \subset L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ эквивалентен разностному оператору

$$(Dx)(n) = x(n) - \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), \quad x \in l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad p \in [1, \infty).$$

В докладе приводится некоторый обзор по методу эквивалентных операторов и примеры его применения.

Отметим, что подобные операторы спектрально эквивалентны, а также являются частным случаем сплетаемых операторов. Методом эквивалентных операторов А. Г. Баскаковым [3] решена проблема М. Г. Крейна [5] построения теории дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве.

Литература

1. *Ситник С. М., Шилижина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. 246 с.
2. Transmutation operators and applications. In the series: Trends in mathematics. Eds. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. Springer: Birkhanser, 2020. XVII. 686 p.
3. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1 (409). С. 77–128.
4. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функ. анализ и его приложения. 1996. Т. 30, вып. 3. С. 1–11.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Баротов Б. Х.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
b.barotov@g.nsu.ru

В докладе рассматриваются вопросы разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений:

$$h(t)u_t - \Delta u + \int_0^t R(t, \tau)Bu(x, \tau)d\tau = f(x, t),$$
$$h(t)u_{tt} - \Delta u + \int_0^t R(t, \tau)Bu(x, \tau)d\tau = f(x, t).$$

В этих уравнениях функция $h(t)$ может обращаться в нуль, B – либо тождественный оператор, либо оператор Лапласа. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ВКЛЮЧАЮЩАЯ ЭФФЕКТЫ ПАМЯТИ ЧЕРЕЗ ДРОБНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ КАПУТО ПО ВРЕМЕНИ

Бейбалаев В. Дж.^{1,2,3,a}, Аливердиев А. А.^{1,3,b}, Hristov J.^{4,c},
Якубов А. З.^{1,d}

¹Dagestan State University,

²Institute for Geothermal Researches and Renewable Energy IHT of RAS,

³Dagestan State University of National Economy, Makhachkala, Russia

⁴University of Chemical Technology and Metallurgy, Sofia, Bulgaria

^akaspij_03@mail.ru, ^baliverdi@mail.ru, ^cjordan.hristov@mail.bg,

^dyakubovaz@mail.ru

В полубесконечной области $D = \{(x, \tau) : 0 < x < \infty, 0 < \tau \leq T\}$ исследована модель нестационарной теплопроводности, включающая эффекты памяти через дробную по времени производную Капуто [1]

$$\partial_{0t}^\alpha T(x, \tau) = \bar{a} \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} + b [T_f - T(0, \tau)] = 0, \quad T(\infty, \tau) = T_0, \quad \frac{\partial T(\infty, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\bar{a} = at^\alpha$ имеет размерность m^2 учитывая, что размерность коэффициента температуропроводности a равна $\frac{m^2}{s^\alpha}$. То есть безразмерность влияет только на временную переменную. Однако, имея в виду, что в полубесконечной среде нет характерного масштаба длины, можно рассмотреть результаты работ, где масштаб длины в таком случае уравнения дробной диффузии может быть определен как $x_0 = \sqrt{at^\alpha}$ с размерностью длины $[m]$; для $\alpha = 1$ мы получаем масштаб длины в классическом уравнении диффузии. На этой основе мы можем определить переменную подобия $\eta_\alpha = \frac{x}{\sqrt{at^\alpha}}$, которая для $\alpha = 1$ соответствует переменной подобия Больцмана $\eta = \frac{x}{\sqrt{at}}$. В работе [2] для уравнения диффузии дробного порядка исследована третья краевая задача.

Решена и проанализирована начально-краевая задача Робена для нестационарной теплопроводности с дробной по времени производной Капуто в полубесконечной области с конвективным теплообменом (закон Ньютона) на границе. Аналитически разработано решение задачи с применением операционного метода (преобразования Лапласа во временной области).

Литература

1. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
2. *Хуштова Ф. Г.* Третья краевая задача в полуполосе для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 12. С. 1635–1643.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЗАГРЯНИТЕЛЕМ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ

**Беккиев К. М.^{1,a}, Аджиева А. А.^{2,b}, Шаповалов В. А.¹,
Машуков И. Х.¹**

¹*Высокогорный геофизический институт,*

²*Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет
им. В. М. Кокова, Нальчик, Россия*

^a*kerimbek@mail.ru, ^baida-adzhieva@mail.ru*

В современном мире атмосферные оптические линии связи (АОЛС) решают проблему «последней мили» и представляют собой важный аспект телекоммуникаций для передачи данных [1]. Однако индустриальные выбросы, пожары и другие факторы, создают атмосферные условия, которые могут существенно влиять на распространение оптического излучения и, следовательно, на эффективность оптических коммуникационных систем. Воздействие атмосферных аэрозольных частиц, таких как сажа, на эффективность АОЛС все еще остается малоизученным.

Задымление может вызвать значительные потери сигнала и снижение производительности атмосферных оптических сетей. Концентрация сажи и длина волны монохроматического излучения являются, в этом случае важными факторами, влияющими на величину потерь на оптических трассах.

В данной работе разработанная численная модель переноса загрязнителей воздуха в атмосфере используется для оценки воздействия облака сажи на распространение оптических сигналов в атмосфере. Полученные результаты позволяют оценить ослабление и рассеяние оптических сигналов АОЛС в условиях задымления. Они могут быть использованы для расширения понимания воздействия задымления на оптическую связь, способствовать улучшению надежности и производительности оптических сетей, например, применяться для создания алгоритмов более эффективного управления оптическими коммуникационными системами в сложных атмосферных условиях. Это важно для предсказания качества связи и оптимизации работы оптических коммуникационных систем в случае природных и техногенных катастроф, пожаров и других ситуаций, когда атмосферные условия могут значительно измениться за короткий промежуток времени.

Дальнейшие исследования могут включать анализ различных типов атмосферных аэрозолей, расширение модели на более сложные сценарии и учет более сложных атмосферных явлений. Результаты исследования могут быть применены в сферах, где АОЛС играют ключевую роль, включая телекоммуникации, обеспечение безопасности, чрезвычайные ситуации, метеорологические исследования [2, 3].

Литература

1. *Неустроева И. В.* Атмосферные оптические линии связи и причины их затухания // Тенденции развития науки и образования. 2019. Т. 47, № 6. С. 28–31.
2. *Попов А. А., Шефер О. В., Рожнева О. В.* Численное моделирование поглощения оптического излучения атмосферными частицами различной природы // Фундаментальные исследования. 2015. Т. 2, № 17. С. 3753–3758.
3. *Семенов В. В.* Компьютерное моделирование процессов рассеяния оптического излучения аэрозольными средами // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2020. Т. 86, № 8. С. 43–48.

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ТЕРРИТОРИЙ И ВЕДЕНИИ КАДАСТРА НЕДВИЖИМОСТИ

Беркова Е. Д.

*Кубанский государственный технологический университет, Краснодар,
Россия; liza.berkova3@gmail.com*

В настоящее время ни один строительный процесс невозможно представить без проектирования территории. Данная область тесно взаимосвязана со строительством и кадастром недвижимости.

Проектирование территорий представляет собой совокупность различных процессов, а именно:

- Разработку планов использования земельных участков;
- Создание благоприятной инфраструктуры;
- Планирование дорожно-транспортной сети;
- План размещения зданий и сооружений на территории и земельных участках.

На проектирование территорий влияют различные факторы, такие как социальные, экономические, экологические и многие другие. Их необходимо учитывать при планировании территории для того, чтобы обеспечивать стабильное и устойчивое развитие социальной, инженерной, а также транспортной инфраструктур. Данный процесс может проводиться на следующих уровнях:

- Федеральном;
- Региональном;
- Муниципальном [1].

Проектирование территорий и их последующее управление необходимо проводить с учетом экономического обоснования любого решения, которое принимается в этой области. С этой целью разрабатываются документы территориального планирования и иная градостроительная документация. Проектировщики опираются на эти документы для того, чтобы создавать проекты планировки, которые в последствии будут представлять собой основу для размещения объектов. Также, каждое проектируемое здание и сооружение проходит определенную экспертизу, в зависимости от своего назначения [2].

Кадастр недвижимости, в свою очередь, является многофункциональным источником информации об объектах недвижимого имущества. Кадастровые работы включают в себя следующие виды деятельности:

- Учет и регистрацию недвижимости и прав на нее;
- Определение координат характерных точек границ земельных участков, а также его частей;
- Определение площади объектов недвижимости и их описание;
- Согласование местоположения границ земельных участков, а также другие виды деятельности.

При проектировании территории и ведении кадастра недвижимости важную роль играет применение геоинформационных технологий. Также ГИС используются и в других сферах жизни общества, таких как образование, медицина, административная, маркетинговая и предпринимательская деятельности. Для ведения кадастра также создаются ГИС [3, 4].

Таким образом, применение ГИС при ведении кадастра недвижимости, а также при проектировании территорий играет важную роль. Геоинформационные технологии позволяют улучшить качество производимых работ, а также осуществлять анализ территории с учетом антропогенного воздействия на окружающую среду, доступности транспорта на проектируемой территории и других факторов. ГИС упрощает работу с большим объемом информации и облегчает анализ и учет данных об объектах недвижимого имущества [5, 6].

Литература

1. Беркова Е. Д., Панютишцева А. А., Грибкова И. С., Гура Д. А. Управление земельными ресурсами с применением геоинформационных систем // Регулирование земельно-имущественных отношений в России: правовое и геопространственное обеспечение, оценка недвижимости, экология, технологические решения. 2023. № 2. С. 126–129.
2. Грибкова И. С., Кислица Н. А. Применение ГИС для целей совершенствования системы управления в сфере образования // Электронный сетевой политематический журнал "Научные труды КубГТУ". 2020. № 2. С. 81–92.
3. Осенняя А. В., Грибкова И. С., Хахук Б. А. и др. Применение геоинформационных систем при проведении кадастровой оценки объектов недвижимости в Российской Федерации // Региональные геосистемы. 2020. Т. 44, № 1. С. 55–63.
4. Гура Д. А., Кусова С. И., Кравцова Т. В. О проблемах современного кадастра // В сборнике: Науки о Земле на современном этапе. VI Международная научно-практическая конференция. 2012. С. 73–75.
5. Осенняя А. В., Грибкова И. С., Коломыцев А. А., Кирионикова Н. М. Структура информации ГИС для кадастровой оценки недвижимости // Землеустройство, кадастр и мониторинг земель. 2022. № 6. С. 394–401.
6. Осенняя А. В., Хахук Б. А., Коломыцева А. А. Совершенствование методики кадастровой оценки объектов недвижимости на основе градостроительной ценности территории // Вопросы региональной экономики. 2018. № 3(36). С. 56–61.

**РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ
ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА**

Бештоков М. Х.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; beshtokov-murat@yandex.ru*

В прямоугольнике $\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим первую краевую задачу для нагруженного уравнения теплопроводности

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \sum_{s=1}^m q_s(x, t) u(\xi_s, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где

$$0 < c_0 \leq k(x, t), \quad \frac{1}{k(x, t)} \leq c_1,$$

$$\left| \left(\frac{1}{k(x, t)} \right)_x \right|, \quad \left| \sum_{s=1}^m q_s(x, t) \right|, \quad |(q_s(x, t))_{xx}| \leq c_2, \quad s = 1, 2, \dots, m,$$

$$u(x, t) \in C^{6,3}(\bar{D}), \quad k(x, t) \in C^{5,1}(\bar{D}), \quad q_s(x, t), f(x, t) \in C^{4,1}(\bar{D}), \quad (4)$$

ξ_s ($s = 1, 2, \dots, m$) – произвольные точки интервала $(0, l)$,
 $c_1, c_2 = \text{const} > 0$.

Для решения задачи (1)–(3) применим метод конечных разностей. Для этого на равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}$, где $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = l/N\}$, $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0, j_0}, \tau = T/j_0\}$ дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$ [1–3]:

$$y_t = (ay_x^\sigma)_x - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m d_s Y_s + \varphi, \quad (5)$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad t_j \in \bar{\omega}_\tau, \quad (6)$$

$$y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x_i \in \bar{\omega}_h, \quad (7)$$

где

$$\alpha_i^j = a(x_i, t_j) = \frac{1}{\frac{1}{6}p_{i-1} + \frac{2}{3}p_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}p_i}, \quad p = p(x, t) = \frac{1}{k(x, t)}, \quad x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - 0.5h,$$

$$y = y_i^j = y(x_i, t^j), \quad \hat{y} = y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1}), \quad y_{i\pm 1}^j = y(x_i \pm h, t_j),$$

$$\begin{aligned}
y_{\bar{x}} &= \frac{y - y_{i-1}}{h}, & y_x &= \frac{y_{i+1} - y}{h}, & y_t &= \frac{\hat{y} - y^j}{\tau}, & x_{i_s} &\leq \xi_s \leq x_{i_s+1}, \\
d_{s,i}^j &= \left(q_s + \frac{h^2}{12} (a(pq_s)_{\bar{x}})_x \right)_i^{j+\frac{1}{2}}, & \varphi_i^j &= \left(f + \frac{h^2}{12} (a(pf)_{\bar{x}})_x \right)_i^{j+\frac{1}{2}}, \\
\sigma &= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} p, & y^{(\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2} Y, & Y &= (y^{j+1} + y^j), \\
\eta_s^j &= \frac{(\xi_s - x_{i_s})(\xi_s - x_{i_s+1})(\xi_s - x_{i_s+2})}{-6h^3} y_{i_s-1}^j + \\
&+ \frac{(\xi_s - x_{i_s-1})(\xi_s - x_{i_s+1})(\xi_s - x_{i_s+2})}{2h^3} y_{i_s}^j + \\
&+ \frac{(\xi_s - x_{i_s-1})(\xi_s - x_{i_s})(\xi_s - x_{i_s+2})}{-2h^3} y_{i_s+1}^j + \\
&+ \frac{(\xi_s - x_{i_s-1})(\xi_s - x_{i_s})(\xi_s - x_{i_s+1})}{6h^3} y_{i_s+2}^j,
\end{aligned}$$

где $\eta_s^j = y(\xi_s, t_j)$, $Y(\xi_s, t_j) = \eta_s^{j+1} + \eta_s^j$.

В дальнейшем будем считать, что $h < \min\{\xi_1, l - \xi_m\}$.

Априорную оценку найдем методом энергетических неравенств. Для этого введем скалярные произведения и норму:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h, \quad (u, u) = (1, u^2) = \|u(\cdot, t)\|_0^2 = \|u\|_0^2.$$

Теорема. Пусть выполнены условия ограниченности и гладкости (4), тогда существуют такие τ_0, h_0 , что если $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2)$, $h \leq h_0(c_0, c_1, c_2)$, то схема (5)–(7) абсолютно устойчива по правой части и начальным данным так, что для решения разностной задачи (5)–(7) справедлива априорная оценка [2]

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq M(T) \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right), \quad (8)$$

где $M(T) = \text{const} > 0$, не зависящая от h и τ .

Из (8) следует единственность и устойчивость решения разностной задачи (5)–(7) по правой части и начальным данным, а также сходимость при $\tau \leq \tau_0$, $h \leq h_0$ со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$.

Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.
3. Самарский А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3, № 5. С. 812–840.

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ**

Бештокова З. В.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; zarabaeva@yandex.ru*

В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$, основанием которого является p -мерный прямоугольный параллелепипед $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ , $\bar{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (3)$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u$,

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) - \sum_{s=1}^m q_{s\alpha}(x, t) u(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, \xi_\alpha^s, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t),$$

$$0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1, \quad \left| \sum_{s=1}^m q_{s\alpha}(x, t) \right| \leq c_2, \quad \alpha = \bar{1, p}, \quad (4)$$

ξ_α^s – фиксированная точка интервала $(0, l_\alpha)$, $s = 1, 2, \dots, m$, c_0, c_1, c_2 – положительные постоянные, $Q_T = G \times (0 < t \leq T]$.

На равномерной сетке [1]

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), x \in \bar{\omega}_h, t \in \bar{\omega}_\tau\},$$

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, m, m\tau = T\},$$

дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему с весами, порядка аппроксимации $O(|h|^2 + \tau^{m\sigma})$:

$$y_t = \Lambda(\bar{t})y^{(\sigma)} + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (5)$$

$$y|_{\gamma_h} = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad (6)$$

где

$$\Lambda(\bar{t}) = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha(\bar{t}), \quad \Lambda_\alpha(\bar{t})y^{(\sigma)} = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\sigma)})_{x_\alpha} - \sum_{s=1}^m d_{s\alpha} \left(y_{i_{\alpha s}}^{(\sigma)} x_{i_{\alpha s}}^- + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\sigma)} x_{i_{\alpha s}}^+ \right),$$

$$\begin{aligned}
y^{(\sigma)} &= \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y, & a_\alpha^{(+1\alpha)} &= a_{\alpha, i_\alpha + 1}, & \hat{y} &= y^{j+1}, & y &= y^j, \\
y_{\bar{x}_\alpha} &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h_\alpha}, & y_{x_\alpha} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\alpha}, & y_t &= \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, & m_\sigma &= \begin{cases} 2, & \sigma = 0, 5, \\ 1, & \sigma \neq 0, 5, \end{cases} \\
a_\alpha &= k_\alpha(x^{-0,5\alpha}, \bar{t}_j), & d_{s_\alpha} &= q_{s_\alpha}(x_i, \bar{t}_j), & \varphi_i &= f(x_i, \bar{t}_j), \\
x_{i_\alpha}^- &= \frac{x_\alpha^{(i_\alpha + 1)} - \xi_\alpha^s}{h_\alpha}, & x_{i_\alpha}^+ &= \frac{\xi_\alpha^s - x_\alpha^{(i_\alpha)}}{h_\alpha}, & x_\alpha^{(i_\alpha)} &\leq \xi_\alpha^s \leq x_\alpha^{(i_\alpha + 1)}, \\
x^{-0,5\alpha} &= x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0, 5h_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, \\
\bar{t} &= (j + 0, 5)\tau = t_j + 0, 5\tau = t_{j+0,5},
\end{aligned}$$

$t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha\tau}{p} = \left(j + \frac{\alpha}{p}\right)\tau$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2$, τ, h – шаги сетки.

Для получения априорной оценки решения разностной задачи (5), (6) воспользуемся методом энергетических неравенств. Введем скалярное произведение в следующем виде:

$$\begin{aligned}
(u, v) &= \sum_{x \in \omega_h} u(x)v(x)h_1h_2 \dots h_p = \\
&= \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \dots \sum_{i_p=1}^{N_p-1} u(i_1h_1, i_2h_2, \dots, i_ph_p)v(i_1h_1, i_2h_2, \dots, i_ph_p)h_1h_2 \dots h_p; \\
(u, v)_\alpha &= \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \dots \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} \dots \sum_{i_p=1}^{N_p-1} u(x)v(x)h_1h_2 \dots h_p = \\
&= \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} u(x)v(x)h_\alpha \right) H/h_\alpha, & H &= \prod_{\alpha=1}^p h_\alpha.
\end{aligned}$$

В пространстве функции определим норму и введем ее в таком виде:

$$(u, u) = \|u\|^2, \quad (u, u) = \|u\|^2, \quad (u, v) = \sum_{\alpha=1}^p (u, v)_\alpha, \quad \|Y_{\bar{x}}\|^2 = \sum_{\alpha=1}^p \|Y_{\bar{x}_\alpha}\|^2.$$

Теорема. Пусть выполнены условия (4), тогда в классе достаточно гладких коэффициентов уравнения и граничных условий для решения задачи (5), (6) при $\sigma = 0, 5$ и малом $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2)$ справедлива априорная оценка [2]

$$\|y^{j+1}\|^2 + \sum_{j'=0}^j \|(y^{j'+1} + y^{j'})_{\bar{x}}\|^2 \tau \leq M(T) \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|^2 \tau + \|y^0\|^2 \right), \quad (7)$$

где $M(T)$ – положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ .

Из (7) следует единственность и устойчивость решения разностной задачи (5), (6) по правой части и начальным данным, а также сходимость при $\sigma = 0,5$ и малом $\tau \leq \tau_0$ со скоростью $O(|h|^2 + \tau^2)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2$.

Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮТИВНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Бжеумихова О. И.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Нальчик, Россия; bzhoksana@gmail.com

В докладе излагаются некоторые новые результаты о разрешимости краевых задач для гиперболических уравнений с инволюцией.

Пусть Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T . Далее, пусть $\varphi(x)$ есть заданная инволюция отрезка $[0, 1]$, $a = \text{const}$, $b(x, t)$ и $f(x, t)$ есть заданные, определенные на множестве \bar{Q} , функции.

Краевая задача I. Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - au_{xx}(\varphi(x), t) + b(x, t)u(x, t) = f(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Представленная задача в случае $a = 0$ достаточно хорошо изучена (см., например, работы [1, 2]).

В работе для гиперболического уравнения с переменным коэффициентом и с инволюцией в старших производных исследована разрешимость начально-краевой задачи в пространствах Соболева [3]. Для изучаемой начально-краевой задачи доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

Литература

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
2. Кожанов А. И. Начально-граничные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2021. Т. 18, № 1. С. 43–53.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.

ЗАДАЧА С ДИНАМИЧЕСКИМ НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Богатов А. В.

Самарский университет, Самара, Россия andrebogato@mail.ru

Ситуации, приводящие к динамическим условиям в краевых условиях, возникают при анализе поведения механической системы, состоящей из объектов различных объемов, размеров и материалов. Например, структура, состоящая из манипулятора (роботизированная рука) и спутника. При наладке работы таких объектов отмечено, что надежность их во многом зависит от возможности демпфирования некоторых нежелательных режимов вибрации. Математическое моделирование в таких случаях приводит к задачам с динамическими условиями, содержащими первую производную по времени как в граничном условии, так и в уравнении [1].

В докладе рассматривается задача с динамическим нелокальным условием для одномерного гиперболического уравнения.

В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - (au_x)_x + bu_t + cu = f(x, t) \quad (1)$$

и поставим задачу: *найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным*

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

граничному условию

$$u_x(0, t) = 0 \quad (3)$$

и нелокальному условию

$$u_x(l, t) + \gamma u_t(l, t) + \int_0^l K(x)u_t(x, t)dx = 0. \quad (4)$$

Функции $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$ заданы в \bar{Q}_T и достаточно гладки, $a(x, t) \geq a_0 > 0$ всюду в \bar{Q}_T , $K(x)$ задана в $[0, l]$, γ – известное число.

Под решением задачи (1)–(4) мы понимаем функцию $u \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + au_x v_x + bu_t v + cuv) dx dt + \int_0^T v(l, t) [\gamma u_t(l, t) + \\ & + \int_0^l K(x)u_t(x, t)dx] dt = \int_0^T \int_0^l f(x, t)v(x, t) dx dt, \end{aligned} \quad (5)$$

для всех $v \in \hat{W}(Q_T)$.

Удалось показать, что если

$$a, a_t, b, b_t, c \in C(\bar{Q}_T), \quad f \in L_2(Q_T), \quad K \in C[0, l], \quad \gamma > 0,$$

то существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(4).

Удалось найти условия на входные данные, обеспечивающие существование единственного обобщенного решения поставленной задачи [2].

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1999. 799 с.
2. Богатов А. В. Задача с динамическим нелокальным условием для одномерного гиперболического уравнения // Вестн. СамУ. Естественнонауч. сер. 2021. Т. 27, № 1. С. 7–14.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ С ОПЕРАТОРАМИ ДЖРБАШЯНА–НЕРСЕСЯНА

Богатырева Ф. Т.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; fatima_bogatyreva@bk.ru*

В области $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < T\}$ рассматривается уравнение

$$Lu \equiv aD_{0y}^{\{\alpha, \beta\}} u(x, y) + bD_{0y}^{\{\gamma, \delta\}} u(x, y) - u_{xx}(x, y) = f(x, y), \quad (4)$$

где $D_{0y}^{\{\alpha, \beta\}}$, $D_{0y}^{\{\gamma, \delta\}}$ – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна [1], ассоциированные с упорядоченными парами $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\gamma, \delta\}$ порядков $\mu = \alpha + \beta - 1 > 0$, $\nu = \gamma + \delta - 1 > 0$ соответственно, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, 1]$, $\mu > \nu$, $a, b > 0$, $f(x, y)$ – заданная функция.

Регулярным решением уравнения (4) в области Ω назовем функцию $u(x, y)$ такую, что $u(x, y)$ в области Ω дважды непрерывно дифференцируема по переменной x ; $y^{1-\varepsilon}u(x, y) \in C(\Omega_0)$, $\Omega_0 = \mathbb{R} \times [0, T]$ для некоторого $\varepsilon > 0$, а функция $D_{0y}^{\sigma-1}u(x, y) \in C(\Omega_0)$, где $\sigma = \max\{\alpha, \gamma\}$, абсолютно непрерывна как функция переменной y в полуинтервале $[0, T]$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

В работе [2] показано, что любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде (при дополнительных условиях на $f(x, y)$)

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^y f(s, t) G_1(x-s, y-t) dt ds + \\ + a \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) G_1^{1-\beta}(x-s, y) ds + b \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) G_1^{1-\delta}(x-s, y) ds. \quad (2)$$

Здесь $G_n^\xi(x, y)$ – специальная функция, выраженная в терминах функции Райта, $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y)$, $\psi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\gamma-1} u(x, y)$.

При определенных параметрах α , β , γ и δ , некоторые из слагаемых в представлении (2) обращаются в нулю. В докладе обсуждается вопрос влияния распределения этих параметров на корректность постановок начально-краевых задач для уравнения (1).

Литература

1. Джрбашян М. М., Нерсисян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем. 1968. Vol. 3, no. 1. Pp. 3–28.
2. Богатырева Ф. Т. О представлении решения уравнения диффузии с операторами Джрбашяна-Нерсисяна // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 40, № 3. С. 16–27.

О КРУЧЕНИИ ВАН ДЕР ВАРДЕНА–БОРТОЛОТТИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Бодренко И. И.

ООО «Интерактивные системы», Волгоград, Россия; bodrenkoi@mail.ru

Пусть $M^{n+p}(\tilde{c})$ – $(n + p)$ -мерное ($p \geq 2$) пространство постоянной кривизны \tilde{c} ($\tilde{c} = \text{const}$), \tilde{g} – риманова метрика на $M^{n+p}(\tilde{c})$. Пусть F^n – n -мерное ($n \geq 2$) гладкое подмногообразие в $M^{n+p}(\tilde{c})$. Обозначим через g риманову метрику на F^n , согласованную с \tilde{g} , через ∇ – риманову связность на F^n , согласованную с g . Обозначим через b , D и R^\perp вторую фундаментальную форму, нормальную связность и тензор нормальной кривизны подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$, соответственно. Обозначим через $\bar{\nabla} = \nabla \oplus D$ связность Ван дер Вардена–Бортолотти. Ковариантная производная $\bar{\nabla}b$ определяется равенством

$$(\bar{\nabla}_X b)(Y, Z) = D_X(b(Y, Z)) - b(\nabla_X Y, Z) - b(Y, \nabla_X Z)$$

для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n .

Пусть $x \in F^n$ – произвольная точка, $T_x F^n$ и $N_x F^n$ – касательное и нормальное пространства к F^n в точке x , соответственно. Обозначим через $\gamma(x, t)$ геодезическую на F^n , проходящую через точку x в направлении вектора $t \in T_x F^n$. Пусть $T_{(\gamma)}$ – единичное векторное поле, касательное к $\gamma(x, t)$. Обозначим $T_{(\gamma)}(x) = \tau$, где $\tau = t/|t|$. Рассмотрим вдоль геодезической $\gamma(x, t)$ нормальное векторное поле

$$\nu_{(\gamma)} = D_{T_{(\gamma)}}(b(T_{(\gamma)}, T_{(\gamma)})).$$

В работе [1] исследованы свойства подмногообразий $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$, у которых вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$ нормальное векторное поле $\nu_{(\gamma)}$ параллельно в нормальной связности D .

Вектор $\nu_{(\gamma)}(x) \in N_x F^n$ зависит от точки x и направления $t \in T_x F^n$. Имеет место равенство [1]:

$$\nu_{(\gamma)}(x) = (\bar{\nabla}_\tau b)(\tau, \tau), \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n.$$

Обозначим нормальный вектор $\nu_{(\gamma)}(x)$ через $\varkappa_{\bar{\nabla}}(x, t)$: $\nu_{(\gamma)}(x) \equiv \varkappa_{\bar{\nabla}}(x, t)$.

Определение 1. Вектор $\varkappa_{\bar{\nabla}}(x, t) \in N_x F^n$ называется вектором кручения Ван дер Вардена–Бортолотти подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по направлению $t \in T_x F^n$.

Обозначим через $k_N(x, t)$ и $\varkappa_N(x, t)$ векторы нормальной кривизны и нормального кручения подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по направлению $t \in T_x F^n$, соответственно.

Теорема 1. Пусть подмногообразии $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ не имеет асимптотических направлений. Тогда выполнено равенство

$$\varkappa_N(x, t) = \frac{\varkappa_{\bar{\nabla}}(x, t)}{|k_N(x, t)|} - \frac{\tilde{g}(\varkappa_{\bar{\nabla}}(x, t), k_N(x, t))}{|k_N(x, t)|^3} k_N(x, t), \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n.$$

Определение 2. Подмногообразие $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ называется циклически рекуррентным, если на F^n существует 1-форма μ такая, что

$$(\bar{\nabla}_X b)(Y, Z) = \mu(X)b(Y, Z) + \mu(Y)b(Z, X) + \mu(Z)b(X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n .

Циклически рекуррентные подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ являются естественными обобщениями поверхностей Дарбу F^2 в трехмерном евклидовом пространстве E^3 [2].

Теорема 2. Пусть $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ есть циклически рекуррентное подмногообразие без асимптотических направлений. Тогда выполнено равенство

$$\varkappa_{\bar{\nabla}}(x, t) = \frac{\tilde{g}(\varkappa_{\bar{\nabla}}(x, t), k_N(x, t))}{|k_N(x, t)|^2} k_N(x, t), \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n.$$

Теорема 3. Пусть $F^n \subset E^{n+p}$ есть циклически рекуррентное подмногообразие без асимптотических направлений. Если на F^n тензор нормальной кривизны $R^\perp \equiv 0$, и F^n не лежит, локально, ни в одном $E^{n+1} \subset E^{n+p}$, то выполняются соотношения:

$$k_N(x, t) \neq 0, \quad \varkappa_{\bar{\nabla}}(x, t) \equiv 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n.$$

На R -поверхностях $F^2 \subset E^4$ и только на них выполняется условие:

$$|k_N(x, t)| = k(x), \quad \forall x \in F^2, \quad \forall t \in T_x F^2,$$

где k – некоторая функция на F^2 .

Определение 3. Инвариант $|\varkappa_{\bar{\nabla}}(x, t)|$ называется кручением Ван дер Вардена–Бортолотти подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(\tilde{c})$ в точке $x \in F^n$ по направлению $t \in T_x F^n$.

Теорема 4. Пусть F^2 есть R -поверхность в E^4 , не содержащая вырожденных точек. Тогда выполнено равенство

$$|\kappa_{\overline{\nabla}}(x, t)| = f(x), \quad \forall x \in F^2, \quad \forall t \in T_x F^2,$$

где f – некоторая функция на F^2 такая, что $f(x) > 0 \quad \forall x \in F^2$.

Литература

1. Бодренко И. И. О подмногообразиях с параллельным нормальным векторным полем в пространствах постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 169. С. 3–10.
2. Бодренко И. И. Обобщение теоремы Бонне о поверхностях Дарбу // Математические заметки. 2014. Т. 95, № 6. С. 812–820.

ГЛОБАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА–КАПУТО. СЕКТОРИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Бойко К. В.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
kvboyko@mail.ru

Пусть D_t^β – дробная производная Герасимова–Капуто порядка β , если $\beta > 0$ или дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $-\beta$ если $\beta \leq 0$ [1]. Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(l)}(t_0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^n D^{\alpha_k} A_k z(t) + B(t, D^{\gamma_1} z(t), \dots, D^{\gamma_r} z(t)), \quad t \in (t_0, T], \quad (2)$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$. Операторы A_1, A_2, \dots, A_n линейны, замкнуты и плотно определены в банаховом пространстве \mathcal{Z} , B – нелинейный оператор.

Сформулирована и доказана теорема о существовании единственного решения задачи (1), (2) на заданном отрезке $[t_0, T]$ при условии принадлежности классу $A_{G, n}^\alpha(\theta_0, a_0)$ набора операторов (A_1, A_2, \dots, A_n) [2].

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2708.2022.1.1).

Литература

1. Boyko K. V., Fedorov V. E. The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov–Caputo derivatives // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 6. Pp. 1057–1066.
2. Boyko K. V., Fedorov V. E. Degenerate multi-term equations with Gerasimov–Caputo derivatives in the sectorial case // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 24. P. 4699.

ОБЗОР СФЕР ПРИМЕНЕНИЯ ЦИФРОВОЙ СТЕГАНОГРАФИИ

Будко К. Л.^a, Маслова О. И.^b

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия

^a budkokira@hotmail.com, ^b oksmaslova@inbox.ru

В работе проведен обзор различных методов цифровой стеганографии, а также рассмотрены сферы ее применения. В частности, были изучены и проанализированы методы внедрения цифровых следов и цифровых водяных знаков для защиты авторского права, проверки подлинности документов, скрытого хранения и передачи данных [1, 2].

В рассмотренных методах в качестве образцов использовались контейнеры в виде изображений, т. к. в отличие от других видов контейнеров, форматы изображений позволяют встраивать сообщения на всем пространстве контейнера.

В результате проведенного обзора методов, предлагается объединение криптографических методов со стеганографическими, с целью повышения устойчивости стеганосообщения к его извлечению из контейнера или его замены другим стеганосообщением, осуществляемой третьими лицами.

Литература

1. Раткин Л. С. О некоторых аспектах применения стеганографии для защиты информационных систем // Вопросы защиты информации. 2006. Т. 75, № 4. С. 12–15.
2. Федосеев В. А. Цифровые водяные знаки и стеганография. Самара: Изд-во Самарского университета, 2019. 144 с.

ПОДХОДЫ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Булатов М. В.^a, Будникова О. С.^b

*Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
СО РАН, Иркутск, Россия; ^a mvbul@icc.ru, ^b osbud@mail.ru*

В докладе представлены результаты по исследованию на предмет существования единственного непрерывного решения, а также подходы к построению численных методов решения систем интегральных уравнений Вольтерра вида

$$A(t)x(t) + \int_0^t g(t, \tau)K(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq 1, \quad (1)$$

где $A(t)$, $K(t, \tau)$ – заданные $(n \times n)$ матрицы, $x(t)$ и $f(t)$ – искомая и заданная n -мерные вектор-функции, $g(t, \tau) = (t - \tau)^{-\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$.

Рассмотрим случай, когда

$$\det A(t) \equiv 0. \quad (2)$$

Системы (1) с условием (2) будем называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ) со слабой особенностью [1, 2].

В докладе подчеркнута специфика рассматриваемых задач, а именно их некорректность. В терминах матричных пучков сформулированы достаточные условия существования единственного решения ИАУ со слабой особенностью. Особое внимание в докладе уделено трудностям, возникающим при создании численных методов решения задачи (1), (2). Для выделенного класса задач приведены многошаговые методы, как для случая $\alpha = 0$, так и для случая когда $\alpha \in (0; 1)$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173, <https://rscf.ru/project/22-11-00173/>.

Литература

1. Brunner H., Bulatov M. V. On singular systems of integral equations with weakly singular kernels // Proceeding of the 11-th Baikal International School Seminar "Optimization Methods and their Applications". Irkutsk: ESI SB RAS, 1998. Pp. 64–67.
2. Булатов М. В., Будникова О. С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре k -шаговыми методами // Изв. Иркутского гос. университета. Серия Математика. 2015. Т. 13. С. 3–15.

Δ_B -ОПЕРАТОР КИПРИЯНОВА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЕ

Булатов Ю. Н.

*Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия
levnlya@mail.ru, y.bulatov@bk.ru*

Через \mathbb{R}_n будем обозначать евклидово пространство точек $x=(x_1, \dots, x_n)$, а через \mathbb{R}_n^+ — n -полупространство, определенное неравенствами $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Пусть $-\gamma = -(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ мультииндекс с отрицательными дробными параметрами $-1 < -\gamma_i < 0$. Δ_B -оператором Киприянова, следуя [2], будем называть сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in \mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i > 0\}. \quad (1)$$

Пусть $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n); x_i > 0\}$. Учитывая особенность операторов Бесселя, далее полагаем, что область Ω^+ прилегает к сингулярным координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$ оператора Δ_B . Тогда граница области Ω^+ состоит из двух частей $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma^o \in \mathbb{R}_n^+$.

Пусть u и v — n -четные функции, которые принадлежат классу функций $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$. Через $\omega = (\omega, \dots, \omega_n)$ обозначим n -мультииндекс,

состоящий из произвольных действительных чисел. Введем весовую линейную форму следующего вида:

$$(u, v)_\omega = \int_{\Omega_n^+} u(x) v(x) x^\omega dx, \quad x^\omega = \prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i}. \quad (2)$$

В рамках весовой линейной формы (2) сингулярный дифференциальный Δ_B -оператор Киприянова (1) может не совпадать со своим сопряжением, т.е. не является самосопряженным по Лангранжу (эрмитовым).

Дополнительно введем класс функций, соответствующим образом убывающих на границе Γ^o . Именно, обозначим через

$$\mathcal{M}_{ev}^\gamma = \mathcal{M}_{ev}^\gamma(\Omega^+) = C_{ev}^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$$

четных по Киприянову функций и положим

$$\varphi \in \mathcal{M}_{ev, \omega}^\gamma, \quad \text{если } x_i^{\omega_i} \varphi(x) = O(x_i), \quad x_i \rightarrow +0,$$

где i номер аргумента, соответствующий координате мультииндекса $\omega_i < -1$.

Введем обозначение

$$\sum_{i=1}^n \left[B_{\gamma_i+2\omega_i} + \frac{(\gamma_i + \omega_i)(\omega_i - 1)}{x_i^2} \right] = \Delta_{B_{\gamma+2\omega}} + \frac{(\gamma + \omega)(\gamma + \omega_o)}{x^2}, \quad (3)$$

где $\omega_o = (1, \dots, 1)$ и каждое слагаемое в левой части представляет собой сингулярный дифференциальный оператор, сопряженный оператору $B_{-\gamma_i}$.

Теорема. Пусть весовая линейная форма определена равенством (2) и пусть $i = \overline{1, n}$, $\gamma_i \in (0, 1)$ и ω_i - произвольные действительные числа. Тогда для всех функции $u(x) \in \mathcal{M}_{ev}^\gamma(\Omega^+)$ и $v(x) \in \mathcal{M}_{ev, \omega}^\gamma(\Omega^+)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & (\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega - \left(u, \left[\Delta_{B_{\gamma+2\omega}} + \frac{(\gamma + \omega)(\omega - 1)}{x^2} \right] v \right)_\omega = \\ & = \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - \sum_{i=1}^n u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma, \end{aligned}$$

где $\bar{\nu}$ направление внешней нормали к части границы Γ^+ , использовано обозначение (3).

Литература

1. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 199 с.
2. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 12. С. 1610–1620.

3. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рошупкин С. А., Санина Е. Л. Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 4. С. 483–493.
4. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Рошупкин С. А., Санина Е. Л. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 12. С. 1654–1665.

ИНТЕРКАЛЯЦИЯ МОЛЕКУЛ ФУЛЛЕРЕНА C_{60} МЕЖДУ ОДНОСЛОЙНЫМ ГРАФЕНОМ И МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКОЙ

Бухурова М. М.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; mareta.bukhurova@mail.ru*

В последнее время огромный интерес вызывает уникальные физико-химические свойства гибридных наноматериалов [1]. К типичным гибридным наноматериалам относятся структуры на основе графена и молекул фуллерена C_{60} [2, 3]. Такие наноматериалы считаются перспективными для электроники, катализа и различных биомедицинских технологий.

Процесс интеркаляции молекул фуллерена C_{60} под эпитаксиальный графен на подложках из металла и карбида металла экспериментально изучался в [4, 5]. Образование поверхностной гибридной наноструктуры представляет собой сложный физический процесс, в котором главную роль играют взаимодействия между графеном, подложкой и молекулами [4]. Помимо межатомных взаимодействий могут возникать деформации графена в виде локальных провисаний над пустотами, когда расстояние между соседними молекулами в интеркалированном слое достаточно велико (более 3,5 нм [4]). В [5] было обнаружено, что после образования под графеном одного слоя из молекул фуллерена процесс интеркаляции практически завершается. Имеются основания полагать, что в образующихся поверхностных структурах преобладают дисперсионные силы Ван-дер-Ваальса и силы обменного отталкивания, благодаря которым и возможны физическая адсорбция и интеркаляция молекул C_{60} .

Теоретические модели, учитывающие межатомные взаимодействия и пригодные для количественной интерпретации экспериментов типа [4, 5], до сих пор не строились. В работе рассматривается гибридный наноматериал в виде плотноупакованного слоя молекул фуллерена C_{60} , который зажат между однослойным графеном и толстой металлической подложкой. Проводится расчет равновесных параметров гибридной поверхностной наноструктуры. Применяется континуальное приближение, согласно которому удельная энергия наноструктуры вычисляется путем усреднения парного межатомного потенциала по поверхностям и объемам взаимодействующих компонентов. Применение данного приближения обосновывается тем, что молекулы C_{60} в интеркалированном слое

могут быть ориентированы случайным образом по имеющимся вращательным степеням свободы, т. е. происходит естественное усреднение взаимодействия.

Из проведенных расчетов следует, что интеркалированный слой молекул C_{60} находится ближе к металлической подложке, чем к графену приблизительно на 0.1 нм. Это объясняется более сильным межатомным взаимодействием со стороны подложки. Расчетное расстояние между подложкой и графеном равно 1.262 нм. Это значение согласуется с экспериментами из [4], согласно которым реальная толщина поверхностной структуры должна быть более 1 нм.

В [5] было показано, что максимальное количество фуллерена между графеном и массивной подложкой составляет один монослой. Здесь это объясняется наличием энергетического барьера, который препятствует росту толщины интеркалированного слоя. При интеркаляции одного слоя молекул формируется устойчивая структура, отвечающая минимуму свободной (в нашем случае потенциальной) энергии. Чтобы внедрить следующий слой молекул, требуется разрушить имеющееся квазиравновесное состояние. Энергия активации этого процесса по порядку величины сопоставима с энергией диссоциации поверхностной наноструктуры, т.е. оказывается достаточно высокой; термоактивация процесса будет приводить не к интеркаляции очередного слоя молекул, а к разрушению и/или графитизации углеродных компонентов.

Литература

1. *Поволоцкая А. В., Поволоцкий А. В., Маньшина А. А.* // Успехи химии. 2015. Т. 84, № 6. С. 579.
2. *Gaal N. R., Rutkov E. V., Tondegode A. Ya.* // Int. J. Mod. Phys. B. 1997. Vol. 11, no. 6. P. 1865.
3. *Chen M., Guan R., Yang Sh.* // Adv. Sci. 2019. Vol. 6, no. 1.
4. *Monazami E., Bignardi L., Rudolf P., Reinke P.* // Nano Letters. 2015. Vol. 15, no. 11.
5. *Рутьков Е. В., Галль Н. Р.* // ФТП. 2018. Т. 52, № 9.

МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, КАНОНИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ И ДИСКРЕТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ

Васильев В. Б.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия; vbv57@inbox.ru

Теория псевдодифференциальных операторов и соответствующий термин появились в середине 60-х годов прошлого столетия и сразу приобрела большую популярность. Во-первых, эта теория включала как теорию дифференциальных операторов, так и теорию интегральных операторов типа свертки, и уравнения с такими операторами. Во-вторых,

выяснилось, что такие операторы естественно возникают при обращении дифференциальных операторов, но, что самое важное, эти операторы появляются в различных задачах математической физики, в частности, в теории электромагнитных волн и квантовой механики.

В евклидовом пространстве и на гладком многообразии (без края) было построено символическое исчисление, которое позволяло, грубо говоря, сводить операторное уравнение к алгебраическому с допустимой погрешностью (с точностью до компактных операторов), и это позволяло описать условия фредгольмовости исходного операторного уравнения в терминах его символа. Кульминацией символического исчисления стала теорема Атьи–Зингера об индексе эллиптического оператора, которая выражала индекс оператора в топологических терминах.

Если же у многообразия присутствует край (даже гладкий), имеющиеся символические исчисления уже не работают, и приходится привлекать новый технический аппарат. Основой теории псевдодифференциальных операторов и уравнений в любой ситуации служит специальный локальный принцип, который утверждает, что для описания фредгольмовости исследуемого операторного уравнения следует описать условия обратимости его локальных представителей. Эти локальные представители представляют псевдодифференциальные операторы в евклидовом пространстве с символом, не зависящим от пространственной переменной в специальной «канонической» области. В случае многообразия без края, такой канонической областью служило все евклидово пространство, в случае многообразия с гладким краем возникало уже два типа канонических областей: все евклидово пространство и полупространство, которое локально представляло собой окрестность граничной точки. Детальное исследование случая полупространства было проведено в работах М. И. Вишика и Г. И. Эскина, где наряду с гармоническим анализом был использован аппарат классической краевой задачи Римана и одномерных сингулярных интегральных уравнений. Их исследования составили основу теории эллиптических краевых задач для псевдодифференциальных уравнений. Если же на границе присутствуют точки негладкости, то разрабатываются другие подходы [1, 2].

Несмотря на всю значимость проведенных исследований остается открытым вопрос о нахождении решений псевдодифференциальных уравнений и связанных с ними эллиптических краевых задач. Как правило, аналитическую формулу для решения получить не удастся, в связи с чем на первый план выходят приближенные методы решения, реализуемые с помощью компьютерных вычислений. В теории краевых задач для дифференциальных уравнений широкое распространение получили метод разностных схем и метод разностных потенциалов, в теории интегральных уравнений – метод коллокации, различные интерполяционные и проекционные методы и метод граничных интегральных уравнений. Однако для псевдодифференциальных уравнений отсутствуют соответ-

ствующие аналоги этих методов, которые в данной ситуации неприменимы.

С учетом этих обстоятельств была предпринята попытка создать дискретную теорию эллиптических псевдодифференциальных уравнений и соответствующих дискретных краевых задач, описать картину их разрешимости и показать, что дискретные краевые задачи могут иметь хорошие аппроксимационные свойства при подходящем выборе дискретных аппроксимаций. Первые исследования в этом направлении были проведены с многомерными сингулярными интегральными операторами Кальдерона–Зигмунда, где были получены результаты о разрешимости дискретных уравнений и дано сравнение дискретных и непрерывных решений. Эти исследования получили развитие в более широком контексте псевдодифференциальных уравнений, позволив описать условия разрешимости дискретных псевдодифференциальных уравнений и связанных с ними краевых задач в полупространстве для простейших эллиптических символов и дать сравнение дискретных и непрерывных решений [3].

Литература

1. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: URSS, 2010. 135 с.
2. *Васильев В. Б.* Модельные эллиптические краевые задачи для псевдодифференциальных уравнений в канонических негладких областях // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Т. 31. С. 22–37.
3. *Vasilyev V. B.* Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization: Integral methods in science and engineering. Vol. 1. New York: Springer, 2017. Pp. 315–324.

ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

Винокурский Д. Л.^a, Кононова Н. В.^b, Авдеева Т. И.

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия

^a dlvinokursky@gmail.com, ^b knv_fm@mail.ru

Данная работа посвящена разработке, анализу и экспериментальному применению методов диагностики неисправностей, отказоустойчивого управления и верификации контроллеров для обеспечения безопасности и надежности четырехроторных БПЛА. Во-первых, анализируются два сценария, связанные с неисправностями датчиков: когда все углы Эйлера могут быть измерены, и когда углы крена и тангажа не могут быть измерены и должны быть оценены. Кроме того, предлагаются два подхода к отказоустойчивому отслеживанию ориентации. В одном из них используется схема диагностики с алгоритмом локализации неисправности. Диагностическая информация используется для повышения

устойчивости к отказам исполнительных механизмов. Другой представляет собой адаптивный отказоустойчивый контроллер высоты и ориентации, который может управлять несколькими одновременными сбоями в работе исполнительных механизмов без диагностики. Кроме того, для верификации и проверки адаптивного отказоустойчивого контроллера представлена архитектура обеспечения времени выполнения. После этого алгоритмы были оценены с помощью тестовой среды для квадрокоптера, работающего в реальном времени в помещении, и результаты показали эффективность методов.

Литература

1. *Heredia G., Ollero A.* Sensor fault detection in small autonomous helicopters using observers Kalman filter identification // Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Mechatronics. 2009. Pp. 1–6.
2. *Lu P., Van Eykeren L., Van Kampen E. J., Chu Q.* Sensor fault detection and estimation for quadrotors using kinematic equations // Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control - Selected Papers of the Third CEAS Specialist Conference on Guidance, Navigation and Control. 2015. Pp. 363–379.

АДАПТИВНЫЙ ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫЙ КОНТРОЛЬ УПРАВЛЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

Винокурский Д. Л.^{1,a}, Кононова Н. В.^{1,b}, Авдеева Т. И.¹,
Эльканова Л. М.²

¹Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия

²Северо-Кавказская государственная академия, Черкесск, Россия

^a dlvinokursky@gmail.com , ^b knv_fm@mail.ru

Перспективной архитектурой, позволяющей теоретически использовать современные адаптивные контроллеры с высокими характеристиками производительности и при этом обеспечивать безопасность всей системы в реальном времени, являются системы обеспечения безопасности во время работы (Run-time assurance, RTA). Важным компонентом RTA является элемент онлайн-мониторинга, позволяющий на ранней стадии обнаружить программные сбои и потенциальные нарушения в работе адаптивного контроллера, что дает возможность оперативно задействовать полностью сертифицированный более простой базовый контроллер для поддержания безопасности системы или выполнения деградации.

Литература

1. *Berbra C., Gentil S., Lesecq S.* Identification of multiple faults in an inertial measurement unit // 7th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis. 2009.
2. *Macdonald J., Leishman R., Beard R., McLain T.* Analysis of an improved IMU-based observer for multirotor helicopters // Journal of Intelligent Robotic Systems. 2014. Vol. 74. Pp. 1049–1061.

ПРОСТРАНСТВА СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ НА ГРАФАХ

Вирченко Ю. П.

*Белгородский государственный технологический университет
им. В. Г. Шухова, Белгород, Россия; virch@bsu.edu.ru*

Изучаются пространства $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P} \rangle$ с положительной σ -аддитивной нормированной мерой \mathbb{P} , в которых Ω является множеством элементов X , которые представляют собой подмножества фиксированного счетного множества \mathfrak{L} и которые мы называем реализациями случайных подмножеств *пространства погружения* \mathfrak{L} . \mathfrak{B} является булевой σ -алгеброй элементов $\mathcal{F} \subset \Omega$, которые представляют собой классы реализаций $X \in \Omega$, с единицей Ω . Эта σ -алгебра является минимальной относительно некоторого порождающего ее семейства \mathfrak{S} классов $\mathcal{F} \subset \Omega$. Следствием σ -аддитивности меры \mathbb{P} является требование счетности семейства \mathfrak{S} . σ -алгебра \mathfrak{B} , порождаемая семейством \mathfrak{S} , вследствие его счетности, обладает мощностью $\text{Card}\mathfrak{B} = \aleph_1$. Поэтому возникает вопрос об измеримости классов \mathcal{F} реализаций из Ω .

Изучаются допустимые методы построения σ -алгебр \mathfrak{B} и мер \mathbb{P} на них при конструировании пространств $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P} \rangle$. При этом на σ -алгебры накладывается условие их инвариантности относительно действия любого автоморфизма пространства погружения \mathfrak{L} . Такие σ -алгебры конструируются следующим образом.

Пусть \mathcal{N} – класс всех конечных подмножеств $A \subset \mathfrak{L}$ и пусть семейство \mathfrak{S} состоит из всех $\mathcal{F}_A = \{X : A \subset X\}$, $A \in \mathcal{N}$. Построение меры в этом случае определяется мерами $\mathbb{P}\{X : A \subset X\}$, $A \in \mathcal{N}$. Так как семейство \mathcal{F}_A , $A \in \mathcal{N}$ не составляет булевого полукольца, то при построении меры проявляется зависимость от свойств пространства погружения \mathfrak{L} . Для такой системы \mathfrak{S} любая реализация $X \in \Omega$ порождает одноэлементный класс $\mathcal{F} = \{X\}$, который является элементом \mathfrak{B} .

На σ -алгебре \mathfrak{B} вводятся гиббсовские меры \mathbb{P} . Это осуществляется следующим образом. Для каждой расширяющейся последовательности $\langle \Lambda_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, $\Lambda_{j+1} \supset \Lambda_j$ такой, что $\Lambda_n \rightarrow \mathfrak{L}$, определяются меры для классов $\mathcal{F}_A^{(n)}$, составляющие последовательности $\langle \mathcal{F}_A^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$, где компоненты последовательностей представляются как $\mathcal{F}_A^{(n)} = \{X \cap \Lambda_n; X \in \mathcal{F}_A\} \rightarrow \mathcal{F}_A$, $n \in \mathbb{N}$. При каждом фиксированном значении $n \in \mathbb{N}$ вводятся меры $\mathbb{P}_n(X)$ для одноэлементных классов $\{X\}$, $X \subset \Lambda_n$, согласно формуле

$$\mathbb{P}_n(X) = Z_{\Lambda_n}^{-1} \exp(-H^{(n)}(X)),$$

где

$$Z_{\Lambda_n} = \sum_{Y \subset \Lambda_n} \exp(-H(Y))$$

и $H^{(n)}(X)$ – функционал на 2^{Λ_n} , определяемый формулой

$$H^{(n)}(X) = \sum_{x_1 \in X} \Phi^{(1)}(x_1) + \frac{1}{2} \sum_{\langle x_1, x_2 \rangle \in X^2} \Phi^{(2)}(x_1, x_2) + \dots$$

Функционалы $H^{(n)}(\cdot)$ называются гамильтонианами на \mathfrak{L} с потенциалами $\Phi^{(l)}(\cdot)$, $l \in \mathbb{N}$. Мера на σ -алгебре \mathfrak{B} определяется посредством предельного перехода

$$P(\mathcal{F}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\mathcal{F}_A^{(n)}).$$

Существование этого предела и его независимость от выбора последовательности $\langle \Lambda_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ существенно связано с заданием на \mathfrak{L} дополнительной математической структуры связности. Предполагается, что при введении структуры связности \mathfrak{L} является связным графом, на котором определено расстояние $\text{dist}(x, y) = \min\{|\gamma(x, y)|\}$, где $\gamma(x, y)$ – произвольный путь, соединяющий вершины x и y графа. Доказано следующее утверждение.

Теорема. В графе \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}$ для любой последовательности $\langle H^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ гамильтонианов, удовлетворяющей условию

$$\|\langle H^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1} \max\{|H^{(n)}(X)|; X \subset \Lambda_n\}, \quad \|\langle H^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle\| \neq 0$$

для некоторой монотонно возрастающей последовательности $\langle f_n > 0; n \in \mathbb{N} \rangle$ существуют пределы, если $\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^d, \|x\| \leq L\}$. Эти пределы не зависят от выбора последовательности гамильтонианов из всюду плотного множества первой категории Бэра в пространстве гамильтонианов.

Замечание. Следствием этой теоремы является то, что система интегральных уравнений типа Кирквуда–Зальцбурга имеет единственное решение на всей комплексной плоскости спектрального параметра, за исключением некоторого множества первой категории по Бэру.

Литература

1. Ruel D. Statistical mechanics. Rigorous results. New York: W.A. Benjamin, Inc., 1969. 368 p.
2. Gallavotti G., Miracle-Sole S. Statistical mechanics of lattice systems // Commun. Math. Phys. 1967. Vol. 5, no. 2. Pp. 317–323.
3. Virchenko Yu. P., Danilova L. P. Diagrammatic approach to gas-liquid phase transition in statistical theory // J. of Physics: Conf. Series. 2019. P. 1203

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ КРУПНОМАСШТАБНОГО ДИНАМО С ЭРЕДИТАРНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Водинчар Г. М., Фещенко Л. К.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, п. Паратунка, Россия; feshenko.lk@yandex.ru

В работе представлена разработка модели крупномасштабного 6-ячейкового геодинамо с эредитарной обратной связью для турбулентного генератора поля. Известно, что память может оказывать сильное

влияние на работу динамо-машины. Традиционным способом введения памяти в динамические модели является использование интегральных операторов.

Модель также включает стохастический член в механизме обратной связи, моделирующий влияние спонтанной синхронизации мелко-масштабных мод. Структура этого члена соответствует влиянию когерентных структур от мелко-масштабных мод магнитного поля и скорости. Влияние отбрасываемых мелко-масштабных мод моделируется случайным процессом. Структура этого процесса имитирует самопроизвольное образование и разрушение когерентных структур из мелко-масштабных мод.

Ранее была описана и исследована система собственных соленоидальных полей оператора Лапласа, которые можно использовать для разложения геомагнитного поля в ядре Земли [1].

Также разработано программное обеспечение для расчета уравнений самой модели и для численного моделирования. Для численного исследования модели была специально разработана разностная схема, реализованная в коде C++. Проверка кода и схемы проводилась на частном случае модели с априорно известной динамикой. Было проведено несколько симуляций временной эволюции модели.

Проведена серия вычислительных экспериментов с целью выявления влияния эргодичности в модели на динамические режимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 22-11-00064).

Литература

1. Водичар Г. М., Крутьева Л. К. Базисные системы для геомагнитного поля // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010. Т. 1(1). С. 24–30.

ЗАДАЧА НАЙМАРКА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Гадзова Л. Х.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; tasaneeva@mail.ru*

В области $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad (1)$$

$n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\partial_{0x}^{\alpha} u(x)$ – производная Герасимова–Капуто [1. с. 11], [2], [3].

В работе для обыкновенного дифференциального уравнения (1) исследуется обобщенная краевая задача (по терминологии Наймарка М. А.) [4, с. 16]. Краевые условия задаются в форме линейных функционалов. Это позволяет охватить достаточно широкий класс линейных локальных и нелокальных условий.

Получено необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи. В терминах специальных функций найдено представление решения исследуемой задачи. Доказана теорема существования и единственности решения.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Килбас А. А.* Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка (курс лекций). Методологическая школа-конференция «Математическая физика и нанотехнологии». Самара, 2009. 121 с.
3. *Новоженова О. Г.* Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных. М.: Перо, 2018. 235 с.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ

**Ганьшин К. Ю.^a, Новикова Е. Н.^b, Свидницкий А. Д.^c,
Потапов И. Р.^d, Будко К. Л.^e**

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия

^amagnuskos@gmail.com, ^bnovikovaelena_nik@mail.ru, ^cadsvidnitckii@ncfu.ru,

^dpotapov.potapov-ivan2016@yandex.ru, ^ebudkokira@hotmail.com

Большинство авиационных систем имеют 6 степеней свободы, изменяющихся в динамике при различных параметрах. Хорошим примером таких систем являются квадрокоптеры. Они, как правило, аэродинамически неустойчивы, имеют необтекаемую форму, а их исполнительные механизмы относительно медленны [1, 2]. В процессе полета происходит изменение таких параметров, как скорость и расстояние до цели. Для поддержания устойчивости квадрокоптера при возмущениях и отслеживания им некоторых характеристик в данной работе используются контроллеры автопилота. Обычно используются линейные регуляторы с подходом «замороженного времени», при котором траектория разбивается на несколько частей с фиксированной динамикой между ними. Этот метод обеспечивает определенную эффективность в расчетных точках, он гарантирует устойчивости при переходных процессах.

Литература

1. *Zhou L., Xu S., Jin H., Jian H.* A hybrid robust adaptive control for a quadrotor UAV via mass observer and robust controller // *Advances in Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 13, no. 3. Pp. 16878140211002723.
2. *Wu Y., Xie Y., Li S.* Parameter adaptive control for a quadrotor with a suspended unknown payload under external disturbance // *IEEE Access*. 2021. Vol. 9, Pp. 139958–139967.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ ПОВЫШЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ
ЗЕМНОЙ КОРЫ ПЕРЕД СИЛЬНЫМИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯМИ
НА КАМЧАТКЕ, ПРОИЗОШЕДШИМИ В ПЕРИОД
С 2020 ПО 2023 ГОД**

Гапеев М. И.

*Институт космофизических исследований и распространения радиоволн
ДВО РАН, Паратунка, Россия; gapeev.sci@yandex.ru*

Принято считать, что при подготовке сейсмических событий ведущую роль играют механические процессы. Они обуславливают появление повышенных напряжений, приводящих к деформациям земной коры вокруг очага землетрясения. Эти изменения напряженно-деформированного состояния пород прямо или опосредовано приводят к возникновению аномалий в различных геофизических полях: акустической эмиссии [1], электромагнитном излучении [2], геомагнитном поле [3], ионосфере [4]. Такие аномалии классифицируются как предвестники землетрясений и наблюдаются во многих сейсмоактивных регионах планеты, в том числе и на Камчатке.

Чтобы рассматривать вариации геофизических полей как предсейсмические аномалии, необходимо установить их связь с характером деформационного процесса в сейсмоактивном регионе. С этой целью в настоящей работе предложена модель формирования областей повышенных деформаций, возникающих при подготовке землетрясений. В основе модели лежит система дифференциальных уравнений Навье. Источник напряжений полагается распределенным по гладкой поверхности, расположенной внутри полупространства. Для решения краевой задачи использованы функции Грина, полученные Миндлингом, и теория дислокаций Вольтерра. В модели учтена полная упругая потенциальная энергия среды, накопленная при подготовке землетрясения. Приведены результаты численного моделирования областей повышенных деформаций, возникающих при подготовке камчатских землетрясений в период с 2020 по 2023 годы.

Исследование выполнено в рамках гранта РНФ № 22-11-00064 по теме «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности».

Литература

1. *Gregori G. P., Poscolieri M., Paparo G., et al.* “Storms of crustal stress” and AE earthquake precursors // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2010. no. 10. Pp. 319–337.
2. *Uyeda S., Nagao T., Kamogawa M.* Short-term earthquake prediction: Current status of seismo-electromagnetics // *Tectonophysics*. 2009. Vol. 470, no. 3–4. Pp. 205–213.
3. *Chen C.-H., Liu J.-Y., Lin P. Y. et al.* Pre-seismic geomagnetic anomaly and earthquake location // *Tectonophysics*. 2010. Vol. 489, no. 1–4. Pp. 240–247.

4. *Rulenko O. P., Marapulets Y. V., Kuz'min Y. D. et al. Joint perturbation in geoaoustic emission, radon, thoron, and atmospheric electric field based on observations in Kamchatka. 2019. no. 5. Pp. 76–78.*

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО
УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ
НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ**

Геккиева С. Х.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
Нальчик, Россия; gekkieva_s@mail.ru*

Параболические уравнения с меняющимся направлением времени описывают значительное количество задач, возникающих в математической физике. В настоящее время интерес к этой тематике не ослабевает в связи с многочисленными приложениями. Так, например, такие уравнения возникают при математическом моделировании динамики микрометеорологического режима при орошении [1], а также в гидродинамике при изучении движения жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости.

Первыми работами, посвященными параболическим уравнениям с меняющимся направлением эволюции, были работы М. Жевре [2]. Теория разрешимости краевых задач для уравнений такого вида построена в работах С. D. Pagani [3], И. Е. Егорова [4], А. А. Керефова [5], А. М. Нахушева [6], С. В. Попова [7], С. А. Терсенова [8] и других авторов.

Задача Жевре для нагруженного уравнения дробного порядка с оператором Римана–Лиувилля рассмотрена в работе [9], в которой, используя общее представление решения диффузионно-волнового уравнения [10], вопрос разрешимости задачи редуцируется к вопросу разрешимости обобщенного уравнения Абеля в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера.

В настоящей работе исследуется аналог задачи Жевре для нагруженного уравнения с дробной производной Капуто с прямым и обратным ходом времени.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) + \lambda u(0, t) = \begin{cases} \partial_{0y}^{\alpha} u(x, y), & x > 0, \\ \partial_{hy}^{\alpha} u(x, y), & x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\lambda = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$, ∂_{st}^{ν} — оператор дробного дифференцирования Капуто порядка ν [11].

Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup A_0B_0$, где $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < y < h\}$, $\Omega^- = \{(x, y) : -\infty < x < 0, 0 < y < h\}$, $A_0B_0 = \{(0, y) : 0 < y < h\}$.

Задача G. *Найти функцию $u(x, y)$:*

$$u(x, y) = \begin{cases} u^+(x, y), & x \in \Omega^+, \\ u^-(x, y), & x \in \Omega^-, \end{cases}$$

удовлетворяющую уравнению (1) в областях Ω^+ , Ω^- , начальным условиями

$$\begin{aligned} u^+(x, 0) &= \varphi_1(x), & 0 < x < \infty, \\ u^-(x, h) &= \varphi_2(x), & -\infty < x < 0, \end{aligned}$$

и условиям сопряжения

$$u^+(0, y) = u^-(0, y), \quad u_x^+(0, y) = u_x^-(0, y), \quad 0 < y < h.$$

Здесь $y^{1-\alpha}u$, u_{xx} , $u_y \in C(\Omega)$; функции $u(x, y)$, $u_x(x, y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ограничены для $y > 0$; $\varphi_1(x) \in C[0, \infty)$, $\varphi_2(x) \in C(-\infty, 0]$ — заданные функции.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

$y^{1-\alpha}u(x, y)$, u_{xx} , $u_y \in C(\Omega_2)$;

$u(x, y)$, $u_x(x, y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ограничены для $y > 0$;

$\varphi_1(x) \in C[0, \infty)$, $\varphi_2(x) \in C(-\infty, 0]$ — заданные функции.

Тогда задача G имеет единственное решение в классе весовых функций Гельдера $h_0^\lambda(\rho)$, где $\rho(y) = y^{\beta-1}(h-y)^{\beta-1}$, $\beta = 1/\alpha$.

Литература

1. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.
2. Gevrey M. Sur les equations aux derives partielles du type parabolique // J. Math. App. 1913. Т. 9, sec. 6. P. 305–475.
3. Ragani C. D. On the parabolic equation and a related one // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1974. Т. 99, № 4. P. 333–399.
4. Егоров И. Е. Краевые задачи для уравнений высокого порядка и с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, № 6. С. 1301–1304.
5. Керешов А. А. Задача Жевре для одного смешанно-параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1977. Т. XIII, № 1. С. 76–83.
6. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
7. Попов С. В. О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1991. № 102. С. 100–113.
8. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 301 с.
9. Gekkieva S. Kh. Gevrey problem for a loaded mixed parabolic equation with a fractional derivative // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 250, no. 5. P. 746–752.
10. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
11. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

**МЕТОД ПРЯМЫХ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

Геккиева С. Х.¹, Керемов Б. М.²

¹ *Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия;*

² *Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия;*

¹*gekkieva_s@mail.ru,* ²*kerefov-1997@mail.ru*

В области $Q_T = (0, l) \times (0, T]$ рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения диффузии с дробной по времени производной

$$D_{0t}^\alpha u = (k(x, t) u_x)_x + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [0, l], \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3)$$

где D_{ax}^ν – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля порядка ν [1], $k(x, t) \geq c > 0$.

Для решения задачи (1)–(3) применим метод прямых [2]. Получим решение в виде системы функций, приближенно представляющих искомого решение вдоль прямых $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$. Для этого разобьем отрезок $[0, l]$ точками $x_i = ih$ с шагом $h = l/N$ и заменим производные по переменной x на разностные производные. Будем иметь:

$$(k(x, t) u_x)_x \sim (a(x, t) u_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right),$$

$$D_{0t}^\alpha u_{xx} \sim D_{0t}^\alpha u_{\bar{x}x} = \frac{1}{h^2} D_{0t}^\alpha (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}),$$

$$k(x, t) \sim a(x_i, t) = k(x_i - 0.5h, t) = k_{i-\frac{1}{2}}(t).$$

Тогда для сеточной по переменной x функции $y(x_i, t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений метода прямых, которая дает аппроксимацию уравнения (1) с точностью порядка h^2 :

$$D_{0t}^\alpha y(t) = (ay_{\bar{x}})_x + \varphi(x_i, t) \quad (4)$$

с начально-краевыми условиями

$$\begin{aligned} y_0(t) = 0, \quad y_N(t) - y_{-N}(t) = 0, \quad t \geq 0, \\ D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\varphi(x_i, t) = f(x_i, t) + O(h^2), \quad a_i \geq c > 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$y(t) = y_i(t) = y(x_i, t),$$

$$(ay_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1}(t) - y_i(t)}{h} - a_i \frac{y_i(t) - y_{i-1}(t)}{h} \right].$$

Теорема. Если $k_i(x, t)$, $f(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, $u_0(x) \in C[0, l]$, $k \geq c > 0$, $k_t \leq 0$ всюду в \bar{Q}_T , то для решения системы уравнений (4) метода прямых с начально-краевыми условиями (5) справедлива априорная оценка

$$\|Y(x_i, t)\|_{W_2^1(0, l)} \leq M(t) \left(\int_0^t \|\varphi\|_0^2 d\tau + \|u_0(x_i)\|_0^2 \right), \quad (6)$$

где

$$\|Y\|_{W_2^1(0, l)} = \|Y\|_0^2 + \|Y_{\bar{x}}\|_0^2, \quad \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 = \sqrt{(Y_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}})},$$

$$Y(x_i, t) = D_{0t}^{\alpha-1} y_i = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{y(x_i, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}.$$

Замечание. Из неравенства (6) следует единственность решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка (4) со скоростью $O(h^2)$ в сеточной норме пространства W_2^1 .

Получено решение системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающих при использовании метода прямых.

На тестовых примерах проведены численные эксперименты, подтверждающие теоретические результаты, полученные в работе.

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003. 272 с.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1962. 640 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО РЕЧНОГО ПРОФИЛЯ ПРИ БЕРЕГОВОЙ ЭРОЗИИ

Георгиева М. А.^{1,а}, Аджиева А. А.², Шаповалов В. А.¹

¹ Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,

² Кабардино-Балкарский государственный аграрный университет им. В. М. Кокова, Нальчик, Россия; ^а maryana.g@list.ru

Береговая эрозия представляет собой сложный физический процесс, который оказывает серьезное воздействие на речные экосистемы и прибрежные территории. Это выражается в существенных изменениях ландшафта которые имеют долгосрочные последствия для окружающей среды и человеческой деятельности. Понимание этого процесса и его математическое моделирование играют важную роль в устойчивом управлении прибрежной инфраструктурой и речными бассейнами в целом [1-3].

В работе рассматривается численная модель, основанная на уравнениях гидродинамики и процессах береговой эрозии, позволяющая исследовать изменение поперечных речных профилей во времени. Модель также включает параметры, описывающие процессы береговой эрозии с помощью методов численного анализа устойчивости береговых склонов.

Разработанная модель позволяет на основе численных экспериментов исследовать влияние различных параметров, таких как скорость эрозии и климатические факторы, на эволюцию речных профилей.

Полученные результаты подчеркивают важность математического моделирования для понимания и управления такими процессами, с целью стабилизации развития речных профилей при береговой эрозии. Дальнейшие исследования могут включать учет более сложных процессов, таких как влияние неоднородностей материала и особенностей склонов, например, за счет растительности и проведение междисциплинарных исследований для более полного понимания этого важного явления в контексте управления водными ресурсами, охраны окружающей среды и разработки инфраструктурных проектов.

Литература

1. *Бондаренко Б. В., Потапов И. И.* Математическое моделирование эволюции берегового склона в каналах с песчаным руслом // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 4. С. 26–35.
2. *Nistoran D. G., Ionescu C., Pătru G., Armaş I., Omrani Ş. G.* One dimensional sediment transport model to assess channel changes along Oltenița-Călărași reach of Danube River, Romania // Energy Procedia. 2017. Vol. 112. Pp. 67–74.
3. *Rinaldi M., Mengoni B., Luppi L., Darby S. E., Mosselman E.* Numerical simulation of hydrodynamics and bank erosion in a river bend // Water Resour. Res. 2008. Vol. 44, no. W09428. Pp. 1–17.

О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Гилев А. В.

Самарский университет, Самара, Россия; toshqaaa@gmail.com

В работе рассматривается вопрос о разрешимости двух нелокальных задач для обобщенного уравнения Буссинеска–Лява

$$u_{yy}(x, y) - (a(x, y)u_x(x, y))_x - (b(x, y)u_{xy}(x, y))_x + c(x, y)u(x, y) = f(x, y). \quad (1)$$

Полагая $b \neq 0$ в (1), а также, не ограничивая общности, что $b = \text{const}$, уравнение (1) можно свести к следующему виду

$$u_{xxyy} + (Au_x)_x + (Bu_y)_y + Cu = F, \quad (2)$$

где A, B, C, F – некоторые функции, получившиеся в следствие элементарных преобразований уравнения (1).

Отметим, что множество трудов посвящено исследованию разрешимости задач для уравнения Буссинеска–Лява, как начально-краевых, так и нелокальных [1], [2]. Более того, учитывая тот факт, что $b \neq 0$ всюду в области поиска решения, рассматриваемое уравнение можно интерпретировать как уравнение с доминирующей смешанной производной. Для подобных уравнений естественно ставить задачи с данными на характеристиках, чему посвящены работы [3], [4].

Для нашего уравнения (2) поставим следующие две задачи

Задача I. В области $\Omega = (0, \alpha) \times (0, \beta)$ найти решение уравнения (2), удовлетворяющее следующим условиям

$$u_x(0, y) = h(y), \quad u_y(x, 0) = r(x), \quad (3)$$

$$u(x, 0) + \int_0^x K(\xi)u(\xi, 0)d\xi = \varphi(x), \quad u(0, y) + \int_0^y L(\eta)u(0, \eta)d\eta = \psi(y). \quad (4)$$

Задача II. В области Ω найти решение того же уравнения (2), но удовлетворяющее условиям (3) предыдущей задачи, а также следующим нелокальным условиям

$$u(x, 0) + \int_0^\beta K(x, y)u(x, y)dy = \Phi(x),$$

$$u(0, y) + \int_0^\alpha L(x, y)u(x, y)dx = \Psi(y). \quad (5)$$

Для доказательства разрешимости (2)–(4) и (2)–(3), (5), каждая из поставленных задач для уравнения четвертого порядка сводится к двум задачам, но более низкого порядка. Одна из получившихся задач является классической задачей Гурса, вторую же можно интерпретировать как интегральный аналог задачи Гурса для нагруженного уравнения.

В ходе исследования были сформулированы и доказаны теоремы, гарантирующие, при выполнении соответствующих условий, существование и единственность решения каждой из поставленных задач.

Литература

1. *Pulkina L. S.* Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations // Electron. J. Differ. Equ. 2014. Vol. 2014, no. 116.
2. *Beylin A. B., Pulkina L. S.* Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // Electron. J. Differ. Equ. 2019. Vol. 2019, no. 29.
3. *Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А.* Уравнения с доминирующей частной производной. Казань: Из-во Казанского университета, 2014. 385 с.
4. *Жегалов В. И.* Об одной задаче для обобщенного уравнения Буссинеска–Лява // Вестн. СамГТУ. Сер. физ.-мат. 2019. Т. 23, № 4. С. 771–776.

**ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Годова А. Д.^а, Федоров В. Е.^б

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

^аalexandra_godova@mail.ru, ^бkar@csu.ru

Исследуются интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с операторами, представляющими собой композицию операторов свертки и дифференцирования. Частным случаем рассматриваемых операторов является дробная производная Герасимова–Капуто. Доказана теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для вырожденного интегро-дифференциального уравнения [1]. Представлено приложение абстрактных результатов к начально-краевым задачам.

Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} – банаховы пространства, $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ – вырожденный линейный ограниченный оператор, $M : D_M \rightarrow \mathcal{Y}$ – линейный замкнутый оператор с плотной в \mathcal{X} областью определения D_M .

Введем обозначение L – резольвентного множества оператора M : $\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})\}$. Если $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > a\} \subset \subset \rho^L(M)$, то существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r} R_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r} L_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}).$$

Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \operatorname{im} Q$, $L_k := L|_{\mathcal{X}^k}$, $M_k := M|_{\mathcal{X}^k \cap D_M}$, $L_k, M_k : \mathcal{X}^k \rightarrow \mathcal{Y}^k$, $k = 0, 1$. При этом существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$, обозначим $G := M_0^{-1} L_0$. Оператор M называется (L, p) – ограниченным при условии $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$ для некоторого $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Определим интегро-дифференциальный оператор типа Герасимова $(D^{K,m}x)(t) := \int_0^t K(t-s)x^{(m)}(s)ds$, где D^m – производная порядка m .

Рассмотрим начальную задачу

$$(Px)^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

для вырожденного интегро-дифференциального уравнения типа Герасимова

$$LD^{K,m}x(t) = Mx(t) + g(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где $g \in C([0, T]; \mathcal{Y})$.

Теорема [1]. Пусть оператор M (L, p) -ограничен, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$, существует преобразование Лапласа \widehat{K} , которое является однозначной аналитической функцией в $\Omega_{R_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > R_0, |\arg \mu| < \pi\}$ при некотором $R_0 > 0$ и удовлетворяет условию $\|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} > d|\lambda|^{x-1}$ на Ω_{R_0} при

некоторых $\chi, c > 0$; при этом для всех $\lambda \in \Omega_{R_0}$ существует $\widehat{K}(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $g \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, при $l = 0, 1, \dots, p$ $D^{K,m}(D^{K,m}G)^l M_0^{-1}(I - Q)g \in C([0, T]; \mathcal{X})$, $(D^{K,m}G)^l M_0^{-1}(I - Q)g$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), при этом оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} V_k(t)x_k + \int_0^t U_{m-1}(t-s)L_1^{-1}Qg(s)ds - \sum_{l=0}^p (D^{K,m}G)^l M_0^{-1}(I - Q)g(t),$$

где

$$V_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - L_1^{-1}M_1)^{-1} \widehat{K}(\lambda) \lambda^{m-1-k} e^{\lambda t} d\lambda, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$U_{m-1}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - L_1^{-1}M_1)^{-1} \lambda^{m-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad R > R_0,$$

$\gamma := \gamma_R \cup \gamma_{R,+} \cup \gamma_{R,-}$ – положительно ориентированный контур, $\gamma_R := \{Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi, \pi)\}$, $\gamma_{R,+} := \{re^{i\pi} : r \in [R, \infty)\}$, $\gamma_{R,-} := \{re^{-i\pi} : r \in [R, \infty)\}$, $R > R_0$, $t > 0$.

Пример. Помимо очевидного примера функции $K(s) = Is^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, при которой получаем дробную производную Герасимова–Капуто D^α , рассмотрим более сложный пример. Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, $m_{ij} - 1 < \alpha_{ij} < m_{ij} \in \mathbb{N}$, $i, j = 1, 2$, $m := \max_{i,j=1,2} m_{ij}$,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad K(s) := \begin{pmatrix} b_{11} \frac{s^{m-\alpha_{11}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{11})} & b_{12} \frac{s^{m-\alpha_{12}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{12})} \\ b_{21} \frac{s^{m-\alpha_{21}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{21})} & b_{22} \frac{s^{m-\alpha_{22}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{22})} \end{pmatrix}$$

тогда

$$D^{K,m} = \begin{pmatrix} b_{11}D^{\alpha_{11}} & b_{12}D^{\alpha_{12}} \\ b_{21}D^{\alpha_{21}} & b_{22}D^{\alpha_{22}} \end{pmatrix}$$

и абстрактное уравнение (2) имеет вид системы уравнений

$$\begin{aligned} b_{11}D^{\alpha_{11}}x_1(t) + b_{12}D^{\alpha_{12}}x_2(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ b_{21}D^{\alpha_{21}}x_1(t) + b_{22}D^{\alpha_{22}}x_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t). \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\widehat{K}(\lambda) := \begin{pmatrix} b_{11}\lambda^{\alpha_{11}-m} & b_{12}\lambda^{\alpha_{12}-m} \\ b_{21}\lambda^{\alpha_{21}-m} & b_{22}\lambda^{\alpha_{22}-m} \end{pmatrix},$$

поэтому условие $\|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} > c|\lambda|^{\chi-1}$ на Ω_{R_0} выполняется при некотором $\chi \in (0, \alpha + 1 - m)$, $c > 0$.

Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

Литература

1. Fedorov V. E., Godova A. D., Kien B. T. Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2022. Vol. 106, no. 2. Pp. 93–107.

ЦИКЛЫ В МОДЕЛИ МОЛЕКУЛЯРНОГО РЕПРЕССИЛЯТОРА

Голубятников В. П.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
golubyatn@yandex.ru

В докладе построены два имеющих различную природу примера неединственности циклов у трёхмерных динамических систем, моделирующих функционирование простейшего молекулярного репрессиллятора. Такие системы имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = L_1(z) - k_1x; \quad \frac{dy}{dt} = L_2(x) - k_2y; \quad \frac{dz}{dt} = L_3(y) - k_3z. \quad (1)$$

Здесь функции L_j , $j = 1, 2, 3$, монотонно убывают, что означает отрицательность регуляторных связей между последовательными компонентами этой кольцевой геной сети. Неотрицательные переменные $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ обозначают концентрации этих компонент, положительные коэффициенты k_j пропорциональны скоростям их распада, см. [1, 2].

Нечётномерные системы такого типа имеют в точности по одной стационарной точке, см. [3]. Вопросы существования, единственности, устойчивости и локализации периодических решений (циклов) у подобных динамических систем различных размерностей с гладкими и ступенчатыми правыми частями рассматривались во многих публикациях – и в математических, и в биологических.

Пример 1. Рассмотрим случай $k_1 = k_2 = k_3 = 2$;

$$L_1(z) = 72 \text{ при } 0 \leq z \leq 11; \quad L_1(z) = 94 - 2z; \text{ при } 11 \leq z \leq 47;$$

$$L_2(x) = 84 \text{ при } 0 \leq x \leq 9; \quad L_2(x) = 120 - 4x \text{ при } 9 \leq x \leq 30; \quad (2)$$

$$L_3(y) = 192 \text{ при } 0 \leq y \leq 5; \quad L_3(y) = 232 - 8y \text{ при } 5 \leq y \leq 29.$$

Здесь мы полагаем, что $L_1(z) = 0$ при $47 \leq z$, $L_2(x) = 0$ при $30 \leq x$, $L_3(y) = 0$ при $29 \leq y$.

Система (1), (2) имеет бесконечное однопараметрическое семейство циклов в области $\{9 \leq x \leq 30; 5 \leq y \leq 29; 11 \leq z \leq 47\}$. Все эти циклы и её стационарная точка, имеющая координаты $x_0 = 19$, $y_0 = 22$, $z_0 = 28$, лежат в пересечении плоскости $2x + 2y + z - 110 = 0$ и параллелепипеда $\{9 \leq x \leq 30; 5 \leq y \leq 29; 11 \leq z \leq 47\}$.

Пример 2. Пусть у системы (1) $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ и $L_1 = L_2 = L_3 = L$, где

$$L(w) = 2a \text{ при } 0 \leq w < a - \varepsilon; \quad L(w) = a + \varepsilon \text{ при } a - \varepsilon \leq w < a;$$

$$L(w) = a - \varepsilon \text{ при } a \leq w < a + \varepsilon; \quad L(w) = 0 \text{ при } a + \varepsilon \leq w < \infty. \quad (3)$$

Обозначим через Q_1 внутренность куба $\{a - \varepsilon < x, y, z < a + \varepsilon\}$ и через Q_2 внутренность невыпуклого объединения шести блоков $[a + \varepsilon \leq x \leq 2a] \times [0 \leq y \leq 2a] \times [0 \leq z \leq a - \varepsilon]$, $[a + \varepsilon; 2a] \times [0; a - \varepsilon] \times [0; 2a]$, $[0; 2a] \times [0; a - \varepsilon] \times [a + \varepsilon; 2a]$, $[0; 2a] \times [a + \varepsilon; 2a] \times [0; a - \varepsilon]$, $[0; a - \varepsilon] \times [0; 2a] \times [a + \varepsilon; 2a]$ и также $[0; a - \varepsilon] \times [a + \varepsilon; 2a] \times [0; a - \varepsilon]$.

Теорема. Если $a > 1$ и $10\varepsilon < a$, то система (1), (3) имеет по крайней мере два цикла: $C_1 \subset Q_1$ и $C_2 \subset Q_2$.

Из [4] следует, что цикл C_1 устойчив, и что других циклов область Q_1 не содержит.

Работа поддержана РФФ, проект 23-21-00019.

Литература

1. Glass L., Pasternack J. S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // Journal of Mathematical Biology. 1978. Vol. 6. Pp. 207–223.
2. Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Садовничий В. А. Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых генных сетях // Изв. РАН. Сер. Матем. 2016. Т. 80, № 3. С. 67–94.
3. Likhoshvai V. A., Golubyatnikov V. P., Khlebodarova T. M. Limit cycles in models of circular gene networks regulated by negative feedback loops // BMC Bioinformatics. 2020. Vol. 21, no. 11. Pp. 1–15.
4. Голубятников В. П., Иванов В. В. Единственность и устойчивость цикла в трёхмерных блочно-линейных моделях кольцевых генных сетей // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2018. Т. 18, № 4. С. 19–28.

ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ В-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Грязнева Е. А.^{1,a}, Киселев И. С.^{2,b}

¹ Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

² Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина, Елец, Россия

^a gryazneva_ea@mail.ru, ^b ilia@kiselev48.ru

Рассматривается евклидово n -полупространство

$$\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_i > 0\}, \quad \overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : x_i \geq 0\}.$$

В конечной области $\Omega^+ \subset \overline{\mathbb{R}_n^+}$, прилегающей к координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, рассматривается линейная весовая интегральная форма

$$(u, v)_\gamma = \int_{\Omega^+} u(x) v(x) x^\gamma dx, \quad x^\gamma dx = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dx_i, \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \gamma_i > -1.$$

Граница области $\partial\Omega^+ = \Gamma^+ \cup \Gamma^0$, где $\Gamma^+ \subset \overline{\mathbb{R}_n^+}$, а граница Γ^0 состоит из соответствующих частей координатных гиперплоскостей $x_i = 0$. Натуральная степень оператора

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\gamma_i > -1) \quad (1)$$

называется В-полигармоническим оператором порядка $m \geq 1$.

Через $C_{ev}^m(\Omega^+)$ будем обозначать класс m раз непрерывно дифференцируемых в частично замкнутой области $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ функций, четных по Киприянову (см. [1], с. 21).

Теорема. Пусть функции $u, v \in C_{ev}^{2m}$ и $\bar{\nu}$ – вектор внешней нормали к части границы Γ^+ области Ω^+ и пусть Δ_B сингулярный дифференциальный оператор (1). Тогда имеет место следующая формула Грина

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} [\Delta_B^m u(x) v(x) - u(x) \Delta_B^m v(x)] x^\gamma dx = \\ & = \int_{\Gamma^+} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial \Delta_B^{m-k-1} u}{\partial \nu} \Delta_B^k v - \Delta_B^{m-k-1} u \frac{\partial \Delta_B^k v}{\partial \nu} \right] x^\gamma d\Gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

Отметим, что в этой теореме рассматриваются четные функции по каждой координате x_i аргумента функций u, v даже при $\gamma_i = 0$. Это приводит к несовпадению формулы (2) с классической второй формулой Грина (XII.1.8) из книги С. Л. Соболева (см. [2], с. 515) и с соответствующими формулами из работы (см. [3], с. 194). Доказательство в случае, когда $\gamma_i \geq 0$ достигается применением формулы Грина интегрирования по частям. В случае $-1 < \gamma_i < 0$ необходима

Лемма. Если $u \in C_{ev}^\infty$, то для любой производной нечетного порядка по координате x_i аргумента этой функции справедливо соотношение

$$\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x_i^{2k+1}} = O(x_i), \quad x_i \rightarrow 0.$$

Еще отметим, в частном случае, когда координаты мультииндекса равны нулю $\gamma_i = 0, \quad i = \overline{1, n}$ формула (2) представляет собой формулу Грина для полигармонического оператора для четных функций u и v . Для Δ_B оператора Киприянова (введен в работе [4]) эта формула будет применена в дальнейшем для изучения решений В-полигармонического уравнения в областях прилегающих к сингулярной части границы Γ^0 .

Литература

1. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 199 с.
2. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
3. Karachik V. V. The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 269, no. 2. Pp. 189–204.
4. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 12. С. 1610–1620.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Джамалов С. З.^а, Сипатдинова Б. К.^б

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан; ^а siroj63@mail.ru, ^б sbiybinaz@mail.ru,

Как известно, в работе А. В. Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работах А. В. Бицадзе и Ф. И. Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [1, 2]. Как близкие по постановке к изучаемой, задачи для уравнения смешанного типа второго рода исследованы в ограниченных областях в работах [1, 4].

В данной работе с использованием результатов работ [4], изучается однозначная разрешимость обобщенного решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде. В области

$$G = (0, 1) \times (0, T) \times \mathbb{R} = Q \times \mathbb{R} = \{(x, t, z); x \in (0, 1), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\}$$

рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t, z), \quad (1)$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ – оператор Лапласа. Пусть $k(0) \leq 0 \leq k(T)$.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода,

так как на знак функции $k(t)$ по переменной t внутри интервала $[0, T]$ не налагается никаких ограничений [3].

Пусть все коэффициенты уравнения (1) – достаточно гладкие функции в области Q , а именно $k(t) \in C^1[0, T]$, $a(x, t), c(x, t) \in C^1(\bar{Q}) \cap C(\bar{Q})$.

Обозначим через

$$\hat{u}(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t, z) e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной z функции $u(x, t, z)$, а через

$$u(x, t, z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x, t, \lambda) e^{i\lambda z} d\lambda$$

– обратное преобразование Фурье. Теперь с помощью преобразования Фурье определим пространство $W_2^{l,s}(G)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^{l,s}(G)}^2 = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x, t, \lambda)\|_{W_2^l(Q)}^2 d\lambda, \quad (A)$$

где s, l – любые конечные положительные целые числа, а норма в пространстве Соболева $W_2^l(Q)$ (при $l = 0, W_2^0(Q) = L_2(Q)$) определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|_l^2 = \|\vartheta\|_{W_2^l(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_Q |D^\alpha \vartheta|^2 dx dt,$$

где α – мультииндекс, D^α – обобщенная производная по переменным x и t .

Очевидно, что пространство $W_2^{l,s}(G)$ с нормой является гильбертовым пространством.

Задача. Найти обобщённое решение $u(x, t, z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=1}. \quad (3)$$

Далее будем считать, что $u(x, t, z) \rightarrow 0$ и $u_z(x, t, z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, $u(x, t, z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом $(x, t) \in \bar{Q}$.

при $p = 0, 1$, где $D_x^p u = \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$, $D_x^0 u = u$, γ – некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1): $2a(x, t) - |k_t| + \mu k(t) \geq \delta_1 > 0$, $\mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_2 > 0$ для всех $(x, t) \in Q$, где $\mu = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$ при $|\gamma| > 1$, $a(x, 0) = a(x, T)$, $c(x, 0) = c(x, T)$ для всех $x \in [0, 1]$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{1,3}(G)$, такой, что $\gamma f(x, 0, z) = f(x, T, z)$, существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3) из пространства $W_2^{2,3}(G)$.

Литература

1. Bitsadze A. V. Ill-posedness of the Dirichlet problem for equations of mixed type // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1953. Vol. 122, no. 2. Pp. 167–170.
2. Франкль Ф. И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикладная математика и механика. 1956, Т. 20, № 2, С. 196–202.
3. Vragov V. N. Boundary value problems for nonclassical equations of mathematical physics. Novosibirsk: NGU, 1983.
4. Джамалов С. З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Ташкент, 2021. 176 с.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Джамалов С. З.^{1,a}, Туракулов Х. Ш.^{2,b}, Собиров А. А.^{2,c}

¹Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз

²Кокандский государственный педагогический институт, Ташкент,

Узбекистан; ^asiroj63@mail.ru, ^bhamidsh87@gmail.com,

^cavazbekdobirovqdpi@gmail.com

В данной работе с использованием результатов работ [1–4] изучается однозначная разрешимость обобщенного решения одной полупериодической краевой задачи для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном параллелепипеде.

В области

$$G = (-1, 1) \times (0, T) \times \mathbb{R} = Q \times \mathbb{R} = \{(x, t, z); x \in (-1, 1), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\}$$

рассмотрим уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - \Delta u + a(x) u_t + c(x, t) u = f(x, t, z), \quad (1)$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ – оператор Лапласа. Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q .

Полупериодическая краевая задача. Найти обобщённое решение $u(x, t, z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0. \quad (3)$$

Далее будем считать, что $u(x, t, z) \rightarrow 0$ и $u_z(x, t, z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, $u(x, t, z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом $(x, t) \in \bar{Q}$ при $p = 0, 1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1): $2a(x) + \mu x \geq \delta_1 > 0$, $\mu c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_2 > 0$, для всех $(x, t) \in \bar{Q}$, где $\mu - \text{const} > 0$, $c(x, 0) = c(x, T)$ для всех $x \in [-1, 1]$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{1,3}(G)$ такой, что $f(x, 0, z) = f(x, T, z)$, существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3) из пространства $W_2^{2,3}(G)$ и для решения задачи (1)–(3) справедливы следующие оценки:

$$\text{I) } \|u\|_{W_2^{1,3}(G)}^2 \leq c_1 \|f\|_{W_2^{0,3}(G)}^2,$$

II) $\|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 \leq c_2 \|f\|_{W_2^{1,3}(G)}^2$, где c_i ($i = 0, 2$) – обозначены положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.

Здесь через $W_2^{l,s}(G)$ обозначено пространство Банаха с нормой

$$\|u\|_{W_2^{l,s}(G)}^2 = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x, t, \lambda)\|_{W_2^l(Q)}^2 d\lambda,$$

где s, l – любые конечные положительные целые числа, а норма в пространстве Соболева $W_2^l(Q)$, определяется следующим образом:

$$\|\vartheta\|_{W_2^l(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_Q |D^\alpha \vartheta|^2 dx dt,$$

α – это мультииндекс, D^α – есть обобщённая производная по переменным x и t . $\hat{u}(x, t, \lambda)$ преобразование Фурье функции $u(x, t, z)$ по переменным z .

Литература

1. Джамалов С. З., Ашууров Р. Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве // Казахский математ. журнал. 2018. Т. 18, № 2. С. 59–70.
2. Джамалов С. З., Ашууров Р. Р., Туракулов Х. Ш. Об одной полунелокальной краевой задаче для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченной призматической области // Вестник КРАУНЦ, 2021. Т. 32, № 2. С. 18–27.
3. Dzhatalov S. Z., Turakulov Kh. Sh and Sultanov M. S. On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain. Lobachevskii journal of mathematics. 2022. Vol. 43, no. 11. Pp. 3104–3111.
4. Джамалов С. З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Ташкент, 2021. 176 с.

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБОГО ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

Джамалов С. З.^a, Халхаджаев Б. Б.^b

*Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент,
Узбекистан; ^a siroj63@mail.ru, ^b xalxadjayev@yandex.ru*

В данной работе с использованием результатов работ [1–3] и с применением метода Фаэдо–Галеркина и метода априорных оценок изучается единственность слабого обобщенного решения одной полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

В области

$$Q = (0, 1) \times (0, T) = \{(x, t); 0 < x < 1; 0 < t < T < +\infty\}$$

рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода четвертого порядка

$$L_2 u = Pu + Mu = f(x, t). \quad (1)$$

Здесь $Pu = \sum_{i=0}^4 K_i(x, t) D_t^i u$; $Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}$ где $K_4(x, t) = K_4(t)$, $K_4(0) = K_4(T) = 0$; $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), $D_t^0 u = u$, a, b, c – некоторые положительные числа.

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q .

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [1].

Полунелокальная краевая задача. *Найти обобщенное решение $u(x, t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям*

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad p = 0, 1, 2, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (3)$$

$$u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0, \quad (4)$$

где γ величина отличная от нуля, которая будет уточнена ниже.

Определим следующие билинейные формы:

$$a(u, \vartheta) = P(u, \vartheta) = (K_4 u_{tt}, \vartheta_{tt})_0 - ((K_3 - 2K_{4t})u_{tt}, \vartheta_t)_0 + \left(\sum_{i=0}^2 b_i D_t^i u, \vartheta \right)_0,$$

где $b_i \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, $b_2(x, t) = K_{4tt} - K_{3t} - K_2$, $b_1 = K_1$, $b_0 = K_0$,

$$m(u, \vartheta) = (Mu, \vartheta) \equiv ((au_{xx} - bu_{tt}), \vartheta_{xx})_0 - (cu_{xx}, \vartheta)_0.$$

Определение. Функция $u(x, t) \in W_2^2(Q)$ называется слабым обобщенным решением задачи (1)–(4), если для любой функции $\vartheta(x, t) \in W_2^2(Q) \cap W_2^1(Q)$ такой, что $\gamma D_t^q \vartheta|_{t=0} = D_t^q \vartheta|_{t=T}$, $q = 0, 1$, выполняется интегральное тождество

$$a(u, e^{-\lambda t} \vartheta) + m(u, e^{-\lambda t} \vartheta)_0 = (f, e^{-\lambda t} \vartheta)_0.$$

Теорема. Пусть выполнены выше перечисленные условия для коэффициентов уравнения (1), $K_1(x, t) > 0$ – достаточно большая функция, кроме того, пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1): $-(2K_3 - 3K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0$, $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0$, для любых $(x, t) \in \bar{Q}$, где $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, $K_{4t}(0) = K_{4t}(T)$, $K_3(x, 0) = K_3(x, T)$; $K_2(x, 0) = K_2(x, T)$; $K_0(x, 0) = K_0(x, T)$ для всех $x \in [0, 1]$. Тогда для любого $f(x, t) \in L_2(Q)$, если существует обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1)–(4) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, то оно единственно и для нее справедлива следующая априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^2(Q)}^2 \leq c \|f\|_0^2.$$

Литература

1. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
2. Джамалов С. З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа: Монография. Ташкент, 2021. 176 с.
3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973. 407 с.

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОЛУНЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Джамалов С. З.^а, Худойкулов Ш. Ш.^б

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент,
Узбекистан; ^аsiroj63@mail.ru, ^бxudoykulov1194@gmail.com

В связи с существенно возросшими за последние десятилетия возможностями вычислительной техники в прикладной математике начинают находить применения сложные математические модели, учитывающие значительно большее количество физических факторов. В работах [1, 2] впервые предложены математические модели, возникающие при изучении ряда прикладных задач и приводящие к рассмотрению нелокальных краевых задач. Как известно, нетрудно установить связь между нелокальными краевыми задачами и многоточечными обратными задачами [3].

С этой целью мы изучаем корректность по Адамару некоторой линейной двухточечной обратной задачи (Л.Д.О.З.) для многомерного уравнения теплопроводности.

Пусть Ω – односвязная область в пространстве R^n с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В области $G = \Omega \times (0, T) \times (0, l) = Q \times (0, l) \subset R^{n+2}$, рассмотрим многомерное уравнение теплопроводности

$$Lu = u_t - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} - u_{yy} + c(x, t)u = g(x, t, y) + \sum_{i=1}^2 h_i(x, t)f_i(x, t, y), \quad (1)$$

где $g(x, t, y)$, и $f_i(x, t, y)$, ($i = 1, 2$) – заданные и $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$ – неизвестные функции. Пусть коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q .

(Л.Д.О.З.) Найти функции (u, h_1, h_2) , удовлетворяющие уравнению (1) в области G такие, что функция $u(x, t, y)$ удовлетворяет полунелокальным краевым условиям

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=l} = 0, \quad (4)$$

с дополнительными условиями

$$u|_{y=l_j} = \varphi_j(x, t), \quad (5)$$

где $l_j \in (0, l)$, $j = 1, 2$ такие, что $0 < l_1 < l_2 < l < +\infty$, а функции $u(x, t, y)$ и $h_i(x, t)$, $i = 1, 2$ принадлежат классу

$$U = \{(u, h_i, i = 1, 2); u \in W_2^{2,1}(G), D_y^3(u_t, u_x, u_{xx}) \in L_2(G), h_i \in W_2^{2,1}(Q)\}.$$

Введем следующие обозначения

Пусть $g_j(x, t) = g(x, t, l_j)$, $f_{ij}(x, t) = f_i(x, t, l_j), \forall i, j = 1, 2$.

$$\mathfrak{F}^2 = \max\{\|f_{11}\|_{C(Q)}^2, \|f_{12}\|_{C(Q)}^2, \|f_{21}\|_{C(Q)}^2, \|f_{22}\|_{C(Q)}^2\}.$$

Тогда через $\mathbb{F} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^2$ определим квадратную матрицу второго порядка, т.е. $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$, а через $H = \det \mathbb{F} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}$ обозначим ее детерминант.

Определение. Обобщенным решением задачи (1)–(5) будем называть функцию $u(x, t, y) \in U$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области G , с условиями (2)–(5).

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов и правых частей уравнения (1) и заданной функции $\varphi_j(x, t)$, $j = 1, 2$.

Условие 1: периодичность: $c(x, 0) = c(x, T)$, для всех $x \in \bar{\Omega}$; нелокальные условия: $\gamma g(x, 0, y) = g(x, T, y)$, $\gamma f_i(x, 0, y) = f_i(x, T, y)$, $i = 1, 2$;

гладкость: $g_j(x, t) = g(x, t, \ell_j) \in C_{x,t}^{0,1}(Q)$, $f_{ij}(x, t) = f(x, t, \ell_j) \in C_{x,t}^{0,1}(Q)$, $H = |\det \mathbb{F}| \geq \eta > 0$, $f \in W_2^2(G)$, $g \in W_2^2(G)$.

Условие 2: $\varphi_j(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $\gamma\varphi_j|_{t=0} = \varphi_j|_{t=T}$, $\varphi_j|_{\partial\Omega} = 0$, $j = 1, 2$.

Теорема. Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $\lambda c(x, t) - c_t(x, t) \geq \delta_1 > 0$ для всех $(x, t) \in \bar{Q}$, здесь $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$ и пусть существует малое положительное число σ такое, что имеют место оценки $\delta_0 - 10\sigma^{-1} \geq \delta > 0$, $q \equiv M \sum_{i=1}^2 \|(1 + D_y^3)f_i\|_{W_2^2(G)} < 1$, (где $\delta_0 = \min\{\lambda, \delta_1, \lambda(\frac{\pi}{\ell})^2\}$), $M = 2\sigma\lambda\eta^{-2}\mathfrak{F}^2 c_1c_2c_3$; где $c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4}{(1+\mu_k^2)^3}$, $\mu_k = \frac{k\pi}{\ell}$, c_2, c_3 – постоянные числа, которые определяются из теоремы вложения Соболева). Тогда для любых функций $(1 + D_y^3)g \in W_2^1(G)$; $(1 + D_y^3)f_i \in W_2^3(G)$, $i = 1, 2$; существует единственное решение задачи (1)–(5) из указанного класса U .

Литература

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
2. Ильин В. А, Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача первого рода для оператора Штурма–Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовке // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 7. С. 1198–1207.
3. Джамалов С. З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент, 2021. 176 с.

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Дженалиев М. Т.

Институт математики и математического моделирования, Алматы,
Казахстан; tuvasharkhan@gmail.com

Пусть $T < \infty$, $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$.

1. О контр-примере. Если $f \in L_2(Q)$, то решение начально-граничной задачи

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f \text{ на } Q, \quad (1)$$

$$u = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \partial_t u(x, 0) = 0 \text{ на } \Omega, \quad (3)$$

вообще говоря, не принадлежит пространству $L^2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$ ([1], гл. 5, пункт 1.3).

Однако справедливы

Теорема 1 ([1], гл. 5, пункты 2–3; [2], гл. IV, параграф 4). Пусть заданная функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$f \in L^2(Q), \quad \partial_t f \in L^2(Q). \quad (4)$$

Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее классу

$$W_{2,0}^{2,2}(Q) \equiv \left\{ v \mid v \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), \quad \partial_t^2 v \in L^2(Q) \right\}. \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть заданная функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$f \in L^2(Q), \quad (-\Delta)^{1/2} f(t) \in L^2(Q). \quad (6)$$

Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее классу (5), т. е. $u \in W_{2,0}^{2,2}(Q)$.

Замечание 1. Утверждения теорем 1 и 2 дают разные достаточные условия (4) или (6) на правую часть $f(x, t)$ уравнения (1). Каждая из них, по-отдельности, обеспечивают требуемую регулярность решения задачи (1)–(3).

2. О регулярности решения вырождающегося по времени гиперболического уравнения. Следующая начально-граничная задача

$$\partial_t(t^\beta \partial_t u) - \Delta u = f \text{ на } Q, \quad (7)$$

$$u = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^\beta \partial_t u(x, t) = 0 \text{ на } \Omega, \quad (9)$$

была изучена в диссертации Н. Кахармана [3]. Им установлен, в частности, следующий результат:

Теорема 3. Пусть $\beta \in [0, 1)$, $f \in L^2(Q)$, $(-\Delta)^{1-\nu} f \in L^2(Q)$. Тогда задача (7)–(9) однозначно разрешима, и имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{W_{2,\beta}^{2,2}(Q)}^2 \leq C \left[\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|(-\Delta)^{1-\nu} f\|_{L^2(Q)}^2 \right], \quad \text{где } \nu = \frac{1-\beta}{2-\beta}, \quad (10)$$

$$\|u\|_{W_{2,\beta}^{2,2}(Q)}^2 \equiv \|\partial_t(t^\beta \partial_t u)\|_{L^2(Q)}^2 + \|t^\beta \partial_t u\|_{W_2^{1,1}(Q)}^2 + \|u\|_{L^2(0,T;W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))}^2. \quad (11)$$

Из теоремы 3, в частности, при $\beta = 0$ получаем:

Теорема 4. Пусть $f \in L^2(Q)$, $(-\Delta)^{1/2} f \in L^2(Q)$. Тогда задача (7)–(9) (с невырожденным уравнением) однозначно разрешима, и имеет место априорная оценка вида (10)–(11):

$$\|u\|_{W_{2,0}^{2,2}(Q)}^2 \leq C \left[\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|(-\Delta)^{1/2} f\|_{L^2(Q)}^2 \right]. \quad (12)$$

Замечание 2. При «усилении» вырождения уравнения (7) (т. е. при увеличении параметра β от 0 к 1) требование к гладкости правой части уравнения (7) функции f соответственно также повышается.

3. «Замена» условия гладкости для правой части вырождающегося уравнения (7) по переменной x на дифференцируемость дробного порядка по t . Пусть в уравнении (7) правая часть имеет вид $f(x, t) \equiv (I_{0+, t}^\alpha f_1)(x, t)$, граничные и начальные условия сохраняем как (8)–(9), где

$$f \in L^2(Q), \quad \mathcal{D}_{0+, t}^\alpha f = f_1 \in L^2(Q), \quad (13)$$

согласно ([4], гл. 1, параграф 2, 3⁰), $I_{0+, t}^\alpha f_1$ и $\mathcal{D}_{0+, t}^\alpha f$ – операторы дробного интеграла и дробной производной Римана–Лиувилля,

$$\alpha = 2 - 2\nu, \quad 1 \leq \alpha < 2, \quad \nu = \frac{1 - \beta}{2 - \beta}, \quad 0 \leq \beta < 1. \quad (14)$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия (13)–(14). Тогда задача (7)–(9) однозначно разрешима, и имеет место аналогичная (12) априорная оценка

$$\|u\|_{W_{2, \beta}^{2, 2}(Q)}^2 \leq C \left[\|f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\mathcal{D}_{0+, t}^\alpha f\|_{L^2(Q)}^2 \right].$$

Данная работа была выполнена при поддержке гранта КН МНВО Республики Казахстан (грант № BR20281002, 2023–2025).

Литература

1. Lions J.-L., Magenes E. Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. II. Berlin: Springer Verlag, 1972. XI+242 p.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
3. Казарман Н. Общие регулярные краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений. Алматы: Гылым Ордасы-ИМММ-КазНУ, 2023. 77 с.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Джумаев Б. М.

Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова,
Худжанд, Таджикистан; buston.jumaev.94@mail.ru

В работе рассматривается переопределенная система уравнений с частными производными вида

$$\begin{cases} w_{\bar{z}z} + aw + b\bar{w} = 0, \\ \bar{w}_{z\bar{z}} + aw + b\bar{w} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

с комплексными постоянными коэффициентами. Каждое уравнение этой системы является обобщением уравнения метааналитических функций.

Если все коэффициенты системы (1) равны нулю, то каждое из уравнений этой системы является уравнением Бицадзе [2, с. 134], общее решение которого имеет вид:

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z),$$

где φ, ψ — произвольные аналитические функции. Подставляя $w(z)$ в систему (1), легко определить аналитические функции φ и ψ , и общее решение системы (1) дается формулой

$$w(z) = c_1 + c_2z + c_3\bar{z},$$

где c_j — произвольные комплексные постоянные.

В случае $a = b = c = d = 0$ пространство P состоит из линейных относительно z, \bar{z} функций и размерность этого пространства равна 6.

В дальнейшем рассмотрим случай, когда матрица коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ненулевая. Введя вектор $\omega = (w, \bar{w})^T$, систему (1) запишем в виде

$$\omega_{\bar{z}\bar{z}} + A\omega = 0. \quad (2)$$

Далее от этой системы перейдем к системе первого порядка. Пусть $\omega_{\bar{z}}, U = (\omega, \nu)^T$. Тогда в силу (2) имеем равенство

$$\nu_{\bar{z}} + A\omega = 0$$

и для четырехмерного вектора U получим систему

$$U_{\bar{z}} = BU, \quad (3)$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A & 0 \end{pmatrix}$, E — единичная матрица второго порядка.

Справедлива следующая

Лемма. Если функция $w(z)$ является решением системы (1), то вектор-функция $U = (w, \bar{w}, w_{\bar{z}}, \bar{w}_{\bar{z}})^T$ будет удовлетворять системе (3). Если вектор-функция $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ является решением системы (3) и первые две ее компоненты комплексно сопряжены, т. е. $\bar{u}_1 = u_2$, то первая из них u_1 будет удовлетворять системе (1).

Как известно [1, с. 38], общее решение системы (3) имеет вид

$$U(z) = e^{B\bar{z}}\Phi(z), \quad (4)$$

где $\Phi(z)$ — произвольная аналитическая четырехмерная вектор-функция. Из формулы (4) находя первые две компоненты вектора $U(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ и используя соотношение $\bar{u}_1 = u_2$, можно определить все решения системы (1). Коэффициенты системы (1) определяют точку $\xi = (a, b, c, d)$ пространства C^4 .

Определим следующие множества в C^4 :

$$M_1 = \{\xi : 0 \neq a = d, b = c = 0\}, M_2 = \{\xi : bc \neq 0, |a - d| = 2|b|\},$$

$$M_3 = \{\xi : b = c = 0 \neq a \neq d\}, M_4 = \{\xi : d \neq a = b = c = 0\},$$

$$N_1 = \{\xi : b = 0, ac \neq 0, |a - d| = |c|\}, N_2 = \{\xi : a = b = 0, |c| = |d| \neq 0\},$$

$$N_3 = \{\xi : bd \neq 0, c = 0, |a - d| = |b|\}, N_4 = \{\xi : c = d = 0, |a| = |b| \neq 0\}.$$

Положим

$$M = \bigcup_{k=1}^4 M_k, \quad N = \bigcup_{k=1}^4 N_k.$$

Справедлива следующая теорема о размерности пространства P .

Теорема. *Размерность пространства P при $A \neq 0$ определяется формулой:*

$$\dim = \begin{cases} 8 & \text{при } (a, b, c, d) \in M, \\ 6 & \text{при } a = bc = d = 0, \\ 4 & \text{при } (a, b, c, d) \in N, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Литература

1. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. Новосибирск: НГУ, 1999. 74 с.
2. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПРИ ПОМОЩИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АВТОМАТОВ

Димитриченко Д. П.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; dimdp@rambler.ru*

Нейросетевой подход является эффективным методом при решении задач диагностики, распознавания образов, классификации и кластеризации образов, а также при решении задач прогнозирования [1, 2].

В случаях, когда входными данными являются члены временной последовательности или другая контекстно ориентированная информация, в которой важен порядок следования элементов во времени [2], целесообразно применение рекуррентных нейронных сетей.

Наличие информации о контексте, или локальном окружении позволяет таким сетям достаточно быстро адаптироваться к задачам управления, когда на вход подается вектор состояния рецепторов, а на выходе формируется команда управления, опосредованная оценка эффективности которой будет подана на вход такой сети вместе с данными о состоянии входов (рецепторов) на следующем шаге функционирования.

Другим методом, решающим подобную задачу являются определенные конструкции автоматов, характеризующиеся целесообразным поведением [3–5]. В этом случае, как и в результате применения рекуррентных нейронных сетей, всякая информация, подаваемая на вход автомата, характеризуется некоторым внутренним состоянием. Это свойство автоматов создает возможность формализации фактора контекста и его реализации при помощи автоматов.

В настоящей работе предложен метод конструирования рекуррентной нейронной сети по характеристикам соответствующего вероятностного автомата с переменной структурой.

Предложенный метод позволяет оптимизировать совокупность связей исходной рекуррентной нейронной сети и необходимое количество нейронов путем удаления, как избыточных нейронов, так и избыточных связей между оставшимися нейронами.

Анализ функционирования вероятностных автоматов позволяет выделить следующие положительные свойства:

1) рекуррентные нейронные сети являются эффективным методом анализа контекстно зависимых данных, основой для которых выступают временные последовательности;

2) формализация контекста в виде некоторого внутреннего состояния позволяет сопоставить функционирование такой нейронной сети с соответствующим этой сети вероятностным автоматом с переменной структурой и его текущему внутреннему состоянию;

3) это позволяет воспользоваться преимуществами автомата с переменной структурой для решения задачи целесообразного поведения в динамических средах и построить на его основе рекуррентную нейронную сеть;

4) соответствие внутренней структуры рекуррентной нейронной сети и автомата с переменной структурой делает возможным уже на этапе обучения высвободить сеть от избыточных нейронов в ее структуре.

Так как автомат с переменной структурой приближается в процессе настройки к оптимальному для данных условий автомату с линейной тактикой при нелинейных значениях скорости обучения, то это свойство позволяет провести логический анализ структуры итоговой рекуррентной нейронной сети.

Литература

1. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е изд.. М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2006. 1104 с.
2. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. М.: Горячая Линия – Телеком, 2017. 345 с.
3. Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 316 с.
4. Варшавский В. И. Коллективное поведение автоматов. М.: Наука, 1973. 408 с.

5. *Варшавский В. И., Поспелов Д. А.* Оркестр играет без дирижера: размышления об эволюции некоторых технических систем и управление ими. М.: Наука, 1984. 208 с.

МОДЕЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

**Дроздова В. И., Крахоткина Е. В.^a, Потапов И. Р.^b,
Будко К. Л.^c, Свидницкий А. Д.**

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия

^a *elena-stv@yandex.ru*, ^b *potapov.potapov-ivan2016@yandex.ru*,

^c *budkokira@hotmail.com*

Для обеспечения автономного полета квадрокоптера необходимо множество программных компонентов: модуль состояния; модуль управления; модуль картографии; модуль планирования движения. Рассмотрим управление БПЛА, а именно модельное управление. Управление моделью БПЛА – это нелинейный метод управления, в котором в качестве органов управления используется переход угловой скорости. Преимуществом метода является скорость переключения между режимами.

Запишем уравнение, объясняющее действие вращательного движения

$$I\ddot{\omega} = u_2 - \dot{\omega} \times I\dot{\omega}, \quad (1)$$

где I – момент инерции БПЛА; ω – угловая скорость; u_2 – элемент управления. Ошибку положим равной: $e(t) = \omega - \omega_c$.

Модуль управления был реализован в системе MATLAB/SIMULINK и включен в программу стабилизации автономного движения БПЛА.

РАЗРЕШИМОСТЬ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Егоров И. Е.^a, Сафонов С. В.^b

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск,

Россия; ^a IvanEgorov51@mail.ru, ^b rl_ssv@mail.ru

В работах [1, 2] была исследована разрешимость краевой задачи Вргова и первой краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка. В частности, результаты работ [1, 2] были перенесены на неклассические уравнения математической физики высокого порядка [3].

Пусть Ω – ограниченная область в R^n с гладкой границей S и положим

$$Q = \Omega \times (0, T), \quad \Gamma = S \times (0, T), \quad 0 < T < \infty.$$

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t),$$

где коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями в \bar{Q} . Введем множество

$$\Omega_T^- = \{(x, T) : x \in \Omega, k(x, T) < 0\}.$$

Будем считать, что $k(x, 0) < 0, x \in \bar{\Omega}$.

II краевая задача. *Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что*

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{\Omega_T^-} = 0.$$

Отметим, что в [1–3] существование регулярных решений, изученных краевых задач для уравнения (1), доказывалось при условии знакоопределенности функций $k(x, 0), k(x, T)$. При этих же условиях установлена единственность обобщенных решений.

В [4] рассматривалась краевая задача Врагова, когда на знак функции $k(x, t)$ не накладываются никакие ограничения. При определенных условиях на коэффициенты уравнения (1) доказано существование регулярного решения краевой задачи Врагова в весовом пространстве, установлена единственность обобщенного решения.

В данном докладе для II краевой задачи (1), (2) будут приведены теоремы существования обобщенного решения, единственности обобщенного решения и регулярной разрешимости в подходящем весовом пространстве Соболева без знакоопределенности функции $k(x, T)$.

Литература

1. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
2. *Терехов А. Н.* Краевая задача для уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО СССР, 1979. С. 128–136.
3. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
4. *Артюшин А. Н.* Краевая задача для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 2. С. 274–289.

**ОБ ОДНОЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ЗАВИСИМОСТИ ВАЛОВОГО ВНУТРЕННЕГО ПРОДУКТА
ОТ ВРЕМЕНИ**

Езаова А. Г., Босякова Т. Г.

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Нальчик, Россия*

Рассмотрим экономический цикл воспроизводства валового внутреннего продукта. с учетом инвестиционного временного лага $\tau > 0$. В качестве основной величины, описывающей экономический процесс выберем функцию зависящую от времени: $y(t)$.

Учитывая основной закон экономического баланса, с учетом существующего временного лага $\tau > 0$, можно записать простую модель экономического цикла Калецкого в виде [1]:

$$y(t - \tau) = A(t) + x(t - \tau), \quad (1)$$

где $y(t - \tau)$ – доход в момент времени $t - \tau$; $A(t) = Bdy(t)/dt$ – накопление в момент времени t ; B – капиталоемкость валового внутреннего продукта; $x(t - \tau)$ – потребление в момент времени $(t - \tau)$.

Рассмотрим линейную зависимость потребления от времени, т. е.

$$x(t - \tau) = (1 - a)(t - \tau),$$

где $0 \leq a \leq 1$ постоянная норма производственного накопления.

С учетом значений функции $A(t)$ и $x(t - \tau)$, уравнение (1) перепишется в виде дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом [2]

$$\frac{dy(t)}{dt} - \frac{1}{B}y(t - \tau) = (a - 1)(t - \tau). \quad (2)$$

Общее решение неоднородного уравнения (2) можно записать в виде:

$$y_{o.n}(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} + (1 - a)(t - B),$$

где m и p определяются по формулам

$$\begin{cases} m = (1 - a), \\ p = B(1 - a). \end{cases}$$

Учитывая начальные условия

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1,$$

частное решение неоднородного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (2) принимает вид

$$y_{o.n}(t) = \frac{y_1 - \alpha_2 y_0 + (\alpha_2 B - 1)(1 - a)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} +$$

$$+ \frac{\alpha_1 y_0 - y_1 + (1 - \alpha_1 B)(1 - a)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t} + (1 - a)(t - B).$$

Работа выполнена в рамках программы «Приоритет 2030».

Литература

1. Седелев Б. В. Оценка распределенных лагов в экономических процессах. М.: Экономика, 1977.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

УСЛОВИЯ ПЕРИОДИЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Елгондиев К. К., Бегжанов Ж. Б.

*Каракалпакский государственный университет имени Бердаха,
Нукус, Узбекистан; elgondiev.61@gmail.com*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1]

$$\frac{dX(t)}{dt} = P(t)X, \quad t \neq t_p, \quad (1)$$

$$\Delta X(t) \Big|_{t=t_p} = X(t_p + 0) - X(t_p - 0) = I_p, \quad (2)$$

где $X(t) : R \rightarrow R^n$, $P(t) : R \rightarrow \text{Re}^{n,n}$, $\text{Re}^{n,n}$ – множество квадратных матриц, причем $P(t) \in C(R)$, $P(t + \omega) = P(t)$, $\omega > 0$. Относительно моментов импульсных воздействий t_p , $p \in Z \setminus \{0\}$, предположим, что имеет место условия $t_m > t_n$ при $m > n$ и $t_k \rightarrow +\infty(-\infty)$ при $k \rightarrow +\infty(-\infty)$, $I_p \in R^n$, $\|I_p\| \neq 0$ – постоянный вектор.

Рассмотрим задачу существования периодических решений импульсной системы (1), (2).

Решение импульсной системы (1), (2), удовлетворяющее начальному условию $X(t_0) = X_0$, где $t_0 \in (t_{-1}, t_1)$ – некоторый начальный момент времени, построенное в предположении, что $X(t) \in C^1 \left(\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [t_k, t_{k+1}] \right)$ существует, является единственным и представимо в виде

$$X(t) = X_0(t) = \sum_{t_0 < t_p \leq t} \Phi(t) \Phi^{-1}(t_p) I_p, \quad (3)$$

$X_0(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) X_0$, $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы (1).

Поскольку матрица $P(t)$ системы (1) является ω – периодической, то для матрицы $\Phi(t)$ имеет место равенство

$$\Phi(t + T) = \Phi(t + \omega q) = \mu^q \Phi(t),$$

где $T = \omega q$ – период решений импульсной системы (1), (2), q – некоторое натуральное число, μ – мультипликатор матрицы монодромии.

Лемма. Пусть система однородных дифференциальных уравнений (1) с импульсным воздействием (2) имеет периодическое решение $Y(t)$. Тогда существует натуральное число m такое, что для всех $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ выполняются условия,

$$t_{p+m} = t_p + T, \quad I_{p+m} = I_p. \quad (4)$$

Теорема 1. Для существования единственного периодического решения системы дифференциальных уравнений (1) с импульсным воздействием (2), при фиксированных значениях $t_p, I_p, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, необходимо и достаточно, чтобы имели место условие (4) и

$$\det \|E - \Phi(\omega q)\| \neq 0.$$

Теорема 2. Для того, чтобы система дифференциальных уравнений (1) с импульсным воздействием (2) имела $n - k$ параметрическое семейство периодических решений, при фиксированных значениях $t_p, I_p, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место условие (4) и

$$\det \|E - \Phi(\omega q)\| = 0.$$

Литература

1. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища шк. Головное изд-во, 1987. 287 с.

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИГМА-ПИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Жилов Р. А.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; zhilov91@gmail.com*

Использование сигма-пи нейронных сетей открывает новые горизонты для анализа и понимания сложных данных. Эта технология может быть востребована во многих областях, где требуется моделирование и предсказание на основе исторических данных. Применение искусственных нейронных сетей при кластеризации данных дает возможность «гибкой» кластеризации, т. е. разделение на кластеры линейно неразделимых объектов. Также нейронные сети дают возможность вычленения скрытых закономерностей данных, анализа данных и сжатия размерности данных без особой потери качества [1]. Использование сигма-пи нейронной сети для кластеризации данных позволяет учитывать не только

отдельные свойства объекта для отнесения его к тому или иному кластеру, но и позволяет учитывать комбинации этих свойств со своими весами, что улучшает также «гибкость» кластеризации. В добавок к этому сигма-пи нейронная сеть с одним скрытым слоем позволяет производить кластеризацию достаточно точно, не используя модели с несколькими десятками скрытых слоев [2], [3].

При кластеризации данных сетью Кохонена, которая состоит из n параллельно действующих элементов на выходе j -го нейрона, имеем

$$y_j = w_{j0} + \sum_{i=1}^m w_{ji}x_i.$$

Следует заметить, что координаты точки $W_j = (w_{j1}, \dots, w_{jm})$ совпадают с весами нейрона слоя Кохонена, а w_{j0} – пороговый коэффициент.

В этом выражении $\sum_{i=1}^m w_{ji}x_i$ представляет собой линейный нейрон.

В данной работе предлагается использование вместо линейного нейрона нейрон сигма-пи структуры. В таком случае выражение примет вид

$$y_j = w_{j0} + \sum_j w_{ji} \prod_{i \in I_j} x_i.$$

Среди выходных сигналов ищется максимальный $\text{argmax}\{y_j\}$

$$j_{max} = \text{argmax} \left\{ w_{j0} + \sum_j w_{ji} \prod_{i \in I_j} x_i \right\}.$$

Для найденного нейрона «победителя» производится настройка его весовых коэффициентов по формуле:

$$w_{ji}^{q+1} = w_{ji}^q + v (\tilde{x}_l - w_{ji}^q),$$

где v – коэффициент скорости обучения, который может задаваться постоянным значением в пределах $(0, 1]$ или переменным значением, уменьшающимся от эпохи к эпохе обучения.

Нормализация входных переменных производится в пределах $[0, 1]$.

Начальные значения весовых коэффициентов задаются случайно в диапазоне $[0, 1]$. Количество кластеров (нейронов) задается вначале, исходя из требования конкретной задачи.

Такой переход позволит справиться с линейно неразделимыми кластерами за счет того, что во взвешенной сумме появляются слагаемые высших степеней. Использование сигма-пи нейрона вместо линейного нейрона подразумевает, что при кластеризации данных учитываются не только свойства объектов, но и комбинации этих свойств.

Литература

1. *Вэн Райзин Дж.* Классификация и кластер. М.: Мир, 1980. 390 с.

2. Жилов Р. А. Применение нейронных сетей при кластеризации данных // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2021. Т. 99, № 1. С. 15–19.
3. Шибзухов З. М. Конструктивные методы обучения СП-нейронных сетей. М.: Наука, 2006. 159 с.

НЕЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Захарова Т. А., Федоров В. Е.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
tanya_1997_smirnova@mail.ru, kar@csu.ru

Пусть \mathcal{Z} – банахово пространство, A – линейный замкнутый оператор, плотно определенный в \mathcal{Z} , $S_{\theta_0, a_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_0)| < \theta_0, \lambda \neq a_0\}$.

Для $\alpha > 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$ будем говорить, что $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ [1], если

- (i) для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ имеем $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;
- (ii) для любого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a \geq a_0$ существует $K(\theta, a) > 0$, такое, что

$$\forall \lambda \in S_{\theta, a} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

$$D^\alpha z(t) + Az(t) = B(t, D^{\alpha_1} z(t), D^{\alpha_2} z(t), \dots, D^{\alpha_n} z(t)) \quad (2)$$

на отрезке $[t_0, T]$. Здесь $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{Z}$, $l = 1, 2, \dots, n$. Функция $z \in C((t_0, T]; D_A)$ называется решением задачи (1), (2), если $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $D^\alpha z \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$, $D^{\alpha_1} z, D^{\alpha_2} z, \dots, D^{\alpha_n} z \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1) и для всех $t \in [t_0, T]$ – равенство (2).

Пусть задано отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n \rightarrow \mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z}_\gamma := D_{A^\gamma}$ – нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_\gamma := \|A^\gamma \cdot\|_{\mathcal{Z}}$ (см. [2]), тогда существуют такие $C > 0$, $\delta \in (0, 1]$, что для всех $(s, x_1, x_2, \dots, x_n), (t, y_1, y_2, \dots, y_n) \in [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n$

$$\|B(s, x_1, x_2, \dots, x_n) - B(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\|_{\mathcal{Z}} \leq C \left(|s - t|^\delta + \sum_{l=1}^n \|x_l - y_l\|_\gamma \right). \quad (3)$$

Обозначим $\tilde{z}(t) := z_0 + (t - t_0)z_1 + \dots + \frac{(t - t_0)^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1}$, $\tilde{z}_l := D^{\alpha_l} \tilde{z}(t_0)$, $l = 1, 2, \dots, n$.

Теорема [2]. Пусть $\alpha \in (1, 2]$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $-A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, 0)$, $0 \in \rho(A)$, отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}_\gamma^n \rightarrow \mathcal{Z}$ удовлетворяет условию (3) с $\gamma \in (0, 1)$, $z_0, z_1 \in \mathcal{Z}_{1+\gamma}$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) на $[t_0, T]$.

Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

Литература

1. Bajlekova E. G. Fractional evolution equations in banach spaces // PhD Thesis. Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 2001.
2. Fedorov V. E; Zakharova T. A. Nonlocal solvability of quasilinear degenerate equations with Gerasimov–Caputo derivatives // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 2. Pp. 593–605.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Зикиров О. С., Сагдуллаева М. М.

*Национальный университет Республики Узбекистан им. Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан; zikirov@yandex.ru, sagdullayevam@mail.ru*

В области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f(x, t), \quad (1)$$

где $f(x, t)$ – заданная функция.

Заметим, что уравнение (1) относится к одному из канонических видов, приведенных в работе [1], т. е. уравнение характеристики имеет один общий интеграл, причём трехкратный. Этот фактор существенно влияет как на корректность постановки задач, так и на их разрешимость.

В работе для уравнения (1) исследуется следующая нелокальная задача: найти в области D решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

граничным условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(0, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

и интегральному условию

$$\int_0^t u(x, \tau) d\tau = \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $f(x, t)$, $\varphi(x)$ и $\mu_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi'(0) = \mu_1(0), \quad \varphi'(l) = \mu_2(0), \quad \int_0^l \varphi(x) dx = \mu_3(0).$$

Основное в работе является следующее утверждение.

Теорема. Пусть заданные функции $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\mu_i(y)$, ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют условиям $f(x, t) \in C^1(\bar{D})$; $\varphi(x) \in C^2[0, l]$; $\mu_1(t)$, $\mu_3(t) \in C^1[0, T]$, $\mu_2(t) \in C[0, T]$. Тогда существует единственное решение $u(x, t)$ нелокальной задачи (1)–(4).

Литература

1. Джураев Т. Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №10. С. 1734–1745.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ОБЛАСТИ, ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ – ПОЛОВИНА ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Зуннунов Р. Т., Эргашев А. А.

*Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук
Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан*

*Кокандский государственный педагогический институт, Коканд,
Узбекистан; zuntipov@mail.ru*

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0+,y}^\alpha u = 0, (y > 0, 0 < \alpha < 1) \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 (-y)^m u = 0 (m > 0, y < 0) \end{cases} \quad (1)$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y > 0\}$ а Ω_2 – область полуплоскости $y < 0$ ограниченная отрезком $AB = \{(x, y) : y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ и характеристиками

$$AC : x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC : x + [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$. Здесь $D_{0+,y}^\alpha$ – частная дробная производная Римана–Лиувилля [1]

$$(D_{0+,y}^\alpha u)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x, t)}{(y-t)^\alpha} dt, (y > 0, 0 < \alpha < 1),$$

Введем обозначения: $J = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$, $\beta = m/(2m + 4)$, $\lambda \in R$, $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\left[\frac{m+2}{2}, \frac{x}{2}\right]^{\frac{2}{m+2}}\right)$ – есть точка пересечения характеристик уравнения (1). Рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача BS^∞ . Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющее условиям

$$y^{1-\alpha}u|_{y=0} = 0, 1 \leq x < +\infty, \quad (2)$$

$$u(0, y) = \varphi(y), 0 \leq y < +\infty, \quad (3)$$

$$Ax^{1-\beta} \left\{ A_{0x}^{1,\lambda} \left\{ D_{0x}^{1-\beta} [u(\theta_0(x))] \right\} \right\} = Bu(x, 0) + g(x), x \in J, \quad (4)$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} u(x, y) = c(x) \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-\alpha}u(x, y), x \in \bar{J}, \quad (5)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} u_y(x, y) = d(x) \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x, y))_y, x \in J. \quad (6)$$

Здесь $g(x), c(x), d(x)$ – заданные функции такие, что $g(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$; $c(x), d(x) \in C^2[0, 1] \cap C^3(0, 1)$; $y^{1-\alpha}\varphi(y) \in C(\bar{\Omega}^+)$.

Решением задачи (1)–(6) будем называть функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям задачи и имеющую следующую гладкость

1. $y^{1-\alpha}u(x, y) \in C(\bar{\Omega}^+)$, $D_{0+,y}^\alpha u(x, y) \in C(\Omega^+)$,
2. $y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x, y))_y \in C(\Omega^+ \cup \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\})$,
 $u_y(x, y) \in C(\Omega^- \cup \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\})$,
3. $u_{xx}(x, y) \in C(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, $u_{yy}(x, y) \in C(\Omega^-)$, $u(x, y) \in \bar{C}(\Omega^-)$.

В случае $m = 0$ и $\lambda = 0$ аналог задачи Трикоми для этого уравнения в области Ω впервые изучен в работе С. Х. Геккиевой [2]. Далее, в случае когда параболическая часть является полуплоскостью при $m > 0$ и $\lambda = 0$ аналогичная задача изучена в работе О. А. Репина [3]. В данной работе при $m > 0$ и $\lambda \neq 0$ для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана–Лиувилля исследована нелокальная задача, краевое условие которой содержит оператор дробного дифференцирования D_{0x}^α и интегральный оператор $A_{0x}^{1,\lambda}$. Эту задачу называют задачей со смещением по терминологии А. М. Нахушева [4]. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. Геккиева С. Х. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени: автореферат дис. ... кандидата физико-математических наук: 01.01.02. Нальчик, 2003. 14 с.

3. *Ретин О. А., Сайганова С. А.* Краевая задача со смещением для уравнения смешанного типа с дробной производной // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 89–94.
4. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Ибавов Т. И.

*Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия
ibavov94@mail.ru*

В работе исследуется третья краевая задача для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Капуто по времени и производной Рисса по координате. Для получения решения задачи последовательно применены преобразование Лапласа по времени и синус преобразование Фурье по координате. В работе [2] сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения нелокальной краевой задачи для нагруженного параболического уравнения второго порядка с дробной производной Римана–Лиувилля. В работе [3] найдено решение задачи типа Коши для неоднородного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Капуто по времени.

В полубесконечной области $Q = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ исследована третья краевая задача для диффузионно-волнового уравнения

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x, t) = {}^R D_x^{\beta} u(x, t)$$

с краевыми условиями

$${}^R D_x^{\beta-1} u(0, t) = \alpha(u_0 + u(0, t)), \quad {}^R D_x^{\beta} u(\infty, t) = 0,$$

где

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x, t) = \frac{1}{(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{u(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{-\alpha}}$$

– дробная производная в смысле Капуто порядка $0 < \alpha < 1$ [1],

$${}^R D_x^{\beta} u(x, t) = \frac{1}{K_{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} \frac{u''(z, t) dz}{|x-z|^{\beta}}$$

– дробная производная в смысле Рисса порядка $1 < \beta < 2$ [1].

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

2. Мамчуев М. О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик: КБНЦ РАН, 2013. 199 с.
3. Ибаев Т. И. Задача типа Коши для одного линейного неоднородного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной по времени // Вестник ДГУ. 2022 Год. Т. 37, № 4. С. 24–29.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЯЗКО-ТРАНСЗВУКОВОЙ УРАВНЕНИЯ

Иброхимов Х. К.

*Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган,
Узбекистан; xusniddin571@mail.ru*

В работе [1], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Новье–Стокса было получено ВТ-уравнение, то есть уравнение с кратными характеристиками

$$u_{xxx} - u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}.$$

ВТ-уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ плоско-параллельный поток [2].

В области $D = \{(x, y, z) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$, рассмотрим уравнения

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где $p, q > 0$ – постоянные вещественные числа, и для него исследуем следующую задачу.

Задача А. *Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\bar{D})$, удовлетворяющие краевыми условиями*

$$u(x, 0) = u(x, q) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{cases} au(0, y) + bu_{xx}(0, y) = \psi_1(y), \\ cu(p, y) + du_{xx}(p, y) = \psi_2(y), \\ u_x(0, y) = \psi_3(y), \end{cases} \quad (3)$$

где a, b, c и d – заданные постоянные, причем $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$, а $\psi_i(y)$, $i = \overline{1, 3}$, – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что для уравнения $u_{xxx} - u_{yy} + a_1(x)u_x + a_2(x)u = g(x, y)$ в работах [3], [4] исследованы некоторые корректные краевые задачи.

Теорема. *Если задача А имеет решение, то при выполнении условий $ab \leq 0$, $cd \geq 0$, оно единственно.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть задача А имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями.

Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в \bar{D} . Для этого уравнение (1) умножим на u , тогда получим

$$uL[u] \equiv u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

или

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(u u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (u u_y) - u_y^2 = 0. \quad (4)$$

Интегрируя тождество (4) по области D , имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^p \int_0^q \frac{\partial}{\partial x} \left[u(x, y) u_{xx}(x, y) - \frac{1}{2} u_x^2(x, y) \right] dx dy + \\ & + \int_0^p \int_0^q \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) u_y(x, y)] dx dy - \int_0^p \int_0^q u_y^2(x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Требуя $a \neq 0$, $c \neq 0$, из условия (2), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{c} \int_0^q u_{xx}^2(p, y) dy - \frac{b}{a} \int_0^q u_{xx}^2(0, y) dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^q u_x^2(p, y) dy + \int_0^p \int_0^q u_y^2(x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Учитывая условия $ab \leq 0$, $cd \geq 0$, получим $u_y(x, y) = 0$, то есть $u(x, y) = f(x)$. Подставляя в уравнение (1), имеем $f'''(x) = 0$. Отсюда

$$f(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Из условия (3), то есть

$$af(0) + bf''(0) = 0, \quad cf(p) + df''(p) = 0,$$

и принимая во внимание $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f''(p) = 0$, получим $f(x) = 0$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{D}$. В силу последнего, получим $u_1(x, y) = u_2(x, y)$.

В случаях $b \neq 0$, $d \neq 0$; $a \neq 0$, $d \neq 0$; $c \neq 0$, $b \neq 0$ аналогично получаем равенство $u(x, y) \equiv 0$ в \bar{D} . Теорема доказана.

Литература

1. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. Матем. и механ. 1965. Т. 29, вып. 6. С. 1004–1014.
2. Диесперов В. Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1972. Т. 12, № 5. С. 1265–1279.
3. Aраков Ю. П., Умаров Р. А. Solution of the boundary value problem for a third order equation with little terms. Construction of the Green's function // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 3. Pp. 738–748.
4. Aраков Ю. П., Умаров Р. А. On the third boundary problem for a nonhomogeneous third order equation with multiple characteristics // Uzbek Mathematical Journal. 2023. Vol. 67, no. 1. Pp. 1–4.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Ившин М. С.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; mikhail.ivshin.1996@mail.ru*

Пусть некоторый процесс описывается уравнением [1]

$$u_y(x, y) = u_{xx}(x, y). \quad (1)$$

Управление этим процессом осуществляется функцией $\tau(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, которая является следом решения уравнения (1) при $y = 0$, и которую требуется найти. Известно, что решение уравнения (1) при неизвестном $\tau(x)$ имеет бесчисленное множество решений. В связи с этим естественно сформулировать вариант постановки задачи оптимального управления. Предлагается следующая задача оптимального управления.

Задача. *Найти начальное управление $\tau(x)$, которое минимизирует функционал*

$$\int_0^T [u(0, y) - h(y)]^2 dy,$$

где $h(y)$ – некоторая заданная непрерывная функция на отрезке $[0, T]$.

В работе [2] были решены задачи оптимизации граничного управления для уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0.$$

Ранее в работе [3] в области Ω была решена задача оптимального управления для уравнения дробной диффузии

$$D_{0y}^\alpha u(x, y) - u_{xx}(x, y) = 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

с начальным условием

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

и с условием минимизации $\int_0^T [u_x(0, y) - h(y)]^2 dy$.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
2. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничных условий колебаниями струны // УМН. 2005. Т. 60, № 6. С. 89–114.
3. Ившин М. С. Задача оптимального управления для уравнения дробной диффузии с производной в условии минимизации // Доклады АМАН. 2022. Т. 22, № 2. С. 21–28.

О СИСТЕМЕ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ВОЗМУЩЕННОГО РЕГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА НЕ ОБЛАДАЮЩЕГО СВОЙСТВОМ БАЗИСНОСТИ

Иманбаев Н.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Южно-Казахстанский педагогический университет им. У. Жанибекова, Шымкент, Казахстан; imanbaevnur@mail.ru

Рассматривается спектральная задача:

$$l(u) \equiv u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) + u'(1) - \alpha u(1) = 0, \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = 0, \quad (3)$$

где $\alpha > 0$ – произвольное положительное число.

Пусть L_1 – оператор в $L_2(0, 1)$, заданный выражением (1) и «возмущенными» краевыми условиями:

$$U_1(u) \equiv u'(0) + u'(1) - \alpha u(1) = 0, \quad \alpha > 0, \quad (4)$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \quad p(x) \in L_2(0, 1).$$

Через L_0 обозначим невозмущенный оператор (случай $p(x) = 0$), то есть соответствующий задаче (1)–(3).

Характеристический определитель $\Delta_1(\lambda)$ спектральной задачи (1)–(4) представляется в виде

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot \left[1 - \alpha \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{c_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2} + \frac{c_k^{(1)}}{\lambda - (\pi + 2\pi k)^2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 2\delta_k \cdot \frac{c_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2} \right) \right],$$

где $\Delta_0(\lambda) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}) - \sqrt{\lambda} \left(1 + \cos(\sqrt{\lambda}) \right)$ – характеристический определитель невозмущенной задачи (1)–(3).

Теорема. Множество функций $p(x)$, для которых система собственных функций задачи (1), (4) не образует безусловного базиса в $L_2(0, 1)$, является плотным в $L_2(0, 1)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МНВО РК (грант № AP09260752).

Литература

1. Sadybekov M., Imanbaev N. On system of root vectors of perturbed regular second-order differential operator not possessing basis property // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 20. P. 4364.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ХЕССЕНБЕРГОВОЙ ФОРМЫ

Индуцкая Т. С.^а, Соловарова Л. С.^б

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
СО РАН, Иркутск, Россия; ^аindutskaya.tat@yandex.ru, ^бsoleilu@mail.ru

Рассмотрим начальную задачу

$$\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} (A(t)u(t)) + B(t)u(t) = f(t), \quad t \in [0; 1], \quad (1)$$

$$\mathcal{D}_{0+}^{\alpha-1} (A(t)u(t)) \Big|_{t \rightarrow +0} = u_0, \quad u_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

с производной Римана–Лиувилля [1] дробного порядка $0 < \alpha < 1$

$$\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds.$$

В уравнении (1) $A(t)$ и $B(t)$ – заданные $(n \times n)$ матрицы, $f(t)$ и $u(t)$ – заданная и искомая n -мерные вектор-функции. Задачу (1), (2) с условием

$\det A(t) \equiv 0$ будем называть дифференциально-алгебраическим уравнением (ДАУ) дробного порядка.

В докладе сформулированы условия существования единственного непрерывного решения ДАУ дробного порядка (1), (2), в котором матричный пучок $\lambda A(t) + B(t)$ имеет форму Хессенберга [2], т. е.

$$A(t) = \begin{pmatrix} E & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & E & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & E & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & E & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & * & * & B_{1,r-1}(t) & B_{1r}(t) \\ B_{21}(t) & * & * & B_{2,r-1}(t) & 0 \\ 0 & * & * & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & * & * & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & B_{r,r-1}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица, $B_{ij}(t)$ – переменные матрицы.

Для задачи (1), (2) предложен простейший численный метод решения, основанный на квадратурной формуле правых прямоугольников и методе интегрирования произведений [3]. Проведены численные эксперименты.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173, <https://rscf.ru/project/22-11-00173/>.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Brenan K. E. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. Philadelphia: SIAM, 1996.
3. Weiss R. Product integration for the generalized Abel equation // Mathematics of computation. 1972. Vol. 26, no. 117. Pp. 177–190.

ЗАДАЧА С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА–НЕРСЕЯНА

Иргашев Б. Ю.

*Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган,
Узбекистан*

*Институт математики им. В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан
bahromirgasev@gmail.com*

В области $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < T\}$, $T < +\infty$ рассмотрим следующую задачу типа Коши.

Задача Коши. *Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:*

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}} u(x, y), \frac{\partial^{2s}}{\partial x^{2s}} \in C(\Omega), D_{0y}^{\gamma_0} u(x, y) \in C(\overline{\Omega}),$$

$$\begin{cases} D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}} u(x, y) - (-1)^{s-1} \frac{\partial^{2s} u(x, y)}{\partial x^{2s}} = 0, \\ 1 < \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 - 1 \leq 2, \gamma_1 = 1, s = 2, 3, \dots, \\ D_{0y}^{\gamma_0-1} u(x, 0) = \varphi_0(x), \\ D_{0y}^{\gamma_0} u(x, 0) = \varphi_1(x). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}}$ – оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна порядка $\alpha = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1 > 0$, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_k\}_0^m = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, $\gamma_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, m$, определяется соотношением [1]

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} = D_{0y}^{\gamma_m-1} D_{0y}^{\gamma_{m-1}} \dots D_{0y}^{\gamma_1} D_{0y}^{\gamma_0}, \quad (2)$$

где D_{0y}^γ – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка γ с началом в точке $y = 0$, определяемый следующим образом [2, с. 9]

$$D_{0y}^\gamma g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^y \frac{g(t) dt}{|y-t|^{1+\gamma}}, \gamma < 0, \\ g(y), \gamma = 0, \\ \left(\frac{d}{dy}\right)^p D_{0y}^{\gamma-p} g(y), p-1 < \gamma \leq p, p \in N. \end{cases}$$

Заметим, что уравнение (1) охватывает как частные случаи уравнения с производными Римана–Лиувилля, Капуто и Хилфера. Задача Коши для уравнений с дробными производными Джрбашяна–Нерсесяна и Римана–Лиувилля рассматривались, соответственно, в работах [3–6].

В данной работе мы пользовались идеями из этих работ.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

$$\varphi(x) \in C(R), \psi(x) \in C^{(2s)}(R), \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\varphi(x) \exp\left(-k|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}\right) \right) = 0,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\psi(x) \exp\left(-k|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}\right) \right) = 0, k < \left(1 - \frac{\alpha}{2n}\right) \left(\frac{\alpha}{2nT}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} \cos \frac{1-n}{2n-\alpha} \pi,$$

тогда представление вида

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \Gamma_{b_0}(x - \xi, y) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \Gamma_{b_1}(x - \xi, y) d\xi$$

– решение задачи Коши. Здесь

$$\Gamma_{b_l}(x - \xi, y - \eta) = \frac{(y - \eta)^{b_l}}{2s} \sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k \phi \left(-\frac{\alpha}{2s}, b_l + 1; -\lambda_k t \right),$$

$$\phi(\delta, \varepsilon; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\delta k + \varepsilon)} \quad (\delta > -1)$$

– функция Райта,

$$b_l = \alpha_l - \frac{\alpha}{2s}, \quad \alpha_l = \gamma_0 - l, \quad l = 0, 1,$$

$$\lambda_s = e^{\frac{s-1-2k}{2s} i\pi}, \quad t = \frac{|x - \xi|}{(y - \eta)^{\frac{\alpha}{2s}}} > 0, \quad \alpha = \gamma_0 + \gamma_2.$$

Литература

1. Джрбациян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем. 1968. Т. 3, № 1. С. 3–28.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003. 272 с.
3. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
4. Pskhu A. V. Fundamental solutions and cauchy problems for an odd-order partial differential equation with fractional derivative // Electronic Journal of Differential Equations. 2019. Vol. 2019, no. 21. Pp. 1–13.
5. Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 141–182.
6. Карашева Л. Л. Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 696–706.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРВУ

Исмоилов А. И.

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
ismoilovaxrorjon@yandex.com

Рассмотрим уравнение

$$L_{\alpha, \beta}^{\gamma}(u) \equiv u_{\xi\eta} + \left(\frac{\alpha}{\eta + \xi} + \frac{\beta}{\eta - \xi} \right) u_{\xi} + \left(\frac{\alpha}{\eta + \xi} - \frac{\beta}{\eta - \xi} \right) u_{\eta} + \gamma u = f(\xi, \eta) \quad (1)$$

в характеристическом треугольнике Δ плоскости $\xi O\eta$, ограниченной отрезками $\overline{OA} = \{(\xi, \eta) : \eta = \xi, 0 \leq \xi \leq 1\}$, $\overline{CA} = \{(\xi, 1) : 0 \leq \xi \leq 1\}$, $\overline{OC} = \{(0, \eta) : 0 \leq \eta \leq 1\}$. Здесь, α, β, γ – заданные действительные числа, причем $0 < \alpha \leq \beta < 1/2$ а $f(\xi, \eta)$ – заданная функция.

В работах [1], [2] для уравнения $L(u) \equiv 0$ при $0 < \alpha \leq \beta < 1/2$ изучена задача Дарбу и Коши–Гурса. Эти задачи решены методом Римана, причем, найдена функция Римана–Адамара и решение задачи построено в явном виде. В работе [3] рассмотрена задача Гурса в характеристическом треугольнике для уравнения (1) при $f(\xi, \eta) = 0$ и его частных случаев. В работе [4] для уравнения (1) при $0 < \alpha \leq \beta < 1/2$ изучена задача Дарбу.

Ниже под регулярным в области Δ решением уравнения (1) понимается функция $u(\xi, \eta) \in C(\overline{\Delta})$, имеющая в Δ непрерывные частные производные $u_{\xi\eta}, u_\xi, u_\eta$ и удовлетворяющая уравнению (1) в области Δ .

Задача Коши–Гурса. *Найти регулярное в области Δ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} (\eta - \xi)^{2\beta} (u_\xi - u_\eta) = 0, \quad 0 < \xi < 1; \quad u(\xi, 1) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (2)$$

Эта задача при $f(\xi, \eta) \equiv 0$ и неоднородных условиях (2) изучена в работе [2].

При этом существенно использована, так называемая, функция Римана–Адамара $V(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma)$ [2], которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $V(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma)$ по переменным (ξ_0, η_0) является решением уравнения (1) в области Δ , а по переменным (ξ, η) – удовлетворяет сопряженному ему уравнению:

$$M_{\alpha, \beta}^\gamma(u) \equiv u_{\xi, \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\alpha}{\eta + \xi} + \frac{\beta}{\eta - \xi} \right) u \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{\alpha}{\eta + \xi} + \frac{\beta}{\eta - \xi} \right) u \right] + \gamma u = 0.$$

2. $V_\eta - \left(\frac{\alpha}{\eta + \xi} + \frac{\beta}{\eta - \xi} \right) V = 0$ при $\xi = \xi_0$, $V_\xi - \left(\frac{\alpha}{\eta + \xi} - \frac{\beta}{\eta - \xi} \right) V = 0$ при $\eta = \eta_0$;

3. $V(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta_0; \gamma) = 1$;

4. $\lim_{\eta \rightarrow \xi} V(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma) = 0$;

5. $\lim_{\eta \rightarrow \xi} \left[V_\eta - V_\xi - \frac{4\beta}{\xi - \eta} V \right] = 0$;

6. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[V_\xi - \left(\frac{\alpha}{\eta + \xi} - \frac{\beta}{\eta - \xi} \right) V \right] \Big|_{\eta = \xi_0 + \varepsilon} - \left[V_\xi - \left(\frac{\alpha}{\eta + \xi} - \frac{\beta}{\eta - \xi} \right) V \right] \Big|_{\eta = \xi_0 - \varepsilon} \right\} = 0, \quad \varepsilon > 0.$

Пользуясь функциями Римана и Римана–Адамара, построенными для уравнения (1), нетрудно убедиться, что функция $V(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma)$, обладающая перечисленными выше свойствами 1–6, существует и определяется следующим равенством:

$$V(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma) = \begin{cases} R_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma) & \text{при } \eta > \xi_0, \\ \tilde{R}_2(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma) & \text{при } \eta < \xi_0, \end{cases}$$

где $R_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma) = \sigma_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sigma_3^k}{(k!)^2} F_3(\beta, \alpha, 1 - \beta, 1 - \alpha; 1 + k; \sigma_2, \sigma_1)$,

$$R_2(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma) = \chi_2 \left(\frac{\eta + \xi}{\eta_0 + \xi_0} \right)^\alpha \frac{(\eta - \xi)^{2\beta}}{[(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)]^\beta} \times \\ \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sigma_3^k}{k!(1 - \beta)_k} H_2 \left(\beta - k, \beta, \alpha, 1 - \alpha; 2\beta; \frac{1}{\sigma_2}, -\sigma_1 \right),$$

где

$$\chi_2 = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(2\beta)}, \quad \sigma_0 = \left(\frac{\eta + \xi}{\eta_0 + \xi_0} \right)^\alpha \left(\frac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0} \right)^\beta, \\ \sigma_1 = -\frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\eta + \xi)(\eta_0 + \xi_0)}, \quad \sigma_2 = \frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)}, \quad \sigma_3 = -\gamma(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0).$$

Пусть $u(\xi, \eta)$ – решение задачи Коши–Гурса для уравнения (1), а $P(\xi_0, \eta_0)$ – произвольная точка области $\bar{\Delta} \setminus (\eta = \xi)$. Найдем $u(\xi_0, \eta_0)$.

Интегрируя тождество $2[V L_{\alpha, \beta}(u) - u M_{\alpha, \beta}(V)] - f(\xi, \eta) V \equiv 0$ по треугольнику $O'A'D'$, ограниченному отрезками $O'A'$, $A'D'$, $O'D'$ прямых $\eta = \xi + \varepsilon$, $\eta = \xi_0 - \varepsilon$, $\xi = 0$ соответственно, и по прямоугольнику $D''A''C''C'$, ограниченному отрезками $D''A''$, $C''C'$, $D''C'$, $A''C''$ прямых $\eta = \xi_0 + \varepsilon$, $\eta = \eta_0$, $\xi = 0$, $\xi = \xi_0 - 2\varepsilon$ соответственно, а затем применяя формулу Грина, после некоторых вычислений.

Отсюда, учитывая свойства 1–6 функции $V(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma)$ и краевые условия (2), вычислим интегралы по сторонам треугольника и прямоугольника. Затем, переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, получим представление решения задачи Коши–Гурса (1), (2)

$$u(\xi_0, \eta_0) = \int_0^{\xi_0} d\xi \int_\xi^{\eta_0} f(\xi, \eta) V(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0; \gamma) d\eta.$$

Литература

1. Уринов А. К., Исмоилов А. И., Маманазаров А. О. Задача Дарбу для обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Украинский математический журнал. 2017. Т. 69, № 1. С. 52–70.
2. Уринов А. К., Исмоилов А. И. О разрешимости задачи Коши–Гурса для обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Бюллетень Института математики. 2018. № 1. С. 9–22.
3. Уринов А. К., Исмоилов А. И. Задача Гурса для обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и его частных случаев // Узбекский матем. журнал. 2015. № 4. С. 144–154.
4. Исмоилов А. И. Задача Дарбу для неоднородного обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Scientific Bulletin Physical and Mathematical Research. 2022. Vol. 4, no. 2. Pp. 75–86.

**ПРОГНОЗ ГРАДА ПО ВЫХОДНЫМ ДАННЫМ ГЛОБАЛЬНОЙ
МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ С ЗАБЛАГОВРЕМЕННОСТЬЮ
30-36 ЧАСОВ**

Кагермазов А. Х., Созаева Л. Т.

Высокогорный геофизический институт, Нальчик, Россия; ka5408@mail.ru

Основой краткосрочного прогноза погоды, то есть прогноза детализированных в пространстве и времени полей метеорологических элементов и локальных явлений выступают три метеорологических подхода: синоптический (качественный или расчетный), статистический (формальный) и численный (гидродинамический). В настоящее время, несмотря на достаточное развитие численных методов решения задач прогноза конвективной облачности, прогнозирование сопутствующих опасных явлений погоды заметно отстает. Поэтому наиболее распространенным принципом в краткосрочном прогнозе опасных конвективных явлений погоды является физико-статистический метод, основанный на статистической интерпретации информации об условиях возникновения и развития опасных конвективных явлений. Такой подход позволяет распознавать явления по комплексу термогидродинамических параметров атмосферы.

Целью данного исследования является представление результатов апробации предлагаемого подхода по прогнозированию града в зоне ответственности Северо-Кавказской воензированной службы по борьбе с градом. Для этого решались следующие задачи:

- расчет параметров атмосферы по выходным данным глобальной модели атмосферы и последующее прогнозирование града;
- сопоставление результатов прогнозирования с данными наблюдений о выпадении града;
- оценка критериев качества предлагаемого прогноза града группой методов.

Для прогнозирования града был использован авторский программный продукт [1]. Несмотря на большую заблаговременность и использование прогностических данных метеопараметров атмосферы, предлагаемый подход показал, что общая оправдываемость составляет 87%, а предупреденность наличия явления равна 76%. Что свидетельствует о заметном их преимуществе по сравнению со случаем применения фактического аэрологического зондирования, когда эти параметры оценки прогнозов составили 76% и 68% соответственно. Анализ неоправдавшихся прогнозов града показал, что большую их часть составляют дни, когда град наблюдался в горных и предгорных территориях, климатические условия которых сильно отличаются от условий в степной части региона, для которого составлялся прогноз града. Недостаток метода – неучет сложной орографии, частично можно преодолеть, если использовать выходные данные глобальной модели, характерные для этих терри-

тории. По результатам апробации предлагаемого подхода к прогнозированию града с заблаговременностью до 30 часов и анализа их успешности можно сделать вывод, что испытываемый метод соответствует критериям качества прогнозов. Следовательно, использование предлагаемого программного продукта с совместным использованием выходных данных современных глобальных моделей для расчета параметров атмосферы с целью прогноза града (и других опасных явлений) имеет хорошие перспективы для внедрения в оперативную практику служб по борьбе с градом.

Литература

1. Кагермазов А. Х. Альтернативный прогноз града по выходным данным глобальной модели атмосферы GFS NCEP «PROGNOZGRADA». Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018661467 от 07.09.18. Заявка №2018618374 от 06.08.18.

ПРИМЕНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГРП ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ В ОБРАЗЦЕ МАЛОГО РАЗМЕРА

Кадырова О. А.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
o.kadyrova@g.nsu.ru*

В работе проведено сравнение результатов моделирования распространения трещины гидроразрыва с экспериментальными данными, полученными при закачке вязкой жидкости в образец малого размера.

Целью сравнения является оценка возможности модели описывать развитие трещины с используемыми при проведении эксперимента параметрами. Отличие результатов моделирования и эксперимента покажет, что часть процессов описывается в модели с недостаточной точностью. Обеспечение совпадения результатов путем варьирования параметров даст направление корректировки модели. В дальнейшем с помощью модели, хорошо описывающей лабораторные эксперименты, можно будет обобщить результаты последних, на реальные трещины в пластах.

Для моделирования использовалась плоская трехмерная модель гидроразрыва пласта [1], доступная в виде программного продукта с открытым кодом [2]. Экспериментальные данные взяты из работы [3], в которой описано вызванное закачкой вязкой жидкости распространение трещины в гранитном образце цилиндрической формы. Полученная в эксперименте зависимость объема трещины от времени использовалась при задании условий в модели, а зависимости радиуса и давления в скважине – для оценки качества результатов численного моделирования.

При проведении моделирования выявлены проблемы, связанные с особенностями экспериментальных данных: зависимости объёма, ради-

уса и давления от времени зашумлены, что делает невозможным получение их точных значений в конкретные моменты времени.

Так, скорость закачки жидкости в трещину не может быть получена путем дифференцирования объема трещины, который определяется в эксперименте с искажениями. В работе предложено несколько способов аппроксимации объема гладкими функциями из различных классов с помощью метода наименьших квадратов. Это позволяет задавать производную от аппроксимированного объема в модель в качестве скорости закачки. Также предложен способ аппроксимации радиуса трещины, который определяется в эксперименте по положению акустических событий и наряду с давлением используется для оценки погрешности численной модели.

Использование точных параметров в качестве входных для модели приводит к существенному завышению скорости распространения трещины и занижению давления. Повышение при моделировании коэффициента вязкости жидкости, влияющего на радиус и давление, позволяет получить их зависимости, более близкие к экспериментальным. То есть изменение входных параметров может компенсировать неучет некоторого присутствующего в эксперименте эффекта, который не описывается в модели. Например, это может свидетельствовать о наличии дополнительного гидравлического сопротивления в трещине, которое не учитывается при использовании решения задачи о течении Пуазейля для описания движения жидкости в трещине.

Литература

1. *Peirce A., Detournay E.* An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures // *Comput. Methods Appl. Mech.* 2008. Vol. 197. Pp. 2858–2885.
2. *Zia H., Lecampion B.* PyFrac: A planar 3D hydraulic fracture simulator // *Computer Physics Communications.* 2020. Vol. 255, article id. 107368. DOI:10.1016/j.cpc.2020.107368
3. *Shevtsova A., Stanchits S., Filev E. et al.* Assessment of saturation effect on hydraulic fracturing in sandstone and thermally treated granite // *Minerals.* 2023. Vol. 13, article id. 777. URL: <https://doi.org/10.3390/min13060777>

ОСОБЕННОСТИ РАЗРАБОТКИ СОВРЕМЕННЫХ ДЕМО-ГЕНЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАСЕКОМЫХ

Кажарова И. А.^{1,a}, Таран А. Е.^{1,b}, Фоменко Н. А.^{2,c}

¹Южный федеральный университет, Таганрог, Россия

²Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина, Москва, Россия; ^aialyapunova@sfnu.ru, ^bataran@sfnu.ru, ^cfomenko.nata.alex@gmail.com

В современных демо-генетических моделях, основанных на различных обобщениях модели Костицына [1, 2] и используемых для моделирования поведения насекомых на поле с трансгенными агрокультурами,

по-прежнему мало отражено влияние популяционного таксиса, опускаются многие значимые физиологические особенности, такие как, периоды поедания растительного ресурса и периоды размножения. У крылатых насекомых свои отличия, например, наиболее распространенный вредитель кукурузы может, не питаясь, пролететь несколько километров, а также различие в строении мужских и женских особей, из-за чего женские наиболее подвижны и перемещаются быстрее. С другой стороны, физиологические особенности не позволяют этому виду вредителей самостоятельно перемещаться в жаркую погоду и тогда они переносятся теплым течением воздуха, вследствие чего их распространение схоже с транспортом веществ. При этом активные перелеты насекомые осуществляют в сумерки и ночью — в нежаркую и влажную погоду.

Само явление быстрого и медленного таксиса подробно изучено и в исследованиях многих известных математиков, но в демо-генетических моделях его влияние начали учитывать лишь недавно. В частности, рассматриваются плотности (количество) вредителей в активном и пассивном состоянии. В идеальной модели можно было бы пренебречь таким разделением, поскольку вредитель в пассивном состоянии двигается в сторону увеличения концентрации растений, а в активном — в сторону увеличения концентрации своих сородичей, что также приводит на часть поля с более привлекательными растениями. Однако за посевной сезон насекомые успевают дать несколько поколений потомства, а разная половозрастная структура влияет на пространственное распределение плотности вредителей. Возможно, более логично было бы разделять плотность вредителей не по типу состояний — активное и пассивное, а половым различиям, поскольку, как упоминалось ранее, женские особи вредителей кукурузы наиболее подвижны. Также интересно рассмотреть возрастное распределение, поскольку наиболее активным способом борьбы с данным видом вредителей является применение инсектицидов в период выхода гусениц из спячки и превращения в бабочку — фермеры отслеживают развитие куколок и применяют химические средства в эти периоды.

В зависимости от вида таксиса пространственно-временное распределение насекомых и динамика их развития будут различными. Также довольно интересен случай запаздывания — для большинства однолетних растений имеет место эффект последействия и объем биомассы растений уже не $R(x, t)$, а $R(x, t - \tau)$ (τ — время запаздывания) [3], поскольку трансгенные виды семян не позволяют получить новые семена для засева, то гибридные сорта оставляют широкое поле для дальнейших исследований.

Упомянутые особенности моделирования можно применить не только к крылатым насекомым-вредителям, но и к другим видам, дающим за относительно короткое время несколько поколений потомков, что позволяет отследить мутационную изменчивость. Если, например, говорить о

планктонных сообществах, то немаловажную роль играет приспособляемость организмов к внешним условиям, в том числе из-за многолетних мутаций. Если изменения химико-биологического состава воды можно спрогнозировать относительно течений и влияния человека на среду, то природные изменения освещенности поверхности воды учесть тяжелее, т. к. связаны с изменениями глобального климата. При этом логично, что планктон может адаптироваться и к этим изменениям. При моделировании такой адаптации может использоваться демо-генетический подход [1], [4–8], а также частотные модели распределения генов. Эти вопросы требуют дополнительного рассмотрения и исследования.

Литература

1. *Kostitzin V. A.* La biologie mathématique. Paris: A. Colin, 1937. 236 p.
2. *Свирижев Ю. М., Пасеков В. П.* Основы математической генетики. М.: Наука, 1982. 512 с.
3. *Ляпунова И. А.* Устойчивость модели пространственного распределения кукурузы вследствие процессов запаздывания // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 6 (107). С. 126–131.
4. *Ляпунова И. А.* Об одной демогенетической модели адаптации насекомых к изменению кормовой базы // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. № 4 (141). С. 235–239.
5. *Lyapunova I. A., Ershov V. V., Klovo A. G. et al.* Intraspecific competition in a model for the diagnosis of the density of transgenic and non-transgenic cultures // World Applied Sciences Journal. 2014. Vol. 30, no. 4. Pp. 451–453.
6. *Ляпунова И. А., Бажанов Н. Н.* Задача разработки демо-генетической модели адаптации вредителей к агрокультурам с учетом вида таксиса // Инженерный вестник Дона. 2019. № 9 (60). С. 25.
7. *Lyapunova I. A., Fomenko N. A.* The use of mathematical modeling tools to predict the yield of genetically modified crops // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. conference proceedings. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. 2020. P. 42012.
8. *Ляпунова И. А., Таран А. Е.* Математическое моделирование распространения планктона под влиянием его генотипа // Системный синтез и прикладная синергетика. Сборник научных работ XI Всероссийской научной конференции. Ростов-на-Дону – Таганрог, 2022. С. 370–376.

КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ИСПРАВЛЕНИЯ КОНТРАСТА ИЗОБРАЖЕНИЙ С ШИРОКИМ ДИНАМИЧЕСКИМ ДИАПАЗОНОМ

Казаков М. А.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; kasakow.muchamed@gmail.com*

При работе с сырыми изображениями, получаемыми непосредственно с матрицы оборудования (например, рентгеновского) возникают задачи исправления гистограммы и улучшения контрастности. В частности, области засвета, которым соответствует очень высокая интенсивность пикселей, делают информативную область очень тусклой. В информативной области изображения интенсивности пикселей могут лежать близко друг к другу, в сравнении с динамическим диапазоном, что делает изображение неразборчивым. Для решения этих проблем и улучшения представления изображения разработано множество методов [1], [2]. В данной работе предлагается комбинированный метод обработки сырого изображения, позволяющий произвести редукции засвеченной области, выравнивание гистограммы и улучшения контрастности и детализации. Специфика проблемы заключается в том, что, во-первых, области засвета не всегда присутствуют на изображении, а во-вторых, его расположение на гистограмме может быть произвольным для разных изображений, даже если они получены на одном и том же оборудовании. Поэтому алгоритм должен уметь эффективно определять наличие либо отсутствие засвета, а также, при его наличии, уметь достаточно точно оценить его расположение на гистограмме.

Для отсекания областей засвета используется упрощенный алгоритм кластеризации на основе разбиения пространства признаков [3]. В общем случае алгоритм работает для произвольной размерности пространства признаков. В данном случае работа ведется над одномерным пространством гистограммы, что позволяет оставить в стороне некоторые элементы общего алгоритма. Идея заключается в следующем. Области засвета характеризуются высоким пиком в правой области гистограммы, слева от которого располагается пустая зона, с низкими значениями. Содержательная часть изображения сконцентрирована слева от пустой зоны. Рассматриваемый метод кластеризации, основанный на анализе плотности, позволяет объединить в кластер содержательную часть изображения и довольно уверенно оценить его правую границу. Далее можно произвести мягкое отсечение, которое уберет области засвета и при этом сохранит информативность, которая может оставаться правее границы.

Пошаговое описание алгоритма редукции областей засвета:

1. Гистограмма разбивается на N интервалов (24 является довольно оптимальным выбором).
2. Выбирается первый интервал путем перебора интервалов, начи-

ная с индекса 0. Первым будет интервал, значение которого превышает заданный порог плотности. Этот интервал инициализирует кластер.

3. Начиная с первого интервала по гистограмме перемещается рамка, охватывающая 3 интервала. На каждой позиции вычисляется среднее от значений интервалов. Рамка смещается вправо, расширяя кластер, до тех пор, пока среднее значение интервалов не станет меньше заданного порога плотности.

4. Правая граница сформированного кластера принимается за точку отсечения t . Производится мягкое отсечение правой части гистограммы. Это осуществляется путем гамма-коррекции всех пикселей, интенсивность которых превышает точку отсечения (т. е. для $r > t$):

$$s = (r - t)^\gamma + t.$$

Для эффективного исправления гистограммы и улучшения качества изображений предлагается комбинированный алгоритм. На первом этапе производится мягкое отсечение засветов. На втором этапе вычисляются свертки, полученные оператором Собеля [4], и накладываются с дисконтирующим коэффициентом на результат, полученный на первом этапе. Такое слабое подчеркивание границ позволяет добиться лучшего результата на третьем этапе. На третьем этапе производится выравнивание гистограммы путем комбинирования нескольких преобразований CLAHE (Contrast Limited Adaptive Histogram Equalization) с различными размерами сетки разбиения и контрастирующего коэффициента [5].

Литература

1. *Vijayalakshmi D., Nath M. K., Acharya O. P.* A comprehensive survey on image contrast enhancement techniques in spatial domain // Sensing and Imaging. Vol. 21, no. 1. Pp. 40.
2. *Woods R. E., Gonzalez R. C.* Digital image processing. 4th edn. England: Pearson, 2021. 1022 p.
3. *Kazakov M. A.* Clustering algorithm based on feature space partitioning // 2022 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). 2022. Pp. 399–403.
4. *Sobel I.* An isotropic 3×3 image gradient operator // Presentation at Stanford A. I. Project 1968. 2014.
5. *Zuiderveld K. J.* Contrast limited adaptive histogram equalization // Graphics gems. 1994. Pp. 474–485.

ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ PSO-JAYA ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Казакова Е. М.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; shogenovae@inbox.ru*

В данной работе разработан гибридный алгоритм PSO-Jaya по принципу последовательной гибридизации [1] без изменения общей работы алгоритмов PSO (particle swarm optimization) [2] и Jaya [3]. Этот гибридный подход объединяет преимущества обоих методов с целью улучшения эффективности и способности находить оптимальные решения в сложных задачах оптимизации.

Для оценки эффективности работы гибридного алгоритма использованы тестовые функции для оптимизации – функции Экли, «подставка для яиц» (“eggholder”), Хольдера, Матьяса, Бута и Розенброка [1]. Каждая функция имеет свою форму и особенности, что позволяет оценить эффективность алгоритма в разных ситуациях.

Также в работе PSO, Jaya и PSO-Jaya применяются к ИНС (искусственная нейронная сеть) для нахождения комбинации весов и смещений, обеспечивающей минимальную ошибку для ИНС [4]. Это означает, что структура ИНС фиксирована, алгоритмы находят комбинацию весов и смещений, которая дает минимальную ошибку для ИНС. Для обучаемой нейросети каждая частица представляет собой вектор, состоящий из весов и смещения нейронов ИНС. Для оценки эффективности работы ИНС используются метрики ассигасу (верность) и F1. ИНС обучается для задачи классификации на наборе данных Iris.

В тестовых расчетах алгоритмы PSO, Jaya, PSO-Jaya сравниваются на основе среднего значения, медианы, стандартного отклонения и «лучшего» минимального значения ошибок после 50 независимых прогонов для тестовых функций и 30 для обучения сети. Результаты работы гибридного алгоритма сравниваются с алгоритмами PSO и Jaya.

Литература

1. *Карпенко А. П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. 2 издание. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 446 с.
2. *Kennedy J., Eberhart R.* Particle Swarm Optimization // IEE International Conference on Neural Networks. 1995. Pp. 1942–1948.
3. *Rao R.* Jaya: A simple and new optimization algorithm for solving constrained and unconstrained optimization problems // Int. J. Indus. Eng. Comput. 2016. Vol. 1, no. 7. Pp. 19–34.
4. *Mirjalili S. A., Hashim S. Z. M., Sardroudi H. M.* Training feedforward neural networks using hybrid particle swarm optimization and gravitational search algorithm // Applied Mathematics and Computation. 2012. Vol. 22, no. 218. Pp. 11125–11137.

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Казаков Е. А., Водинчар Г. М.

*Институт космических исследований и распространения радиоволн
ДВО РАН, Петропавловск-Камчатский, Россия; mifstjohn@gmail.com*

Для развития теории космических динамо-систем актуальным направлением работ является разработка и исследование малоразмерных динамических систем с памятью, моделирующих на феноменологическом уровне процесс генерации магнитных полей. По сложившейся в теории динамических систем терминологии, модели с памятью называют эредитарными.

Модель двумодового гидромагнитного динамо с памятью описывается следующей интегро-дифференциальной системой [1–3]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\eta - \frac{p}{s^2} z \right) y - \eta x, & \frac{dy}{dt} &= (D - z) x - y, \\ z &= \int_0^T K(t - \tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (1)$$

Комбинированная интегро-дифференциальная структура не позволяет использовать для численного моделирования стандартные математические пакеты. В докладе обсуждается одна разностная схема для численного решения подобного типа систем.

В системе (1) введем следующие замены:

$$\mathbf{x} = [x, y]^T, \quad \mathbf{a} = [\eta, p, s, D]^T \text{ — вектор параметров,}$$

и перепишем ее в векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, z, \mathbf{a}), \quad z = \int_0^t J(t - \tau) Q(\mathbf{x}(\tau)) d\tau. \quad (2)$$

Для численного исследования модели необходимо совмещение разностных схем для дифференциальной части и квадратурной формулы для интегрального члена. В качестве разностной схемы для дифференциальной части мы будем использовать схему «предиктор–корректор» на основе явной и неявной схем Адамса 4 порядка [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^P &= \mathbf{x}_n + \frac{h}{24} [55f(\mathbf{x}_n, z_n) - 59f(\mathbf{x}_{n-1}, z_{n-1}) + \\ &+ 37f(\mathbf{x}_{n-2}, z_{n-2}) - 9f(\mathbf{x}_{n-3}, z_{n-3})], \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{24}[9f(\mathbf{x}^P, z^P) + 19f(\mathbf{x}_n, z_n) - \\ - 5f(\mathbf{x}_{n-1}, z_{n-1}) + 1f(\mathbf{x}_{n-2}, z_{n-2})].$$

В качестве квадратурной формулы для интегрального члена используем формулу Симпсона, которую представим в виде:

$$z_{n+1} = L + \frac{h}{3}K_0Q(\mathbf{x}_{n+1}),$$

где L в случае четного n :

$$L = \frac{h}{3}K_nQ(\mathbf{x}_1) + \frac{h}{6} \left(K_{n+1}Q(\mathbf{x}_0) + K_nQ(\mathbf{x}_1) + 4K_{n+\frac{1}{2}}Q(\mathbf{x}_{\frac{1}{2}}) \right) + \\ + \frac{4h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} K_{n+1-2i}Q(\mathbf{x}_{2i}) + \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{n/2-1} K_{n+1-(2i+1)}Q(\mathbf{x}_{2i+1}),$$

а в случае нечетного n :

$$L = \frac{h}{3}K_{n+1}Q(\mathbf{x}_0) + \frac{4h}{3} \sum_{i=0}^{n/2} K_{n-2i+1}Q(\mathbf{x}_{2i+1}) + \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{n/2-1} K_{n-2i}Q(\mathbf{x}_{2i}).$$

Для одного частного случая ядра K и формы Q система (1) равносильна классической системе Лоренца [3]. Это позволяет вести верификацию численной схемы и программного кода на этом частном случае.

В докладе обсуждаются результаты численного исследования порядка точности данной схемы и примеры ее использования для расчета динамических режимов в модели (1). Ясно, что схема может быть использована для систем вида (2) с достаточно произвольными функциями f , K и Q . Это делает ее пригодной для широкого класса интегро-дифференциальных систем.

Исследования выполнены в рамках гранта РНФ № 22-11-00064 по теме «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности».

Литература

1. *Vodinchar G.* Hereditary oscillator associated with the model of a large-scale $\alpha\omega$ -dynamo // *Mathematics.* 2020. Vol. 8, no. 11. Pp. 2065.
2. *Казаков Е. А.* Эредитарная маломодовая модель динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 35, № 2. С. 40–47.
3. *Казаков Е. А.* Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью // *Вычислительные технологии.* 2022. Т. 27, № 6. С. 19–32.
4. *Заусаев А. Ф.* Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Самара: Самарский гос. техн. ун-т., 2010.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ ПОПУЛЯЦИИ

Кайгермазов А. А.

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Нальчик, Россия; arslan1961@yandex.ru*

Исследованы математические модели, описывающие динамику возрастной структуры лимитированной и нелимитированной популяции.

Доказаны леммы о стационарных состояниях моделей. Доказаны теоремы существования и единственности решений соответствующих нелокальных задач.

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПЕТЕЛЬ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Канаметова Д. А.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; danocha_999@mail.ru*

Макроэкономические переменные – это переменные, которые описывают состояние экономики каждой страны, такие как ВВП, инфляция, безработица, уровень инвестиций, уровень потребительского спроса и т. д. Эти переменные могут быть использованы для прогнозирования будущего экономического роста и уровня занятости в каждой стране [1, 2]. Международная торговля – это переменные, которые описывают объемы экспорта и импорта каждой страны, а также торговый баланс и текущий счет. Эти переменные могут быть использованы для анализа влияния международной торговли на экономический рост и занятость. Инвестиции и финансовые потоки – это переменные, которые описывают объемы прямых и портфельных инвестиций, а также капиталовложения и финансовые потоки между странами. Эти переменные могут быть использованы для анализа влияния международных инвестиций и финансовых потоков на экономический рост и занятость. Международные институты и политические факторы – это переменные, которые описывают влияние международных институтов, таких как Всемирная торговая организация или Международный валютный фонд, а также политические факторы на экономический рост и занятость в каждой стране. Эти переменные могут быть использованы для анализа влияния международных институтов и политических факторов на экономическую политику и реформы в различных странах. Другие компоненты динамической мировой модели могут включать демографические переменные, такие как население и миграция, технологический прогресс и инновации, а также экологические и социальные факторы, которые могут влиять на экономический рост и занятость в каждой стране. В экономике концепция «петли обратной связи» используется для анализа взаимосвязей между

различными экономическими переменными и процессами в экономике. Экономические системы являются сложными и динамичными, и петли обратной связи могут играть важную роль в их функционировании. Примером положительной петли обратной связи может служить процесс роста экономики. Когда экономика растет, происходит увеличение доходов и уровня занятости, что приводит к увеличению потребительского спроса и инвестиций. Это в свою очередь стимулирует дополнительный рост экономики, что создает еще больше доходов и занятости. Этот процесс может продолжаться до тех пор, пока не появятся ограничения, такие как нехватка ресурсов или инфляция. Примером отрицательной петли обратной связи может служить процесс корректировки экономических дисбалансов. Когда экономика находится в состоянии дисбаланса, например, когда происходит рост инфляции или дефицит торгового баланса, государственные органы могут принимать меры для корректировки ситуации. Например, центральный банк может повысить процентные ставки для сокращения кредитной активности и снижения инфляции. Это в свою очередь может привести к снижению экономического роста и уровня занятости, что снижает потребительский спрос и ограничивает дальнейшее увеличение инфляции. Концепция «петли обратной связи» может использоваться для анализа и оптимизации экономических систем, помогая предсказывать и контролировать их поведение. Понимание этих взаимосвязей может помочь государственным органам и бизнесу принимать более эффективные решения и улучшать экономическую ситуацию в стране. В мировой модели могут быть несколько петель обратной связи, которые имеют важное значение для анализа поведения мировой экономики. Петля обратной связи между международной торговлей и экономическим ростом: более высокий уровень международной торговли может стимулировать экономический рост в различных странах, что в свою очередь может привести к дополнительному росту международной торговли. Петля обратной связи между капиталовложениями и экономическим ростом: более высокий уровень капиталовложений может стимулировать экономический рост в различных странах, что в свою очередь может привести к дополнительному притоку капитала. Петля обратной связи между уровнем занятости и потребительским спросом: более высокий уровень занятости может привести к увеличению потребительского спроса, что в свою очередь может стимулировать экономический рост в различных странах. Петля обратной связи между уровнем инфляции и ставками центрального банка: если уровень инфляции выше, чем целевой уровень, центральный банк может повысить ставки, чтобы снизить инфляцию. Высокие ставки могут привести к снижению инвестиций и экономическому замедлению, что в свою очередь может снизить уровень инфляции. Петля обратной связи между экономическим ростом и уровнем выбросов: более высокий уровень экономического роста может привести к увеличению выбросов,

что в свою очередь может привести к климатическим изменениям, которые могут негативно сказаться на экономическом росте в будущем. Понимание этих петель обратной связи может помочь анализировать и прогнозировать поведение мировой экономики, а также разрабатывать политику и реформы, которые могут улучшить экономическое положение в различных странах и регионах [3].

Литература

1. *Валлерстайн И.* Анализ мировых систем и ситуация в современном мире. СПб.: Университетская книга, 2001. 416 с.
2. *Форрестер Д.* Мировая динамика. М.: АСТ, 2003. 384 с.
3. *Канаметова Д. А.* Анализ моделей динамических экономических систем // Известия КБНЦ РАН. 2023. Т. 114, № 4. С. 88–97.

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ И РАЗДЕЛИМОСТЬ ДЛЯ ТРИЖДЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА С МАТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Каримов О. Х., Гаибиев И. Д.

*Институт математики им. А. Джуроева НАНТ, Душанбе, Таджикистан
karimov_olim@mail.ru*

Термин «разделимость» был введен английскими математиками В. Н. Эвериттом и М. Гирцом. Они в работах [1, 2] подробно изучали делимость оператора Штурма–Лиувилля и его степеней. Дальнейшее развитие этой теории принадлежат советским математикам К. Х. Бойматову и М. Отелбаеву (см. [3, 4]). Разделимость дифференциальных операторов с частными производными впервые исследовал К. Х. Бойматов.

Наш доклад посвящен изучению делимости трижды гармонического линейного оператора и примыкает к работе [5].

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)^l$, где l – натуральное число, рассматривается дифференциальное уравнение

$$-\Delta^3 u(x) + V(x)u(x) = f(x), \quad (1)$$

где значения $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ являются квадратными положительно определенными эрмитовыми матрицами из $\text{End } C^l$. За область определения уравнения (1) примем множество всех $u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)^l \cap W_{2,loc}^6(\mathbb{R}^n)^l$ таких, что $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)^l$.

Определение. Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называется *разделимым* в $L_2(\mathbb{R}^n)^l$, если $\Delta^3 u(x)$, $V(x)u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)^l$ для всех $u(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)^l \cap W_{2,loc}^6(\mathbb{R}^n)^l$ таких, что $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)^l$.

Найдены условия на матрицу-функцию $V(x)$, при выполнении которых уравнение (1) разделяется в пространстве $L_2(R^n)^l$, и для всех решений $u(x) \in L_2(R^n)^l \cap W_{2,loc}^6(R^n)^l$, удовлетворяющих уравнению (1) с правой частью $f(x) \in L_2(R^n)^l$ справедливы включения $\Delta^3 u$, $V(x, u)u$, $V^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^3} \in L_2(R^n)^l$, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned} & \|\Delta^3 u(x); L_2(R^n)^l\| + \|V(x)u(x); L_2(R^n)^l\| + \\ & + \sum_{i=1}^n \|V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x_i^3}; L_2(R^n)^l\| \leq M \|f(x); L_2(R^n)^l\|, \end{aligned}$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

Литература

1. *Everitt W. N., Gierz M.* Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math. Soc. 1971. No. 23. Pp. 301–324.
2. *Everitt W. N., Gierz M.* On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. 1972. No. 24. Pp. 149–170.
3. *Бойматов К. Х.* Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.
4. *Отелбаев М.* Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды МИАН СССР. 1983. Т. 161. С. 195–217.
5. *Zayed E. M. E., Salem O.* Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert // International J. Math. Combin. 2010. Vol. 4. Pp. 13–23.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Каримов К. Т.^{1,a}, Олимова Д. С.^{2,b}

¹ Ферганский государственный университет

² Ферганский военно-академический лицей, Фергана, Узбекистан

^a karimovkt@mail.ru, ^b dilfuza.olimova.76@bk.ru

В данной работе исследуется краевая задача для уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в области, состоящей из двух четверти цилиндра и прямой треугольной призмы.

Пусть $D = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, z \in (0, c)\}$, где Ω – конечная односвязная область плоскости xOy , ограниченная дугами

$$\sigma_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$\bar{\sigma}_0^* = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \leq 0, y \leq 0\}$$

и отрезками

$$\overline{OM} = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \overline{M^*O} = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, y = 0\},$$

$$\overline{P^*P} = \{(x, y) : x - y = 1, 0 \leq x \leq 1\},$$

где $O(0, 0)$, $M(0, 1)$, $P(1, 0)$, $P^*(0, -1)$, $M^*(-1, 0)$, $Q(1/2, -1/2)$.

Введем обозначения:

$$D_0 = D \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0, z \in (0, c)\},$$

$$D_1 = D \cap \{(x, y) : y < 0, x > -y, z \in (0, c)\},$$

$$D_0^* = D \cap \{(x, y) : x < 0, y < 0, z \in (0, c)\},$$

$$D_1^* = D \cap \{(x, y) : y < 0, x < -y, z \in (0, c)\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn}(x+y) \left[U_{xx} + (\operatorname{sgn}y) \cdot U_{yy} + \frac{2\beta}{x} U_x + \frac{2\beta}{|y|} U_y \right] + U_{zz} + \frac{2\gamma}{z} U_z = 0, \quad (1)$$

где $\beta, \gamma \in (0, 1/2)$ в области D .

Уравнение (1) в области D принадлежит смешанному типу, а именно в областях D_0 и D_0^* – эллиптическому типу, а в областях D_1 и D_1^* – гиперболическому типу, причем $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения (1), а при переходе через прямоугольники $\bar{D}_0 \cap \bar{D}_1$ и $\bar{D}_0^* \cap \bar{D}_1^*$ уравнение меняет свой тип. Кроме того, при переходе из области D_1 в D_1^* (и наоборот) через прямоугольник $\bar{D}_1 \cap \bar{D}_1^*$ коэффициенты уравнения при производных неизвестной функции терпят разрыв первого рода.

Для уравнения (1) в области D исследуем следующую задачу:

Задача P^1 . Найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в областях D_j и D_j^* , $j = \bar{0}, \bar{1}$ уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(x, y, z) \in C(\bar{D}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(D_0 \cup D_1 \cup D_0^* \cup D_1^*),$$

$$|y|^{2\beta} U_y \in C((D_0 \cup (OP \times (0, c)) \cup D_1) \cup (D_0^* \cup (M^*O \times (0, c))))),$$

$$|x|^{2\beta} U_x \in C((D_0^* \cup (OP^* \times (0, c)) \cup D_1^*) \cup (D_0 \cup (OM \times (0, c))));$$

$$U(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \bar{S}_0;$$

$$U(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \bar{S}_0^*;$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{2\beta} U_x(x, y, z) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad z \in (0, c);$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} U_y(x, y, z) = 0, \quad x \in (-1, 0), \quad z \in (0, c);$$

$$U(0, y, z) + U(0, -y, z) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad z \in [0, c],$$

$$U(x, y, 0) = F_1(x, y), \quad (x, y, 0) \in \bar{D} \cap \{z = 0\},$$

$$U(x, y, c) = F_2(x, y), \quad (x, y, c) \in \bar{D} \cap \{z = c\},$$

а также условиям склеивания вида

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} U_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} U_y(x, y, z), \quad x \in (0, 1), \quad z \in (0, c),$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} (-x)^{2\beta} U_x(x, y, z) = \lim_{x \rightarrow +0} x^{2\beta} U_x(x, y, z), \quad y \in (-1, 0), \quad z \in (0, c),$$

где $S_0 = \sigma_0 \times (0, c)$, $S_0^* = \sigma_0^* \times (0, c)$, а $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ – заданные функции, причем для этих функций справедливы следующие условия согласования:

$$F_1(x, y)|_{\bar{S}_0 \cup \bar{S}_0^*} = 0, \quad F_2(x, y)|_{\bar{S}_0 \cup \bar{S}_0^*} = 0,$$

$$F_1(0, y) + F_1(0 - y) = 0, \quad F_2(0, y) + F_2(0 - y) = 0.$$

Подобные двумерные задачи для уравнения

$$\operatorname{sgn}(x + y) [u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) \cdot u_{yy} + (2\beta/x) u_x + (2\beta/|y|) u_y] + \lambda u = 0$$

в области Ω можно найти в работах [1], [2].

Литература

1. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. 355 с.
2. Уринов А. К., Нишоновна Ш. Т. Об одной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами // Материалы Международного Российско-Абхазского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик–Эльбрус, 2009. С. 220–222.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ, ДЕЙСТВУЮЩИМ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПЕРЕМЕННЫМ

Каримов Ш. Т.^а, Орипов Ш. А.^б

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

^а shaxkarimov@gmail.com, ^б shoripov1991@gmail.com

Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами были предметом исследования многих математиков. Исследование более сложных уравнений с сингулярными коэффициентами представляет собой естественный дальнейший этап на пути теоретических обобщений. Ценность получаемых

при этом теоретических результатов существенно возрастает в связи с тем, что подобные уравнения или их частные случаи встречаются в приложениях.

Особо отметим класс уравнений с частными производными с особенностями в коэффициентах, типичными представителями, которого является уравнения с операторами Бесселя вида

$$B_{\eta}^x = x^{-2\eta-1} \frac{d}{dx} x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\eta+1}{x} \frac{d}{dx}.$$

Для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типа с оператором Бесселя по каждой или по нескольким переменным И. А. Киприяновым [1] была введена соответственно терминология B -эллиптические, B – гиперболические и B – параболические уравнения. Важность уравнений из этих классов определяется также их использованием в приложениях к задачам теории осесимметрического потенциала, уравнениям Эйлера–Пуассона–Дарбу и многим другим.

Известно, что вырождающиеся и сингулярные уравнения второго порядка обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность классических задач. На постановку задачи существенно влияют младшие коэффициенты. Такие вопросы для уравнений высокого порядка с сингулярными коэффициентами почти не исследованы.

В данной работе исследуем задачу Коши для уравнения

$$L_{\alpha}^{\lambda}(u) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u(x, y) - \lambda^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

где $\alpha, \lambda \in R$, причем $\alpha > 0$, $\Omega = \{(x, y) : 0 < y < x < +\infty\}$.

Задача Коши. В области Ω требуется найти решение $u(x, y) \in C^3(\Omega \cup J)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_0(x),$$

$$u_{yy}(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_{yyy}(x, 0) = \psi_1(x), \quad x \geq 0, \quad (2)$$

где $J = \{(x, y) : y = 0, 0 \leq x < +\infty\}$, а $\varphi_k(x), \psi_k(x), k = 0, 1$ – заданные функции.

Данная задача ранее не исследована. Используя обобщенный дробный оператор Эрдейи–Кобера [2] и метод Римана [3], нами получена явная формула решения поставленной задачи. В работе построена функция Римана оператора $L_{\alpha}^{\lambda}(u)$, которая выражается через гипергеометрическую функцию ${}_0F_3(a, b, c; \sigma)$.

Подобная задача, когда оператор Бесселя действует по временной переменной, исследована в работе [4].

Несмотря на развитие современной вычислительной техники, построение точных решений краевых задач для дифференциальных уравнений

в частных производных по-прежнему остается важной и актуальной задачей. Эти решения позволяют глубже понять качественные особенности описываемых процессов и явлений, свойства математических моделей, а также могут быть использованы в качестве тестовых примеров для асимптотических, приближённых и численных методов.

Литература

1. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука – ФИЗМАТЛИТ, 1997. 204 с.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 702 с.
3. *Джураев Т. Д., Согуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент: ФАН, 2000. 144 с.
4. *Karimov Sh. T., Oripov Sh. A.* Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation of the fourth order with the Bessel operator by the method of transmutation operators // *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.* 2023. 29(2), 28. Pp. 1–15.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕГО КВАДРАТ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

Каримов Ш. Т.^{1,a}, Тулашева Е.^{2,b}

¹ Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

² Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан

^a shaxkarimov@gmail.com, ^b tulashevayo@gmail.com

В области $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$ для уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u = 0 \quad (1)$$

можно поставить и исследовать задачу с начальными

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_{xxx}(0, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad (3)$$

где $\alpha \in R$, причем $0 < \alpha < (1/2)$, $\varphi(x)$ – заданная функция.

Уравнение (1), в частности, возникает при исследовании уравнения многомерного свободного поперечного колебания тонкой упругой пластины $u_{yy} + \Delta^2 u = 0$ при осевой симметрии в сферической системе координат, где $\Delta^2 = \Delta \Delta$ – бигармонический оператор, а Δ – многомерный оператор Лапласа.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$u(x, y) = I_{-1/2, \alpha}^{(x)} V(x, y), \quad (4)$$

где $V(x, y)$ – неизвестная функция, $I_{-1/2, \alpha}^{(x)}$ – оператор Эрдейи–Кобера [1]

$$I_{\eta, \alpha} f(x) = \frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{2\eta+1} f(t) dt, \quad (5)$$

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера

Основные свойства этих операторов можно найти в работе [1].

В работах [2, 3] были обобщены некоторые свойства оператора (5), в частности, доказана приводимая ниже теорема.

Пусть $l \in N \cup \{0\}$, $[B_\eta^x]^0 = E$, E – единичный оператор, $[B_\eta^x]^l = [B_\eta^x]^{l-1}[B_\eta^x]$, l -ая степень оператора Бесселя

$$B_\eta^x = x^{-2\eta-1} \frac{d}{dx} x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\eta+1}{x} \frac{d}{dx}.$$

Теорема. Пусть $\alpha > 0$, $\eta \geq -(1/2)$; $f(x) \in C^{2l}(0, b)$, $b > 0$; функции $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^k f(x)$ интегрируемы в нуле и $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\eta+1} \frac{d}{dx} [B_\eta^x]^k f(x) = 0$, $k = \overline{0, l-1}$. Тогда

$$[B_{\eta+\alpha}^x]^l I_{\eta, \alpha} f(x) = I_{\eta, \alpha} [B_\eta^x]^l f(x).$$

Подставим (4) в уравнение (1) и в начальные условия (2). Затем, используя теорему при $l = 2$ и учитывая граничные условия (3), получим следующую задачу: найти решение $V(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$V(x, 0) = \Phi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad V_y(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty$$

и однородным граничным условиям

$$V_x(0, y) = 0, \quad V_{xxx}(0, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty,$$

где $\Phi(x) = \left(I_{-1/2, \alpha}^{(x)} \right)^{-1} \varphi(x)$.

Решив эту вспомогательную задачу, находим

$$V(x, y) = \frac{2^{1-\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(s) s^{(1/2)+\alpha} G(x, y, s) ds, \quad (6)$$

где $G(x, y, s) = \int_0^{+\infty} \xi^{(1/2)+\alpha} \cos(y\xi^2) \cos(x\xi) J_{\alpha-(1/2)}(s\xi) d\xi$, $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν .

Подставим (6) в равенство (4) и произведя необходимые вычисления, находим решение задачи (1)–(3) в виде

$$u(x, y) = \frac{x^{(1/2)-\alpha}}{2y} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \xi^{(1/2)+\alpha} J_{\alpha-(1/2)}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) \sin\left[\frac{x^2 + \xi^2}{4y} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\right] d\xi. \quad (7)$$

Замечание. При $\alpha = 1/2$ уравнение (1) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u = 0,$$

а формула (7) в известную формулу

$$u(x, y) = \frac{1}{2y} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \xi J_0\left(\frac{x\xi}{2y}\right) \sin\left(\frac{x^2 + \xi^2}{4y}\right) d\xi.$$

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 702 с.
2. Urinov A. K., Karimov Sh. T. On the Cauchy problem for the iterated generalized two-axially symmetric equation of hyperbolic type // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. 4(41). Pp. 102–110.
3. Karimov Sh. T. The Cauchy problem for the iterated Klein–Gordon equation with the Bessel operator // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. 5(41). Pp. 768–780.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Кармоков М. М., Джаппуева Дж. Р.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия; sunny.savash@mail.ru

В настоящее время большой интерес представляет изучение фазовых превращений грунтовых вод. Процесс движения фронта промерзания в грунте приближенно можно определить из решения квазистационарной задачи о фазовых превращениях. Вообще говоря, в задачах о замерзании основной процесс представляет определение местонахождения фронта замерзания и оценки нормальных компонент потоков тепла и жидкости сквозь фронт замерзания. Предполагая, что месторасположение фронта

замерзания в некоторый момент времени известно, дальнейшее его движение определяется с помощью уравнения Лапласа с целью вычисления потока тепла на фронте замерзания за некоторый промежуток времени. Для определения скорости потока тепла на границе раздела замерзшего и оттаявшего грунта используется комплексный метод граничных элементов (КМГЭ).

Рассматривается односвязная область Ω , границей которой является замкнутый контур. Предположим, что Γ – конечно-звенная ломаная линия, составленная из n отрезков прямых и вершин.

Пусть $\omega(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ – функция комплексного переменного, аналитическая в $\Omega \cup \Gamma$, причем φ и ψ называются соответственно потенциалом функции и функцией тока и являются гармоническими функциями в $\Omega \cup \Gamma$, т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Так как в грунте имеется медленно движущийся фронт промерзания, то уравнение теплопроводности можно в первом приближении заменить уравнением Лапласа для температуры.

Для малых промежутков времени можно предположить что применима теория потенциала, и, следовательно, температуру можно моделировать аналитической функцией. Процесс движения фронта промерзания в грунте приближенно можно определить из решения квазистационарной задачи о фазовых превращениях.

В данной модели строится простейшая двумерная модель процесса теплопередачи в замерзающем при оттаивании грунте. КМГЭ используется для определения скорости потока тепла на границе раздела замерзшего и оттаявшего грунта. Перемещение фронта непосредственно связано с изменением полного количества теплоты и объемной скрытой теплотой плавления (таяния). Численный метод, используемый в данной работе, основан на идее «склеивания» потенциала в виде некоторого комплексного полинома и функции тока с функциями, заданными в граничных условиях. Данная комплексно-полиномиальная модель обладает тем преимуществом по сравнению с КМГЭ, что объем вычислений здесь значительно меньше вследствие уменьшения размера переформированной на каждом шаге по времени (из-за эволюции фронта промерзания) глобальной матрицы системы.

Был рассмотрен водоносный слой толщиной 30,5 м со следующими значениями параметров потока: $K = 30,5$ м/сут, $S = 0,01$. Исследуемая область представляет собой прямой круговой цилиндр высотой 30,5 м и радиусом 200 м, вдоль оси которого проходит скважина. Требуется построить модель процесса откачки жидкости из указанной области через скважину при постоянной скорости $Q = 1,7$ м/мин.

Для построения численной модели область необходимо дискретизировать, указав набор узловых точек.

Сравнивая решение, найденное при помощи КМГЭ, с решением по методу дискретизации в области, устанавливаем, что относительная ошибка почти равномерно возрастает с приближением к скважине.

В связи с этим была проведена новая дискретизация области, при которой узловые точки распределены более плотно вблизи скважин. Были определены расхождения между численными решениями, найденными двумя различными численными методами в стационарных условиях при выборе узловых точек.

РАЗРАБОТКА И РАЗВИТИЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА РАДОНА В ГРУНТОВЫХ ВОДАХ

Каткова Г. А.¹, Макаров Е. О.^{1,2}, Паровик Р. И.^{1,3,a}

¹Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга

²Камчатский филиал Единой геофизической службы РАН,
Петропавловск-Камчатский, Россия;

³Институт космофизических исследований и распространения радиоволн
ДВО РАН, Паратунка, Россия; ^aparovik@ikir.ru

С 1997 г. на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне работает сеть пунктов мониторинга подпочвенных газов с целью поиска предвестников сильных землетрясений [1]. Пункты сети радонового мониторинга расположены в разных структурных элементах района побережья Авачинского залива, кроме того, каждый пункт имеет свои особенности строения толщи аллювиально-делювиальных отложений, в зоне аэрации которых размещаются датчики радона [2]. Это, как показывает многолетний опыт, позволяет фиксировать в динамике концентрации радона индивидуальный отклик в связи с разной реакцией отдельных блоков земной коры на геодеформационные процессы, связанные с подготовкой сильных землетрясений.

Для описания поведения радона в грунтовых водах, а также для интерпретации данных изотопного опробования природных вод в 30-х годах прошлого века была разработана физико-математическая модель переноса радона в природной водной системе [3], которая в дальнейшем была усовершенствована в работах [4], [5]. Первые попытки математических расчетов и построения модельных кривых аномальных вариаций объемной активности радона в сопоставлении с данными наблюдений были предприняты в работе [6].

В настоящей работе был предложен и реализован алгоритм на языке C++, который был основан на поиске зависимости приращения концентрации (ΔC) от времени в условиях воздействия импульса напряжений разных форм (единичный импульс – дельта-функция Дирака; продол-

жительное постоянное воздействие с резким фронтом роста напряжения; линейно увеличивающееся напряжение с резкой ступенькой в конце) (Модель В. Т. Дубинчука):

$$\begin{aligned} \Delta C(t) &= 0, t \leq 0, \\ \Delta C(t) &= \Delta C_{\max}(1 - e^{-\Lambda t}), 0 < t < t_s, \\ \Delta C(t) &= \Delta C_{\max}(1 - e^{-\Lambda t_s})e^{-\Lambda(t-t_s)}, t \geq t_s, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Lambda = \lambda_a + \lambda_w + \lambda_p$ – обобщенный кинетический параметр системы s^{-1} ; λ_a – постоянная, характеризующая абсорбцию на стенках капилляров; $\lambda_w = Q/V$ – постоянная, характеризующая пропускную способность гидрогеологической системы, Q – расход потока в системе, V – водообменный объем системы; λ_p – постоянная распада радона, $\Delta C_{\max} = \lambda_w \gamma \sigma_0 / \Lambda$ – положительная константа, σ_0 – величина импульса напряжения, вызываемая инъекцию радона в водный поток, t_s – время инъекции радона в водный поток.

Как показано в [6] обобщенный кинетический параметр Λ системы (1), в первую очередь, определяется пропускной способности всей гидрогеологической системы района пункта регистрации.

В разработанном на языке C++ программном обеспечении для сопоставления модельных и расчетных кривых был выбран метод, основанный на вычислении площади под ними [7]. Для этого используется численный метод правых прямоугольников. Так как исходные данные имеют определенный дискретный шаг, то и площадь кривой вычисляется с идентичным шагом для соблюдения порядка точности. Параметр Λ так же вычисляется методом подбора. С каждой итерацией цикла программы искомый параметр увеличивается на 0.00001 и в момент минимальной разницы между площадями под кривыми цикл останавливается с выводом расчетных значений. Кроме Λ программа рассчитывает величину импульса напряжения σ_0 , воздействие которого, согласно работе [5], вызывает инъекцию радона в водный поток.

Работа выполнена за счет средств гранта Президента РФ № МД-758.2022.1.1.

Литература

1. Фирстов П. П. Мониторинг объемной активности подпочвенного радона (^{222}Rn) на Паратунской геотермальной системе в 1997-1998 гг. с целью поиска предвестников сильных землетрясений Камчатки // Вулканология и сейсмология. 1999. № 6. С. 22–31.
2. Фирстов П. П., Макаров Е. О. Реакция подпочвенного и растворенного в подземных водах радона на изменение напряженно-деформированного состояния земной коры // Сейсмические приборы. 2015. Т. 51, № 4. С. 58–80.
3. Огильви А. Н. О каптаже радиоактивных вод и о колебаниях их радиоактивности в зависимости от дебита // Изд. Бальнеологич. ин-та КМВ. 1928. № 6. С. 85–93.

4. Гудзенко В. В., Дубинчук В. Т. Изотопы радия и радон в природных водах. М.: Наука, 1987. 158 с.
5. Dubinchuk V. T. Radon as a precursor of earthquakes. Isotopic geochemical precursors of earthquakes and volcanic eruption // Proceed. of an Advisory Group Meeting held in Vienna. 1991. Pp. 6–22.
6. Фирстов П. П., Макаров Е. О. Динамика подпочвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения. П.-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2018. 147 с.
7. Каткова Г. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И. Компьютерная программа для моделирования аномальных вариаций объемной активности радона на основе механизма его инжекции в поток грунтовых вод // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2022. Т. 40, № 3. С. 165–178.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА АЛЛЕРА–ЛЫКОВА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Керефов М. А.¹, Геккиева С. Х.²

¹Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова

²Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Нальчик, Россия; ¹kerefov@mail.ru, ²gekkiava_s@mail.ru

Настоящая работа посвящена исследованию уравнения влагопереноса с переменными коэффициентами с дробной производной Капуто

$$A_1 \partial_{0t}^{\alpha+1} u + \partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) + \\ + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t) u + f(x, t), \quad (1)$$

где ∂_{0t}^{γ} – оператор дробного дифференцирования Капуто [1], $0 < \alpha, \beta < 1$, $A_1 = \text{const} > 0$.

Рассматриваемое уравнение является обобщением уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности, которая объясняет наличие потоков против потенциала влажности.

Такого рода уравнения с дробными производными Римана–Лиувилля рассматривались в работах ряда авторов. Среди последних отметим работу [2], в которой исследовано уравнение влагопереноса Аллера–Лыкова с дробной по времени производной с различного рода граничными условиями. В [3] доказано существование и единственность решения первой краевой задачи для уравнения Аллера–Лыкова с постоянными коэффициентами, в работе [4] исследована вторая краевая задача. В [5] получены решения системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающих при использовании метода прямых.

В данной работе с помощью метода энергетических неравенств для решения первой и третьей краевых задач при различных соотношениях

между дробными производными (α, β) получены априорные оценки, из которых следует единственность решения рассматриваемых задач и их устойчивость по правой части и начальным данным.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003. 272 с.
2. *Геккиева С. Х., Керефов М. А.* Первая краевая задача для уравнения Аллера–Лькова с дробной производной Капуто // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 221. С. 63–70.
3. *Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A.* Dirichlet boundary value problem for Aller–Lykov moisture transfer equation with fractional derivative in time // Ufa Math. J. 2019. Vol. 11, no. 2. Pp. 71–81.
4. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лькова // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 607–621.
5. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Численно-аналитический метод решения краевой задачи для обобщенных уравнений влагопереноса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, вып. 1. С. 19–34.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА В СМЫСЛЕ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

Ким В. А.

*Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга,
Петропавловск-Камчатский, Россия; valentinekim@mail.ru*

Рассмотрим следующую задачу Коши для осциллятора Ван дер Поля–Леонова–Дуффинга:

$$\ddot{x}(t) + \lambda(x^2(t) - 1)\Theta^{q(t)-1}D_{0t}^{q(t)}x(t) + \omega_0x(t) + bx^3(t) = \beta mg \operatorname{sign}(\dot{x}(t)), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0,$$

где $x(t) \in C^2[0, T]$ – функция смещения, $\lambda > 0$ – параметр возбуждения, который характеризует силу затухания колебаний, ω_0 – собственная частота, x_0, y_0 – заданные константы, которые определяют начальные условия, b – коэффициент нелинейности, β – показатель бальности, m – масса сооружения, g – ускорение свободного падения, Θ – параметр, отвечающий за масштаб по времени. В уравнении (1) производная дробного переменного порядка берется в смысле Римана–Лиувилля:

$$D_{0t}^{q(t)}x(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)d\tau}{(t - \tau)^{q(t)}}, \quad 0 < q(t) < 1, \quad q(t) \in C^1[0, T]. \quad (2)$$

Решение задачи (1) ищется с помощью конечно-разностных схем. В работах [1], [2] на примере дробного осциллятора Дуффинга были подробно исследованы нелокальная явная и неявная конечно-разностные схемы. Строго обоснованы вопросы устойчивости и сходимости конечно-разностных схем. В работах [3] и [4] предложен механизм описания аварийной ситуации через явление острого резонанса, которое определяется с помощью уравнения Леонова–Дуффинга. Приведены основные зависимости и аналитические выражения. Выдвинуто предположение о возможности применения явления острого резонанса как воздействия при расчете зданий на уровень МРЗ (максимальное расчетное землетрясение) в сейсмических районах.

Данная работа обобщает результаты работ [1–4] с помощью дробного уравнения Ван дер Поля–Леонова–Дуффинга, которое лучше подходит для описания автоколебательных процессов (возникновение острого резонанса), чем уравнение Леонова–Дуффинга. Были построены осциллограммы и фазовые траектории, выходящие на предельные циклы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МД-758.2022.1.1.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Роману Ивановичу Паровику за ценные советы и замечания, которые способствовали улучшению результатов моделирования.

Литература

1. Ким В. А., Паровик Р. И. Некоторые аспекты математического моделирования дробного осциллятора Дуффинга. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им Витуса Беринга, 2022. 94 с.
2. Паровик Р. И. Хаотические и регулярные режимы дробных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им Витуса Беринга, 2019. 132 с.
3. Ведяков И. И., Востров В. К. Аварийные расчетные ситуации и аварийные сейсмические нагрузки // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2016. № 5. С. 33–38.
4. Леонов М. Я. Острый резонанс за пределом упругости при сейсмических колебаниях простейших сооружений // Известия АН Киргизской ССР. 1974. № 5. С. 61–66.

ОБ ОДНОЙ ВНУТРЕННЕКРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРВОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Киржинов Р. А.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; kirzhinov.r@mail.ru*

Пусть $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, -\alpha < y < \beta\}$ – область евклидовой плоскости точек (x, y) ; $\Omega^+ = \Omega \cap \{(x, y) : y > 0\}$; $\Omega^- = \Omega \cap \{(x, y) : y < 0\}$; r, α, β – вещественные положительные числа.

Исследуется

Задача. Найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) - u_y(x, y) = f^+(x, y), & y > 0, \\ u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) = f^-(x, y), & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

из класса $C^1(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_y^2(\Omega^-)$, удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) - u(r, y) = \varphi(y), \quad u_x(0, y) - u_x(r, y) = \psi(y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (2)$$

$$u_y(x, -\alpha) = \lambda_1 u(x, 0) + \lambda_2 u_y(x, 0), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (3)$$

где λ_1, λ_2 – заданные вещественные числа, $f^+(x, y), f^-(x, y)$ – заданные функции, $\varphi(y), \psi(y)$ – заданные, достаточно гладкие, функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi'(-\alpha) = \lambda_1 \varphi(0) + \lambda_2 \varphi'(0), \quad \psi'(-\alpha) = \lambda_1 \psi(0) + \lambda_2 \psi'(0).$$

При $\lambda_2 = 0$ задача была решена автором [1]. В данной работе доказана теорема об однозначной разрешимости исследуемой задачи и выписано представление решения.

Литература

1. *Киричинов Р. А.* Аналог задачи Дезина для уравнения параболо-гиперболического типа с условиями периодичности // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 259–272.

ЗАДАЧА С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Киричек В. А.

Самарский университет, Самара, Россия; Vitalya29@gmail.com

В докладе рассматривается задача: найти в области

$$Q_T = (0, l) \times (0, T)$$

решение уравнения

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + cu = f(x, t),$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0$$

и интегральным условиям

$$\alpha(t)u(0, t) + \int_0^l K_1(x)u(x, t)dx = 0, \quad \beta(t)u(l, t) + \int_0^l K_2(x)u(x, t)dx = 0, \quad (1)$$

где $\alpha, \beta \in C^2[0, T]$, причем $\alpha(0) = 0, \beta(T) = 0$.

Для исследования поставленной задачи метод, разработанный для доказательства разрешимости задачи с нелокальными условиями такого вида в предположении, что $\alpha(t), \beta(t)$ ни в одной точке $[0, T]$ не обращается в нуль [1], не применим. В докладе предлагается перейти к другому нелокальному условию, вид которого позволяет применить известный метод доказательства разрешимости поставленной задачи.

В работе доказаны эквивалентность вырождающихся условий (1) и динамических нелокальных условий и существование единственного решения поставленной задачи.

Для многомерного гиперболического уравнения случай вырождающегося только в точке $t = 0$ интегрального условия был рассмотрен в [2].

Литература

1. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
2. *Pulkina L. S.* Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral conditions // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016, no. 193. С. 1–12.

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ С КОНТАКТНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ковалева Л. А.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия; Kovaleva_L@bsu.edu.ru

На сегодняшний день задача Дирихле является одной из самых востребованных задач. Она возникает не только на плоскости, но и на многообразиях. Моделируя различные физические процессы получается набор уравнений с краевыми условиями Дирихле [1, 2].

В работах И. А. Лукьянчук, Ю. Н. Овчинникова [4] сформулирована задача о распределении поля и проводимости многокомпонентной системы, составленной из правильных треугольников. Эта задача может быть исследована в рамках теории, связанной с задачей Римана, описанной в работах А. П. Солдатова [3]. Именно эта задача легла в основу настоящей работы.

В пространстве \mathbb{R}^3 рассмотрим комплекс K , полученный из четырехугольной пирамиды путем выбрасывания основания. Общую вершину всех граней пирамиды обозначим τ_0 , остальные вершины $\tau_j, j = 1, 2, 3, 4$ распределим таким образом, что бы $M_1 = \{\tau_0\tau_1\tau_2\}$, $M_2 = \{\tau_0\tau_2\tau_3\}$, $M_3 = \{\tau_0\tau_3\tau_4\}$ и $M_4 = \{\tau_0\tau_4\tau_1\}$. Множество $F_j, j = 1, 2, 3, 4$ состоит из точек τ , соответствующих вершинам M_j , а их объединение $F = \bigcup_{j=1}^n F_j$.

Будем считать, что грани M_1, M_3 и M_2, M_4 попарно имеют равные углы при вершине τ_0 , которые обозначим соответственно θ_1 и θ_2 . Также нам необходимо обозначить стороны граней, которые в дальнейшем будем называть ребрами комплекса, следующим образом $L_l = \{\tau_0\tau_l\}$, $l = 1, 2, 3, 4$, $L_5 = \{\tau_1\tau_2\}$, $L_6 = \{\tau_2\tau_3\}$, $L_7 = \{\tau_3\tau_4\}$ и $L_8 = \{\tau_4\tau_1\}$. Сформулируем различные задачи, возникающие на рассматриваемом множестве.

Задача D состоит в определении семейства из четырех гармонических функций $u^j \in C(\overline{M_j} \setminus F_j)$, удовлетворяющих на ребрах L_l , $l = 1, 2, 3, 4$ следующим контактными условиям

$$u^4 = u^1, \quad \nu_2 \frac{\partial u^4}{\partial n} + \nu_1 \frac{\partial u^1}{\partial n} = 0 \text{ на } L_1, \quad u^1 = u^2, \quad \nu_1 \frac{\partial u^1}{\partial n} + \nu_2 \frac{\partial u^2}{\partial n} = 0 \text{ на } L_2,$$

$$u^2 = u^3, \quad \nu_2 \frac{\partial u^2}{\partial n} + \nu_1 \frac{\partial u^3}{\partial n} = 0 \text{ на } L_3, \quad u^3 = u^4, \quad \nu_1 \frac{\partial u^3}{\partial n} + \nu_2 \frac{\partial u^4}{\partial n} = 0 \text{ на } L_4.$$

Здесь n – нормаль, направленная внутрь грани M .

На ребрах L_l , $l = 5, 6, 7, 8$ выполнено условие Дирихле

$$u^j|_{L_l} = f_l, \quad l = 5, 6, 7, 8; \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (D)$$

Задача N формулируется аналогично с заменой условия (D) на ребрах L_l , $l = 5, 6, 7, 8$ на следующее

$$\nu_1 \frac{\partial u^i}{\partial n}|_{L_l} = (h_i)', \quad i = 1, 3, \quad l = 5, 7 \quad \text{и} \quad \nu_2 \frac{\partial u^i}{\partial n}|_{L_l} = (g_i)', \quad i = 2, 4, \quad l = 6, 8. \quad (N)$$

И наконец, опишем условия смешанной задачи DN , которая получена комбинированием условий на отрезках L_l , $l = 5, 6, 7, 8$. Таких комбинаций несколько, например, на L_1, L_2 задано условие (D), а на L_3, L_4 условие (N) или на L_1 задано условие (D), а на L_2, L_3, L_4 условие (N) и другие.

Поставленные задачи относятся к типу нелокальных краевых задач Римана. Основным результатом является нахождение формулы индекса и исследование поведения функции в угловых точках.

Литература

1. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. Об одной задаче теории функций // Доклады АМАН. 2007. Т. 9, № 2. С. 30–38.
2. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах // Известия РАН. Серия математическая. 2015. Т. 79, № 1. С. 77–114.
3. Солдатов А. П. Об индексе задачи Дирихле для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1092–1105.
4. Овчинников Ю. Н., Лукьянчук И. А. Проводимость и распределение токов в двухкомпонентной системе состоящей из правильных треугольников // ЖЭТФ. 2002. Т. 121, № 1. С. 239–252.

**НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ
ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ХАРАКТЕРИСТИКА ПЕРЕСЕКАЕТ
ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОСИ x -ОВ ПРЯМАЯ**

Кодзоков А. Х.^а, Батуева И. А.^б

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Нальчик, Россия; ^аkodzoko@mail.ru, ^бizabatueva23@mail.ru*

Рассмотрим уравнение

$$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0, \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезком $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, осью $\eta = 0$, характеристиками $AC : \xi + \eta = 0$; $BC : \xi - \eta = 1$ уравнения (1). С учетом характеристических переменных $x = \xi + \eta$, $y = \xi - \eta$ уравнение (1) примет вид

$$U_{xy} = 0. \quad (2)$$

Область Ω в этом случае перейдет в область Δ , ограниченную отрезками прямых $x = 0$, $y = 1$, $y = x$.

Задача. *Определить функцию $U(x, y)$ со следующими свойствами:*

1. $U(x, y) \in C^2(\Delta) \cap C^1(\bar{\Delta})$;
2. $U(x, y)$ – регулярное решение уравнения (1);
3. $U(x, y)$ – удовлетворяет граничным условиям

$$U(0; y) + U(1 - y; 1) = \delta_1(y), \quad \forall y \in \bar{I},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) (0; y) + \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) (1 - y; 1) = \delta_2(y), \quad \forall y \in I.$$

В данной работе доказана корректность нелокальной краевой задачи со смещением для уравнения колебания струны. Найдены условия, при которых нелокальная задача однозначно разрешима.

Литература

1. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
2. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающего гиперболического уравнения // ДАН. 1969. Т. 184, № 4. С. 736–739.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1977.
4. *Елеев В. А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных парабола-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 56–63.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Кожанов А. И.

*Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН,
Новосибирск, Россия; kozhanov@math.nsc.ru*

В докладе излагаются результаты о разрешимости обратных задач определения неизвестных коэффициентов в дифференциальных уравнениях математической физики. Особенностью изучаемых задач является то, что неизвестные коэффициенты в них представляют собой постоянные величины. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений – то есть решений, имеющих все обобщенные производные, входящие в соответствующее уравнение.

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ИОНКИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Кожанов А. И.

*Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН,
Новосибирск, Россия; kozhanov@math.nsc.ru*

Задачи Ионкина [1] исследовалась многими авторами и для различных классов дифференциальных уравнений, и при этом использовался оригинальный метод, предложенный собственно Н. И. Ионкиным – метод разложения решения по некоторым специальным биортогональным системам функций. В 2007 году в монографии А. М. Нахушева [2] и в недавних работах автора [3]–[5] были предложены новые подходы к исследованию задачи Н. И. Ионкина и близких к ней нелокальных задач. В докладе будет показано, что эти подходы применимы к широкому классу дифференциальных уравнений в частных производных, и что они позволяют простыми действиями получить ряд существенно новых результатов.

Литература

1. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
2. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
3. *Кожанов А. И.* Нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений // Доклады Академии наук. Серия: Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 509, № 1. С. 50–53.

4. *Кожанов А. И., Абдрахманов А. М.* Пространственно–нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для квази-параболических уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2023. Т. 20, № 1. С. 110–123.
5. *Kozhanov A. I.* Initial-boundary value problems with generalized Samarskii–Ionkin condition for parabolic equations with arbitrary evolution direction // SpringerLink. J. Math. Sci. 2023. Vol. 274, no. 4.

ТЕСТИРОВАНИЕ СПЕКТРА УЧАЙКИНА–ЗОЛОТАРЕВА ПО РАСЧЕТНЫМ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ ДЛЯ МЕЖЗВЕЗДНОЙ СРЕДЫ

Кожемякин И. И.^{1,а}, Литвинов В. В.²

¹ Ульяновский Государственный Университет, Ульяновск, Россия,

² Барнаульский юридический институт МВД России, Барнаул, Россия

^а *kozhylya@gmail.com*

Для описания распространения космических лучей (КЛ) в межзвездной среде (МЗС) необходимо построение адекватной модели последней. Важнейшим свойством этой среды является ее турбулентность, существенно влияющая на коэффициент диффузии [1]. Учёт этого влияния производится путём включения в диффузионное уравнение спектра мощности турбулентных пульсаций межзвёздного магнитного поля. Существует несколько представлений этого спектра – стандартный Колмогоровский спектр степенного типа, спектры Кармана, Крайчана, Ирошникова. Выведенные из гидродинамических соображений, они не отражают важнейшей особенности МЗС – наличия сильных локальных уплотнений (молекулярных облаков с вмороженными в них магнитными полями). В этом отношении более подходящим может оказаться спектр Учайкина–Золотарева [2], полученный из обобщенного уравнения Орнштейна–Цернике, где роль молекул играют молекулярные кластеры – облака. Статистическую интерпретацию он нашел в модели обрывающихся марковских цепей, узлы которых имитируют упомянутые уплотнения.

Это обстоятельство определило и выбор основного вычислительного инструмента – метода Монте-Карло. Предварительное тестирование, проведенное в [3] на данных численных расчетов и астрофизических измерений, подтвердило робастность этого критерия корреляций.

В настоящей работе мы продолжаем изучение особенностей спектра Учайкина–Золотарева теперь уже путем сопоставления его с другими модельными спектрами.

Литература

1. *Seo E. S., Ptuskin V. S.* Stochastic reacceleration of cosmic rays in the interstellar medium // The Astrophysical J. 1994. Vol. 431, no. 705. Pp. 705–714.

2. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications. VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999.
3. *Uchaikin V. V., Litvinov V. A., Kozhemyakina E. V., Kozhemyakin I. I.* A random walk model for spatial galaxy distribution // Mathematics. 2021. Vol. 9, no. 1. Pp. 98.

КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ ПОТОКОВЫХ СЕТЕЙ ВЫСОКОГО РАНГА ОПТИМАЛЬНОСТИ НА ДИНАМИЧЕСКОМ БАЗОВОМ ГРАФЕ

Кудаев В. Ч., Абазоков М. Б.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; Abazokov.Mukhammed@yandex.ru, valeriy.kudayev@mail.ru

Разработан метод компьютерного проектирования больших потоковых сетей высокого ранга оптимальности на динамическом базовом графе.

Задача синтеза разветвленной потоковой сети:

$$z(x) = \sum_{ij \in D} c_{ij}(x_{ij})l_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} x_{ij} - \sum_{k \in \Gamma_j^-} x_{jk} = g_i \quad \forall j \neq 1 \in B, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in \Gamma_j^-} x_{1j} = Q, \quad x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in D, \quad (3, 4)$$

где x_{ij} , c_{ij} , l_{ij} – соответственно искомое значение величины потока, заданные удельная стоимость и длина (i, j) -й дуги в заданном избыточном графе $\Gamma(B, D)$ возможных соединений вершин сети; B и D – соответственно множества вершин и дуг графа; Q – заданный поток в сеть; g_i – заданный расход потока в i -м узле сети. Γ_j^- и Γ_j^+ – соответственно множества дуг, входящих и исходящих из узла j . Функция $c_{ij}(x_{ij})$ для любой дуги $(i, j) \in D$ является гладкой и строго вогнутой. Вследствие этого локальный и глобальный экстремумы задачи могут достигаться только в вершинах транспортного многогранника (2)–(4). Задача является существенно многоэкстремальной.

Недостатки существующих методов решения задачи рассмотрены в монографии [1]. В [2] представлено возможное применение метода для проектирования больших трубопроводных сетей регионального и межрегионального водоснабжения.

Разработанный метод компьютерного проектирования больших потоковых сетей высокого ранга оптимальности состоит в том, что в процессе увеличения ранга оптимизации проектируемых сетей динамически

снижается размерность заданного избыточного графа возможных соединений узлов сети друг с другом. При этом базовый граф последующего ранга, являющийся подграфом исходного базового графа, формируется из сетей предыдущего ранга оптимальности. Метод обеспечивает компьютерное решение задачи трассировки больших сетей, содержащих более ста узлов, седьмого ранга оптимальности.

Определение. Пусть задано n деревьев $\Gamma_1(B, D_1), \Gamma_2(B, D_2), \dots, \Gamma_n(B, D_n)$, где B – множество вершин, D_i – множество всех ветвей i -го дерева $i = (1, n)$. При этом $D_1 \neq D_2 \neq \dots \neq D_n$, т.е. деревья различны по ветвям, но одинаковы по вершинам. Разреженным базовым графом (РБГ) будем называть граф $\text{РБГ} = \Gamma(B, D)$, где $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$.

Алгоритм оптимизации на динамическом базовом графе:

1. Задается N альтернативных начальных остоновых деревьев (НОД).
2. Определяется наибольший ранг оптимизации с заданного НОД на исходном базовом графе (ИБГ) в течении заданного времени $T - P_{n,T}$ (в дальнейшем будем писать просто P).
3. С каждого НОД проводится оптимизация P -го ранга на ИБГ.
4. Выводятся результаты оптимизации (структура сети, стоимость и значения потоков по ее ветвям). Эти результаты отправляются в пункт 5.1.

5. Переменной i присваиваются все значения от 1 до $N - 2$ включительно $i = \overline{1, N - 2}$ и для каждого значения i проводятся следующие операции (пункты 5.1–5.4).

5.1. Из $N - i$ наилучших решений (наименьший по стоимости) формируется РБГ $(P + i - 1)$ -го ранга РБГ^{P+i-1} .

5.2. На графе РБГ^{P+i-1} с решений, полученных в пункте 5.1, проводится оптимизация $(P + i)$ -го ранга. Результаты оптимизации отправляются в пункт 5.3.

5.3. Полученные в пункте 5.2 решения переносятся на ИБГ и проводится их оптимизация $(P - 1)$ -го ранга. Заметим, что значение $(P - 1)$ не зависит от переменной i , т. е. оно неизменно (фиксировано).

5.4. Полученные в пункте 5.3 решения отправляются в пункт 5.1.

Был проведен вычислительный эксперимент, показавший эффективность метода. Ниже представлены сети высокого ранга с существенно различной структурой и их стоимость в условных единицах.

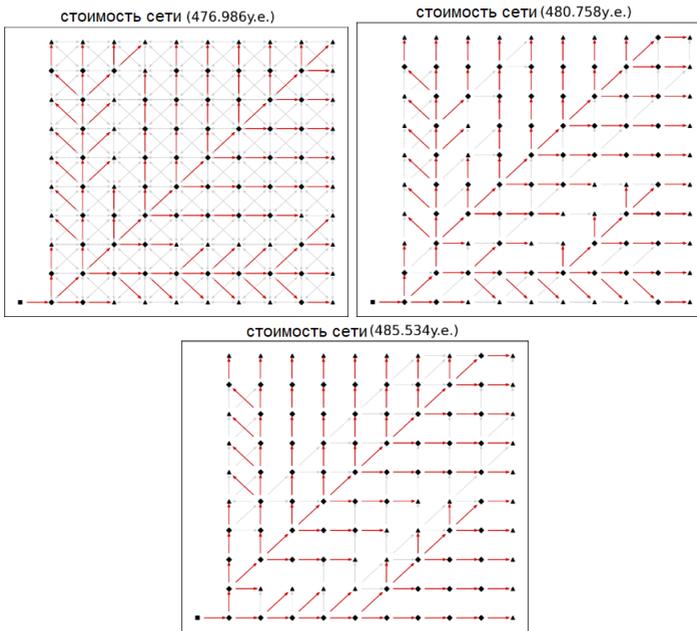


Рис. 1. Сети высокого ранга с существенно различной структурой.

Литература

1. Меренков А. П., Сеннова Е. В., Сумароков С. В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.
2. Абазоков М. Б., Кудяев В. Ч. Трассировка больших разветвлённых трубопроводных гидравлических сетей высокого ранга оптимальности на динамическом базовом графе // Известия КБНЦ РАН. 2023. Т. 114, № 4. С. 39–54.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 4-ГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

Кулаев Р. Ч.

Научно-образовательный математический центр СОГУ
 Южный математический институт ВНИЦ РАН, Владикавказ, Россия
 kulaevrch@mail.ru

В докладе обсуждаются осцилляционные спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка на графе Γ :

$$L_{\lambda} u \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2} \left(p(x) \frac{d^2 u}{d\Gamma^2} \right) - \frac{d}{d\Gamma} \left(q(x) \frac{du}{d\Gamma} \right) = \lambda \rho(x) u, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Gamma} = (\vartheta u' - \beta u'')|_{\partial\Gamma} = 0,$$

где $\partial\Gamma$ — множество граничных вершин Γ . При этом, под дифференциальным уравнением в (1) мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')' - (q_i(x)u_i')' = \lambda\rho_i(x)u_i, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma),$$

и набор условий согласования в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i \in I(a),$$

$$\sum_{i \in I(a)} [(p_i u_i'')' - q_i(a)u_i'(a)] = \lambda\rho(a)u(a), \quad a \in J(\Gamma).$$

Всюду далее мы используем терминологию и обозначения работ [1, 2]. Считается, что выполнены условия:

- $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$ и $q \in C^1[(\Gamma)]$, $q(x) \geq 0$ в $E(\Gamma)$;
- $\rho \in C[\Gamma]$, $\rho(x) > 0$ в Γ ;
- $\beta_i(a) \geq 0$, $\vartheta_i(a) \geq 0$ и $\beta_i(a) + \vartheta_i(a) > 0$ для всех $a \in V(\Gamma)$, $i \in I(a)$;
- для любого ребра $\gamma_i = (a, b)$ положительна по крайней мере одна из величин $\max_{x \in \gamma_i} |q(x)|$, $\vartheta_i(a)$, $\vartheta_i(b)$.

Теорема 1. Дифференциальный оператор L_λ , краевой задачи (1), является самосопряженным. Спектр Λ оператора L_λ дискретен, т.е. существует неограниченная последовательность положительных собственных значений $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ такая, что $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \dots$

Теорема 2. Пусть граф Γ является деревом. Тогда кратность любого собственного значения дифференциального оператора L_λ не превосходит $|\partial\Gamma| - 1$, где $|\partial\Gamma|$ — число граничных вершин графа.

Предположим, что граф Γ является деревом. Обозначим через $J_{3+}(\Gamma)$ множество всех узловых вершин графа Γ кратности не меньше трех.

Для любой вершины $a \in J_{3+}(\Gamma)$ обозначим через $\Gamma_i(a)$ ветвь Γ , содержащую ребро γ_i , $i \in I(a)$. Через $\Lambda_i(a)$ мы обозначаем спектр краевой задачи

$$L_\lambda u = 0, \quad x \in \Gamma_i(a),$$

$$u|_{\partial\Gamma_i(a)} = u'|_{\partial\Gamma_i(a) \setminus a} = 0, \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_{i\nu}'(a) = 0.$$

Теорема 3. Пусть граф Γ является деревом и для любой вершины $a \in J_{3+}(\Gamma)$ спектры $\Lambda_i(a)$, $i \in I(a)$, попарно не пересекаются. Тогда

1. Все собственные значения λ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) оператора L_λ вещественные, положительные и простые;
2. Собственная функция φ_k , соответствующая собственному значению λ_k , имеет ровно k нулей в Γ ;

3. Если $x_0 \in \Gamma$ является нулем собственной функции φ_k , то $x_0 \in E(\Gamma)$ и φ_k меняет знак точке x_0 .

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2023-939.

Литература

1. Kulaev R. Ch. The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph // *Mediterr. J. Math.* 2022. Vol. 19:73.
2. Kulaev R. Ch., Urtaeva A. A. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2023. Pp. 1–21.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ОБЛАЧНОЙ СРЕДЫ НА ФОРМИРОВАНИЕ ГРОЗ УМЕРЕННЫХ ШИРОТ

Кумыков Т. С.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; tacist20@mail.ru*

В последние десятилетия значительно расширились исследования явлений и процессов, протекающих в конвективных облаках, в которых облако рассматривается как фрактальный объект [1, 2]. Считая грозовое облако фрактальным объектом с фрактальной структурой или просто фрактальной средой, в работе рассматривается грозовая модель кучево-дождевых облаков смешанной структуры, в которой учитывается влияние параметра фрактальности среды на механизм электризации гидрометеоров.

Если среда фрактальная, то это означает, что она с нецелой массовой размерностью D , которая является количественной характеристикой одной из особенностей самоорганизующейся грозовой системы. Процессы, протекающие в такой среде, хорошо описываются дифференциальными уравнениями, содержащими производные дробного порядка [3].

В рассматриваемой модели большие скорости образования зарядов на гидрометеорах объясняются с позиции существования механизмов «мгновенного» действия, к которым можно отнести механизм электризации при соударении и разрушении крупных гидрометеоров в электрическом поле.

Учет фрактальных свойств в модели грозового облака осуществляется с помощью применения понятия эффективной скорости изменения некоторой физической величины p , определяемой как и в работе [4], но с переменным показателем дробной производной в следующем виде

$$\left\langle \frac{dp(t)}{dt} \right\rangle = \int_0^t g(t-t') \frac{dp(t')}{dt'} dt' = \frac{1}{\tau^{1-\alpha(t)}} D_{0t}^{\alpha(t)-1} \frac{dp(t)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{\tau^{1-\alpha(t)}} \partial_{0t}^{\alpha(t)} p(t), \quad 0 < \alpha(t) < 1,$$

где $g(t)$ – функция памяти, t – безразмерное время, отнесенное к характерному времени процесса τ , $D_{at}^{\alpha(t)} f$ – оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля, $\partial_{0t}^{\alpha(t)} p(t)$ – дробная производная Герасимова–Капуто переменного порядка $\alpha(t)$, определяемая в виде [5]

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m - \alpha(t))} \int_0^t \frac{p^{(m)}(\theta) d\theta}{(t - \theta)^{\alpha(t)+1-m}}, & 0 \leq m - 1 < \alpha(t) < m, \\ \frac{d^m p(\theta)}{dt^m}, & m \in N. \end{cases}$$

При этом допуская, что основным механизмом генерации зарядов во фрактальной грозовой среде является электризация при соударении градин с каплями в электрическом поле получено выражение для заряда градины в следующем виде

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} q_i(t) = (Ar_i^2 E v_i - f q_c(t)) \tau^{1-\alpha(t)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

где $q_i(t)$ – заряд градины; $A = \pi \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} n(r_k) a(r_k, r_i) \left(1 - \frac{v_k}{v_i}\right) dr_k = \text{const}$; $a(r_k, r_i)$ – размер градины после соударения с каплей; $q_c(t)$ – заряд, уносимый каплями; v_k и v_i – конечная скорость падения градины и капли; E – напряженность электрического поля.

Для (1) справедливо начальное локальное условие

$$q(0) = q_0. \quad (2)$$

Уравнение (1) и начальное условие (2) образуют задачу Коши для дробного уравнения генерации зарядов градин в рассматриваемой модели, а ее решение описывает процесс электризации градин в кучево-дождевых облаках умеренных широт, в котором учитывается фрактальность облачной среды.

На основе предлагаемой модели можно сказать, что электрофизические процессы, протекающие в грозовых облаках тесно связаны с фрактальностью самой среды и, что предложенная полуэмпирическая модель вполне удовлетворительно описывает основные черты рассматриваемого процесса электризации градин.

Литература

1. *Мареев Е. А. и др.* Российские исследования атмосферного электричества в 2011–2014 гг. // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52, № 2. С. 175–186.
2. *Kumykov T. S.* Charge accumulation in thunderstorm clouds: fractal dynamic model // E3S Web of Conferences. 2019. Vol. 127, 01001.

3. Псху А. В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2005. 185 с.
4. Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма ЖТФ. 2004. Т. 30, № 2. С. 33–37.
5. Паровик Р. И. Хаотические и регулярные режимы дробных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2019. 132 с.

МОДЕЛЬ ПОСТРОЕНИЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА ДОЖИТИЯ

Кундетова Л. М., Ширитов А. А.

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Нальчик, Россия;*

Рассмотрим продольный анализ моделируемой проблематики. Предположим, что p – количество рожденных в определенный момент времени t_0 людей. Отметим, что время и возраст для представителей одного поколения связаны взаимно однозначно. Таким образом можно сказать, что переменная τ участвующая в моделировании является одновременно и временной переменной и возрастом. Тогда $p(\tau)$ – число людей, доживших до возраста τ . Обозначим функцию дожития через $V(\tau)$. Данная функция отражает долю доживших до возраста τ от начальной численности, т. е.:

$$V(\tau) = \frac{p(\tau)}{p}, \quad V(0) = 1, \quad V(\tau) = 0. \quad (1)$$

Учитывая введенные обозначения справедливо выражение:

$$p(\tau + \Delta\tau) = p(\tau) - m(\tau) \Delta\tau + o(\Delta\tau) \quad (2)$$

здесь $m(\tau)$ – интенсивность потока смертей в возрасте τ , причем

$$\int_0^{\infty} m(\tau) d\tau = p. \quad (3)$$

Приведем (2) к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = -\mu(\tau)p(\tau). \quad (4)$$

Решением которого является функция

$$p(\tau) = p * \exp\left(-\int_0^{\tau} \mu(t) dt\right). \quad (5)$$

Здесь $\mu(\tau) = \frac{m(\tau)}{p(\tau)}$ – повозрастная смертность. Из (5) получаем, что функция дожития имеет вид:

$$V(\tau) = \exp\left(-\int_0^{\tau} \mu(t)dt\right) \quad (6)$$

Поскольку модель строится в продольном анализе, то средняя продолжительность жизни T моделируемого поколения совпадает со средним возрастом смерти. Следовательно,

$$\bar{T} = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \tau \mu(\tau) p(\tau) \quad \text{или} \quad -\int_0^{\infty} \tau \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_0^{\infty} V(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Скорректируем модель (6), (7) в части динамики смертности при старении. Воспользуемся уравнением Гомперца–Мейкема, которое имеет следующий вид:

$$\mu(\tau) = R_0 e^{a\tau} + A, \quad (8)$$

где μ – смертность, R_0 – начальный уровень смертности, константа a , характеризующая скорость нарастания смертности со временем, A – независимый от возраста компонент смертности. Заметим, что именно этот компонент в большей мере отражает эколого-социальную природу моделируемого объекта.

Уравнения (6), (8) представляют собой модель дожития. Для оценки ее динамики представим (8) в полулогарифмических координатах. Учитывая, что аддитивная поправка Мейкема A дает отклонение от прямой линии зависимостей, то чтобы получить в правой части уравнения (8) чистую экспоненту дифференцируем уравнение Гомперца–Мейкема. График в полулогарифмических координатах будет прямой линией с тангенсом угла наклона к оси времени равным a , пересекающей ось ординат в точке $R_0 a$. Значения R_0 – характеризующее значение смертности в начальный момент $t = 0$, а также a –темп старения, легко находятся из указанного выше графика. Далее рассчитаем поправку Мейкема, которую будем представлять как разность между наблюдаемым значением смертности и ее возрастной компонентой, описываемой экспонентой.

При вычислении параметров уравнения Гомперца–Мейкема используются, в основном, методы нелинейной регрессии. Однако для нашей модели достаточно четырехточечного алгоритма, описанного в [1].

Полученные результаты моделирования оценены способом оценки параметров уравнения Гомпер–Мейкейма и сравнены с оценками рассчитанными для таблицы дожития, реализованными компьютерным алгоритмом аппроксимацией параметров нелинейной модели методом наименьших квадратов. Сравнимые данные отличаются друг от друга с

погрешностью $\varepsilon = 0,0001$ в пользу последних. Учитывая, что речь идет о возрастных характеристиках возможно сделать заключение, что математическая модель (6), (8) в продольном анализе является хорошим приближением для построения таблиц дожития, необходимых для анализа не только в демографии, но и в страховых расчетах.

Работа выполнена в рамках проекта Приоритет 2030.

Литература

1. Крутько В. Н., Донцов В. И., Смирнова Т. М. Теория, методы и алгоритмы диагностики старения // Труды ИСА РАН. 2005. Т. 13.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ К ЗАДАЧАМ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ АТМОСФЕРНОГО ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ

Куповых Г. В.¹, Белоусова О. В.²

*Институт компьютерных технологий и информационной безопасности
ЮФУ, Таганрог, Россия; ¹kupovykh@sfsedu.ru, ²obelousova@sfsedu.ru*

Постановка задачи. Основной задачей электродинамики приземного слоя атмосферы (ПСА) является нахождение пространственно-временных распределений ее электрических характеристик: концентраций полярных аэроионов ($n_{1,2}$) и электрического поля (E). Электродинамическая модель горизонтально-однородного свободного от аэрозоля ПСА в приближении электродного эффекта состоит из ионизационно-рекомбинационных уравнений для полярных аэроионов и уравнения Пуассона для электрического поля [1]:

$$\frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z}(b_{1,2} \cdot n_{1,2} E) - \frac{\partial}{\partial z}(D_T(z) \frac{\partial n_{1,2}}{\partial z}) = q - \alpha n_1 n_2, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_1 - n_2), \quad (1)$$

где $b_{1,2}$ – подвижности полярных аэроионов, α – их коэффициент рекомбинации, $D_T = D_1 \cdot z$ – коэффициент турбулентной диффузии аэроионов, q – скорость ионизации, e – элементарный заряд, ε_0 – электрическая постоянная.

Для исследования математической модели (1) используем методы теории подобия. Осуществим замену переменных, используя характерные значения и масштабы входящих в них физических величин:

$$t' = t/T, \quad z' = z/l_1, \quad n'_{1,2} = n_{1,2}/n_\infty, \quad E' = E/E_\infty, \quad n_\infty = \sqrt{q_\infty/\alpha}, \\ l_1 = D_T \cdot \tau, \quad \tau = (q_\infty \alpha)^{-1/2} \quad (2)$$

Тогда получаем уравнения (1) в безразмерной форме:

$$\frac{\tau}{T} \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial z'} \left(z' \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial z'} \right) \pm \xi_{1,2} \frac{\partial}{\partial z'} (n'_{1,2} E') = \frac{q}{q_\infty} - n'_1 n'_2, \quad \frac{\partial E'}{\partial z'} = \gamma (n'_1 - n'_2).$$

Знак « ∞ » означает верхнюю границу электродного слоя.

Характерное время протекания метеорологических гидродинамических процессов (T) составляет несколько часов, тогда как время жизни аэроиона $\tau = 250$ с при $q_\infty = 10^7 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$ и $\alpha = 1,6 * 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$. В систему (2) входят два безразмерных параметра (критерии подобия):

$$\xi_{1,2} = \frac{|b_{1,2}| \cdot E_\infty \cdot \tau}{l_1}, \gamma = \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{n_\infty}{E_\infty} l_1.$$

Когда параметр $\xi_{1,2} \geq 1$, имеет место классический электродный эффект [2, 3], то есть пространственно-временное распределение аэроионов в приземном слое обусловлено только электрическими силами. Из системы (1) следует:

$$\frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} \pm b_{1,2} \frac{\partial (E \cdot n_{1,2})}{\partial z} = q(z) - \alpha n_1 n_2, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_1 - n_2).$$

Введем обозначения (2) и получим следующие безразмерные уравнения:

$$\tau \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial t} \pm \tau b_{1,2} E_\infty \frac{\partial (n'_{1,2} E')}{\partial z} = 1 + \frac{q}{q_\infty} - n'_1 n'_2. \quad (3)$$

В уравнениях (3) параметр $L_{nE} = b_{1,2} E_\infty \tau$ является характерным пространственным масштабом, имеющим смысл высоты классического электродного слоя, а параметр $\tau = (q_\infty \alpha)^{-1/2}$ есть время электрической релаксации. Оценим значения параметров τ и L_{nE} . В случае $E_0 = -100$ В/м получаем $\tau = (7 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12})^{-1/2} \approx 300$ с ($q_\infty = 7 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ м}^{-3} \text{ с}$) и $L_{nE} = 1,4 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \cdot 300 \approx 4,2$ м ($E_\infty = -100$ В/м, $b_{1,2} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$).

Если $\xi_{1,2} < 1$, имеет место турбулентный электродный эффект [2, 3], когда перенос аэроионов в атмосфере осуществляется, в том числе, и турбулентными потоками воздуха.

$$\frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} \pm b_{1,2} \frac{\partial (E \cdot n_{1,2})}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_T(z) \frac{\partial n_{1,2}}{\partial z} \right) = q(z) - \alpha n_1 n_2, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_1 - n_2).$$

С помощью (2) получим безразмерные уравнения:

$$\tau \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial t} \pm \tau b_{1,2} E_\infty \frac{\partial (n'_{1,2} E')}{\partial z'} - D_1 \tau \frac{\partial}{\partial z'} \left(z' \frac{\partial n'_1}{\partial z'} \right) = 1 + \frac{q}{q_\infty} - n'_1 n'_2. \quad (4)$$

В уравнениях (4) можно выделить ряд параметров: $L_{nE1} = b_1 E_\infty \tau$, $L_{nE2} = b_2 E_\infty \tau$, $L_D = D_1 \tau$, $\tau = (q\alpha)^{-1/2}$. При $D_1 = 0,1$ м/с, $E_\infty = -100$ В/м и $\tau \approx 300$ с, получаем значения для $L_{nE1} = 3,6$ м ($b_1 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$), $L_{nE2} = 4,2$ м ($b_2 = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$), как и в классическом случае, а турбулентный перенос дает масштаб $L_D = 30$ м.

Если $\xi_{1,2} \ll 1$, имеет место приближение сильного турбулентного перемешивания [2, 3], когда перенос аэроионов осуществляется только турбулентной диффузией. В этом случае система (1) расщепляется по малому параметру $\xi_{1,2}$ на два уравнения, первое из которых описывает распределение аэроионов (и, следовательно, электрической проводимости воздуха λ) под действием только турбулентного переноса, а решением другого является профиль электрического поля с учетом рассчитанных значений проводимости [2].

$$-\frac{d}{dz} \left(D_T(z) \frac{dn_{1,2}}{dz} \right) = q - \alpha n_1 n_2, \quad -D_T(z) \frac{d^2 E}{dz^2} + \lambda(z) E = j_0 / \varepsilon_0, \quad (9)$$

где j_0 – плотность электрического тока. Характерный масштаб турбулентного электродного слоя равен $L_m = (\varepsilon_0 D_m / \lambda_\infty)^{1/(2-m)}$ и зависит от параметра стратификации (m) приземного слоя.

Представлен анализ математических моделей электродинамических процессов в приземном слое для различных условий в атмосфере.

Литература

1. *Куповых Г. В.* Электродинамические процессы в приземном слое атмосферы. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. 114 с.
2. *Куповых Г. В., Морозов В. Н., Шварц Я. М.* Теория электродного эффекта в атмосфере. Изд-во ТРТУ, 1998. 123 с.
3. *Куповых Г. В., Тимосенко Д. В., Клово А. Г., Кудринская Т. В.* Electrodynamical processes models in atmospheric surface layer // CATPID-2019. IOP Conf. Series: Materials Science and Engin. 2019. Vol. 698. 044034. P. 8.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ

Ласурия Р. А.

*Абхазский государственный университет, Сухум, Абхазия
rlasuria67@yandex.ru*

В работе продолжают исследования автора, начатые в 2003-2023 в отношении аппроксимационных свойств пространств $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ функций, заданных на сфере σ^{m-1} (см., например, [1]). На основании этих пространств вводятся новые пространства типа Гельдера–Никольского, в которых нормы элементов учитывают поведение величин типа модулей непрерывности, порождаемые семейством операторов мультипликаторного типа.

Исследуются аппроксимационные свойства этих пространств с точки зрения прямых и обратных теорем типа Джексона и Бернштейна.

Литература

1. *Ласурия Р. А.* О величинах типа модулей непрерывности и аналогах K -функционалов в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ // Матем заметки. 2023. Т. 113, № 2. С. 251–264.

**МЕТОД СУММАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА,
ОПИСЫВАЮЩЕГО МИКРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ
В ОДНОФАЗНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ОБЛАКАХ**

Лафишев М. Х.¹, Ашабоков Б. А.², Хибиев А. Х.¹

¹*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН*

²*Институт информатики и проблем регионального управления*

КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; akhhibiev@gmail.com

Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным источником возникают при описании функции распределения капель и ледяных частиц, изменения функции распределения капель за счет процессов конденсации, коагуляции капель, дробления и замерзания.

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leq T]$, основанием которого служит прямоугольный параллелепипед $G = x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p$ с границей Γ , рассматривается для функции распределения по массам капель задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, m, t), (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, u(x, m, 0) = u_0(x, m), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \\ - \frac{1}{p} q(x, m, t) u(x, m, t) + \frac{1}{p} \int_0^{m_1} Q(m, m') P(m') u(x, m', t) dm' - \\ - \frac{1}{p} u(x, m, t) \int_0^{m_1} \alpha_1(m, m') u(x, m', t) dm' + \\ + \frac{1}{p} \int_0^{m_1} \beta_1(m, m - m') u(x, m - m', t) u(x, m', t) dm' - \\ - \frac{1}{p} 4\pi \rho r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial}{\partial m} u(x, m, t), \end{aligned}$$

$\beta_1(m, m') = \pi (r(m) + r(m'))^2 \cdot |V_1(m) - V_1(m')| E(m, m')$, $r(m), r(m')$ – радиусы сталкивающихся частиц, $V_1(m), V_1(m')$ – их скорости падения, $E(m, m')$ – коэффициент захвата для капель.

Задача (1)–(2) записаны с учетом изменения функции распределения капель за счет микрофизических процессов конденсации, коагуляции капель, дробления и замерзания.

Для решения задачи (1)–(2) построена локально-одномерная схема, доказана ее устойчивость по начальным данным и правой части, откуда следует ее сходимость.

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ

Лосанова Ф. М.^а, Кенетова Р. О.^б

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; ^аlosanovaf@gmail.com, ^бraisa.kenetova@mail.ru*

Рассмотрим популяционную модель, которая живет изолированно в неизменной среде или существует с другими видами без прямого или косвенного влияния, представляющей всегда одни и те же возможности существования.

В качестве основной функции, характеризующей состояние популяции, т.е. плотность численности популяции возьмем функцию $u(x, t)$, где x – возраст особей в момент времени t . Для определенности будем считать, что $x \in (0, 1)$. Предположим, что $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$.

Закон сохранения для популяции запишем в виде

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x, t) + \lambda \partial_{0t}^{\beta} u(x, t) + c(x)u(x, t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k u(x_k, t) = f(x, t), \quad (1)$$

где λ, λ_k – некоторые постоянные, причем $\lambda \neq 0$, а также $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, x_k – фиксированные точки из интервала $(0, 1)$, для которых будем считать, что $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$; $\partial_{0x}^{\alpha} u(x, t)$ – изменение количества особей возраста x при фиксированном t , $\partial_{0t}^{\beta} u(x, t)$ – изменение количества особей в разное время для фиксированного x ; $\partial_{0x}^{\alpha}, \partial_{0t}^{\beta}$ – это дробные производные (Герасимова-Капуто); $f(x, t), c(x)$ – заданные функции: $c(x)$ – функция смертности, $f(x, t)$ – описывает различные демографические процессы и непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega}$.

Решение $u(x, t)$ уравнения (1) назовем *регулярным* в области Ω , если выполнены условия $u(x, t) \in C(\bar{\Omega}), \partial_{0x}^{\alpha}, \partial_{0t}^{\beta} \in C(\Omega)$.

К уравнению (1) присоединим условия

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

Условие (3) характеризует начальную плотность популяции, где $\tau(x)$ – начальное распределение популяции по возрастам, которое непрерывно на $[0, 1]$.

Исследуется следующая

Задача. В области Ω требуется найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3).

Литература

1. Песту А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Лютикова Л. А.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; lylarisa@yandex.ru*

В данной работе предлагается подход для выявления логических закономерностей, которые возникли в обученной нейронной сети без учета ее структуры и значения весов этой нейронной сети.

Данный подход можно отнести к так называемым моделям по аналогии или модели независимым методами. Эти методы интерпретации предоставляют возможность объяснить работу моделей машинного обучения без знания их внутренней структуры или алгоритмов. Предполагается, что можно получать информацию о модели, анализируя ее входы и выходы, не имея специфических знаний о том, как модель была обучена или как она функционирует внутри. В работе будет рассмотрен метод логической интерпретации решений нейронной сети, который основывается на использовании булевого интегро-дифференциального исчисления [1].

Как уже упоминалось, основная цель интерпретации решений нейронной сети состоит в том, чтобы понять, какие признаки входных данных наиболее важны для принятия решений сетью и какие закономерности она находит в данных. В результате интерпретации можно получить полезную информацию о том, как сеть работает и как ее можно улучшить, а также понять природу самих данных.

Предлагаемый метод может быть применим для задач классификации, в тех случаях, когда входные и выходные данные могут быть перекодированы дискретными значениями, что означает преобразование непрерывных или категориальных признаков в дискретные. Другим условием будет возможность представить каждый признак в виде k -значной переменной. Тогда математическая постановка задачи имеет следующий вид.

Пусть

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad x_i \in \{0, 1, \dots, k_i - 1\},$$

где $k_i \in [2, \dots, N]$, $N \in \mathbb{N}$ – множество входов нейронной сети. $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ – множество выходов, каждый выход – результат обработки нейронной сетью конкретных значений на входе $x_i(y_i), \dots, x_n(y_i): y_i = f(x_1(y_i), \dots, x_n(y_i))$:

$$\begin{pmatrix} x_1(y_1) & x_2(y_1) & \dots & x_n(y_1) \\ x_1(y_2) & x_2(y_2) & \dots & x_n(y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(y_m) & x_2(y_m) & \dots & x_n(y_m) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Будем строить функцию $Y = f(X)$ по входным данным и результатам на выходе нейронной сети [2], [3].

В сравнение с другими моделям интерпретации предложенный подход обладает рядом достоинств и недостатков. На данном этапе, в практическом приложении он не может претендовать на универсальность. Например, при обработки естественного языка более адекватными являются интерпретационные модели аттеншен (attention), визуализация весов аттеншен и другие аналитические инструменты.

Данный подход не проводит внутреннее исследование «черного ящика». Для проведения внутреннего исследования «черного ящика» в нейронных сетях можно использовать библиотеку Lucid, разработанную в Google.

Метод применим, когда нам необходимо понять исследуемую область. Выявить скрытые логические закономерности в данных, создать модель, которая способна корректирует работу нейросетевого метода при наличии неточных или зашумленных данных. Кроме того, интерпретационная модель может стать методом машинного обучения, обладающим такими преимуществами, как модифицируемость и возможностью минимизации данных, необходимых для корректного решения

Литература

1. Ashley I. Naimi L., Balzer B. Multilevel generalization: an introduction to super learning // European Journal of Epidemiology. 2018. Vol. 33. Pp. 459–464.
2. Кривуля Г. Ф., Давыдов А. А. Оптимизация бинарных решающих деревьев при интеллектуальной диагностике компьютерных систем // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2010. Т. 47, № 6. С. 260–265
3. Кривуля Г. Ф., Давыдов А. А. Оперативное функциональное диагностирование технических объектов с применением темпоральных деревьев решений // Сборник научных трудов конференции «Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта», Евпатория, 2013. С. 193–195.

ДРОБНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ ОПЕРАТОРОВ ЛАПЛАСА И РАЗМЕРНОСТИ САМОПОДОБИЙ КЛАССИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ ПО МЕРЕ ЛЕБЕГА–КИПРИЯНОВА

Ляхов Л. Н., Санина Е. Л.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
levnlya@mail.ru; sanina08@mail.ru

1. О представлении операторов Бесселя дробного индекса оператором Лапласа–Бесселя радиальных функций.

Используя результаты работы [1], в [2] получены два вида такого представления: если $\gamma = [\gamma] + \{\gamma\} = n - 1 + \{\gamma\}$, то

$$B_{\gamma}u = \Delta_n u + \frac{\{\gamma\}}{x_1} \frac{du}{dx_1}, \quad B_{\gamma}u = \Delta_{n+1}u(|x|) + \frac{\{\gamma\} - 1}{x_1} \frac{du(|x|)}{dx_1},$$

где B_γ – сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, отвечающий параметру $\gamma > -1$. Таким образом оператор Бесселя с дробным параметром оказался промежуточным между операторами Лапласа в евклидовых пространствах размерности n и $n + 1$. Аналогичная ситуация с интегральными операциями:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(r) r^{n-1+\{\gamma\}} dr &= \frac{|S_1(n)|_0}{|S_1(n)|_\gamma} \int_{\mathbb{R}_n} f(|x|) x_1^{\{\gamma\}} dx = \\ &= \frac{|S_1(n)|_0}{|S_1(n+1)|_{\gamma-1}} \int_{\mathbb{R}_n} f(r) r^{\gamma-1} dr, \end{aligned}$$

где через $|S_1(k)|_\gamma$ обозначена площадь взвешанной единичной сферы в евклидовом пространстве \mathbb{R}_k . Мету $d\mu(x) = x^\gamma dx = \prod x_i^{\gamma_i} dx$, $-1 < \gamma_i < 0$ будем называть *интегральной мерой Лебега–Киприянова*.

2. Размерность Хаусдорфа–Безиковича областей, порожденная скрытой сферической симметрией.

Исследования в области фундаментальной физики привели к пониманию того, что именно симметрия обуславливает взаимосвязи сил в природе. «Математический анализ сил, ответственных за формирование материи, ... выявляет наличие скрытых симметрий с тонкими свойствами» (см. [3] с. 12). Такие «скрытые симметрии с тонкими свойствами» здесь (а также в [1] и [2]) проявились на основе меры $d\mu(x)$.

Размерность Хаусдорфа–Безиковича d_H представляет собой «критическое число» такое, что мера M_d множества Ω изменяет значение с нуля на бесконечность:

$$M_d = \sum \eta(d) \delta^d = \eta(d) N(\delta) \delta^d \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } d > d_H \\ \infty & \text{при } d < d_H \end{cases}$$

где $\eta(d)$ – геометрический коэффициент, зависящий от формы элементов, покрывающих множество (см. в [4] формулу (2.3)).

Предположим наличие скрытой сферической симметрии с параметрами

$$\gamma(\varepsilon) = (\gamma_1(\varepsilon), \dots, \gamma_n(\varepsilon)), \quad -1 < \gamma_i(\varepsilon) \leq 0.$$

В каждом шаре покрытия введем соответствующие локальные координаты. Тогда получим равенство

$$d_H = n + |\gamma| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Здесь выражение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = d_f$$

хорошо известная клеточная размерность Хаусдорфа–Безиковича.

Число γ_i ($\gamma_i > -1$) назовем коэффициентом скрытой сферической симметрии евклидовой области интегрирования Ω .

Теорема. Если совпадают хаусдорфова и фрактальная размерности $d_H = d_f$ области $\Omega \in \mathbb{R}_n$, то существует коэффициент $|\gamma|$ скрытой сферической симметрии области Ω равный $|\gamma| = d_f - n$.

Проверить присутствия скрытой симметрии возможно вычислением размерности самоподобий простейших фракталов.

Утверждение. Коэффициент скрытой сферической симметрии γ самоподобных структур, удовлетворяющих условию $d_H = d_f$ и отвечающих масштабу $\varepsilon(m) = 1/m$, где m соответствующее натуральное число, вычисляется из уравнения

$$n + |\gamma(m)| = -\frac{\ln \frac{|S_1^+(n)|_{\gamma(m)}}{n+|\gamma(m)|}}{\ln \varepsilon(m)} + d_f. \quad (1)$$

Приведенная формула, по сути, эмпирическая. Здесь числа d_f и натуральное число n считаются известными, поэтому приведенное выше уравнение – уравнение относительно $|\gamma|$.

Вычислительная проверка формулы (1) проведена на примере вычисления размерности классических самоподобий (предканторового множества, поколений кривой Коха, ковра Серпинского и пр.). В докладе будут приведены результаты некоторых вычислений.

Литература

1. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 12. С. 1610–1620.
2. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и о размерности поколений кривой Коха // Матем. заметки. 2023. Т. 113, вып. 4. С. 527–537.
3. Девис П. Суперсила. Поиск единой теории природы. М.: Мир, 1989. 279 с.
4. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОБИЛИЗАЦИИ ОРГАНИЗАЦИИ

Магомедова Е. С.^a, Магомедов Р. И.^b

Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия;

^amagomedova.e.s@mail.ru, ^bneocorpor@ya.ru

Под термином организации понимается любая государственная, политическая, социальная или общественная организация, которая пытается привлечь население региона в свои ряды.

Текущая организация и уровень мобилизации всегда связаны с уровнем пропагандистской кампании, и при построении модели необходимо учитывать состояние населения региона от времени, т.е. модель должна быть динамической. Для части населения региона данная мобилизация региона может не иметь смысла.

Обозначим через $x(t)$ часть населения, для которой мобилизация может иметь смысл и в момент времени t может быть привлечена к мобилизации. Тогда, за малый промежуток времени Δt будет мобилизована определенная часть населения $x(t + \Delta t)$. В таком случае, скорость мобилизации можно определить через производную

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (1)$$

Используя числовую ось 0 , величину $x(t)$ будем отмечать, как точку движущуюся по оси со скоростью $x'(t)$. Величину $x'(t)$ можно подсчитать различными способами статистически и в общем случае обозначить как непрерывную функцию $F(x(t), t)$ и записать в виде

$$x'(t) = F(x(t), t), \quad (2)$$

а в начальный момент времени $t = 0$ определить число мобилизованных x

$$x(t)|_{t=0} = x_0. \quad (3)$$

Равенства (1) и (2) составят задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Если считать, что число мобилизованных есть величина случайная, то для описания этого явления можно ввести в модель случайную величину $x(t)$. Тогда $x(t + \Delta t)$ будет суммарная случайная величина мобилизованных за малый промежуток времени Δt , и величина

$$x(t + \Delta t) - x(t) = dx(t) \quad (4)$$

будет считаться стохастическим дифференциалом [1].

Добавим величину (4) к уравнению (1) и запишем в виде

$$dx = F(x, t)dt + G(x, t)dx, \quad (5)$$

где функции $F(x, t) \geq 0$ и $G(x, t) \geq 0$ – неслучайные функции, а x – марковский случайный процесс.

Это стохастическое дифференциальное уравнение (5) с начальным условием (3) можно аналитически исследовать с помощью стохастических интегралов Ито и Стратоновича. Это же уравнение (5) можно преобразовать в параболическое уравнение мобилизации населения региона в соответствующую организацию с помощью уравнения Колмогорова

для стохастических процессов, обозначив через функцию $u(x, t)$ плотность распределения числа мобилизованных. С учетом того, что случайная величина $x(t)$ определяется плотностью вероятностей, стохастический процесс подчиняется тождеству Маркова–Колмогорова–Чеплина [1].

Используя различные преобразования и свойства суммы n интегралов, производные можно свести к параболическому уравнению с частными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}((c + F)u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} bu + f),$$

где коэффициенты c и b – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сильной непрерывности марковского процесса.

Литература

1. *Ерофеев В. Т., Козловская И. С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. М.: Стереотип, 2004. 248 с.
2. *Магомедов И. И., Магомедов Р. И.* Математическое моделирование мощности фирмы с помощью стохастических дифференциальных уравнений // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. Т. 1. С. 112–122.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ И ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА В ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ И ШУМОВ

Макаров А. М., Ермаков А. С.

*Пятигорский государственный университет, Пятигорск, Россия
melin22@mail.ru*

В развитие теории и ее приложений, для обработки процессов, несущих информацию важную роль сыграли различные интегральные преобразования, например, Фурье, Гильберта, Лапласа и Меллина[1–5]. Математически интегральные преобразования осуществляют отображение пространства исходной переменной в пространство новой переменной, то есть осуществляют отображение множеств элементов пространства типа «много в одно». Приложение теории интегрального преобразования Фурье хорошо известны. Его применение стало рабочим инструментом в широком спектре приложений для обработки сигналов.

Важную роль в теории цифрового представления информации сыграло преобразование Гильберта, позволившее распространить цифровую обработку для широкополосных сигналов. Известно применение интегрального преобразования Меллина, обеспечивающее масштабную инвариантность порогов решающих правил к масштабным изменениям анализируемых сигналов[6, 7]. Следует отметить, что преобразование Меллина уже получило отражение в качестве учебного пособия для обучения студентов [8].

Весьма интересно отметить применение теории интегрального преобразования Меллина в физических приложениях. Особый интерес представляет теория решения интегральных уравнений Фредгольма на основе мультипликативной характеристической функции, порождаемой интегральным преобразованием Меллина. В этой работе рассматривается теория интегральных операторов преобразования Меллина и ее применения для решения интегральных уравнений Фредгольма в классе тригонометрически-логарифмических функций.

Далее разрабатывается теория спектрально-корреляционного анализа случайных процессов в базисе интегрального преобразования Меллина. В частности, на ее основе, приводятся результаты синтеза оптимального приемника сигналов на фоне с неизвестной корреляционной функции шума.

Представляется актуально решение задачи создания цифровой модели бета-функции для ее реализации в компьютерных системах. Сложность цифровой реализации модели состоит в высокоточном представлении ее подынтегральных функций, требующих большого числа операций даже для современной компьютерной базы. Все вопросы создания таких цифровых моделей подробно рассматривались в работе авторов.

Литература

1. *Джрбашиян М. М.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. М.: Наука, 1965.
2. *Jberhettinger F.* Tabela of Mellin transforms. Springer-verlag. Berlin, Heidelberg, New-York, 1974.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1, преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1965.
4. *Bertrand J., Bertrand P., Ovarlez J.* The Mellin transform. The transforms and applications handbook: Second Edition. Ed. Alexander D. Poularikas. Boca Raton: CRCPress LLC, 2000.
5. *Zwiche P. E.* A new implementation of the radar classification of ships.-IEEE Trans. Of pattern analysis and machine Intellecenzy. 1983. Vol. PAMI-5, no. 2.
6. *Sheng Y., Arsenault H.* Experiments on pattern recognition using invariant Fourier–Mellin descriptors // J. Opt. Soc. Am. 1986. Vol. 6, no. 3. Pp. 885–887.
7. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн: Т. 1. М.: Мир, 1990. 518 с.
8. *Клименко П. П., Корниченко В. Т., Макаров А. М., Геложье Ю. А., Максимов А. В.* Прикладные методы цифровой обработки сигналов в радиотехнических системах. Ростов-на-Дону; Таганрог, 2021.

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Макаова Р. Х.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; Макаова.ruzanna@mail.ru*

В евклидовой плоскости точек (x, y) рассматривается уравнение вида

$$0 = \begin{cases} u_y - au_{xx} - bu_{xxy}, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} - c(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, m и c – заданные числа, причем $a > 0, b > 0, m > 0, |c| \leq m/2$; $u = u(x, y)$ – искомая действительная функция независимых переменных x и y .

Для уравнения (1) в работах [1], [2] автором были исследованы краевые задачи, для которых доказаны теоремы существования и единственности.

В данной работе исследуется вопрос об однозначной разрешимости одной смешанной краевой задачи для гиперболического уравнения третьего порядка (1) с оператором Аллера в главной части.

Литература

1. Макаова Р. Х. Краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка с вырождением порядка внутри области // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 4. С. 651–664.
2. Макаова Р. Х. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка с оператором Аллера в главной части // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 149, № 211. С. 64–71.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ, УСТАНОВИВШИЙСЯ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ РЕЖИМЫ ОБЪЁМНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ С ПРИТОКОМ МАССЫ И ВЫВОДОМ КРИСТАЛЛОВ ПРОДУКТА. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Маковеева Е. В.

*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
e.v.makoveeva@urfu.ru*

Многие твёрдые частицы производятся в промышленных и лабораторных установках с использованием процессов объёмной кристаллизации в метастабильных жидкостях (пересыщенных растворах или переохлажденных расплавах) при установившихся условиях в присутствии тепло- и массообмена между системой и окружающей средой (например, приток массы и отвод кристаллов продукта) [1–3]. Небольшие возмущения температуры или концентрации примеси, которые всегда существуют в природе, приводят кристаллизующуюся систему к неустойчивости

из-за сильной зависимости скорости зарождения кристаллов от переохлаждения или пересыщения, которые выступают в качестве движущей силы фазового перехода. В результате динамической неустойчивости может сформироваться колебательный режим кристаллизации или система может перейти в неустойчивую параметрическую область, которая не поддаётся контролю и не обеспечивает заданных характеристик кристаллов продукта (их размер, форму, состав) [4, 5].

В данной работе анализируется динамическая устойчивость кристаллизатора непрерывного действия с учётом эффектов зарождения и роста кристаллов, растворения мелких частиц, притока массы и вывода кристаллов продукта. Система кинетических и балансовых уравнений сводится к одному интегральному уравнению, определяющему кривую нейтральной устойчивости, которая разделяет стабильную и нестабильную области параметров кристаллизации. Рассмотрена нелинейная интегродифференциальная модель непрерывной кристаллизации в изотермических условиях с учётом следующих гипотез:

- 1) метастабильная жидкость непрерывно перемешивается;
- 2) размер вновь рождающихся кристаллов очень мал;
- 3) скорость их роста зависит от степени метастабильности (пересыщения);
- 4) процесс находится на промежуточной стадии, когда взаимодействием между кристаллами можно пренебречь.

Принцип работы кристаллизатора заключается в следующем [6]. Жидкий раствор подаётся в рабочий резервуар, за счёт охлаждения которого достигается пересыщенное состояние. В этом состоянии происходит зарождение и развитие кристаллов. Когда кристаллы продукта достигают заданного размера, их извлекают из кристаллизационного устройства.

Математическая модель процесса включает в себя кинетическое уравнение для функции распределения $\psi(r, \tau)$ кристаллов по размерам

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -v(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{q}{V} f(r) \psi(r, \tau), \quad (1)$$

где r и τ – пространственная координата и время, $v(\sigma) = k_g [\sigma(\tau) - \sigma_s]^g$ – скорость роста кристаллов, $\sigma(\tau)$ и σ_s – текущая концентрация раствора и концентрация насыщения, q – интенсивность притока подкормки, V – объём жидкости кристаллизатора, k_g и g – постоянные коэффициенты. Следуя работе [6], функция $f(r)$ выбрана так, что интенсивности отвода кристаллов и растворения мелких частиц одинаковые, т.е.

$$f(r) = R_f [1 - H(r - r_f)] + 1 + R_p H(r - r_p). \quad (2)$$

Здесь $H(r)$ – функция Хевисайда, r_f – размер растворяющихся кристаллов, а r_p – размер кристаллов продукта. Уравнение (2) подразумевает, что частицы исчезают при $r < r_f$ (R_f – константа исчезновения частиц)

и растут при $r \geq r_f$. Кроме того, если размер частиц больше, чем r_p ($r \geq r_p$), то такие частицы отводятся из кристаллизатора (R_p – скорость отвода частиц). Математическая модель дополняется начальным и граничным условиями на функцию распределения, а также уравнением массового баланса.

В целом, в работе исследованы режимы работы кристаллизатора с учётом процессов зарождения и эволюции частиц, удаления кристаллов продукта и растворения мелких частиц. Получены стационарные и нестационарные аналитические решения, описывающие различные сценарии кристаллизации. Показано, что нестационарное распределение кристаллов с течением времени приближается к стационарному. Кроме этого, анализ динамической устойчивости показывает, что существуют области колебательной неустойчивости и абсолютной устойчивости. Эти области разделены кривой нейтральной устойчивости, зависящей от физических параметров процесса кристаллизации. Показано, что область колебательной неустойчивости становится шире при увеличении констант скорости зарождения и роста. В результате рассматриваемый процесс объёмной кристаллизации может протекать в режиме автоколебаний, поддерживаемых обратной связью между скоростью зарождения и движущей силой процесса (пересыщением).

Данное исследование получило финансовую поддержку Российского научного фонда (проект № 22-79-00141).

Литература

1. *Randolph A. D., Larson M. A.* Theory of particulate processes. New-York: Academic Press, 1971. 251 с.
2. *Larsen P. A., Patience D. B., Rawlings J. B.* Industrial crystallization process control // IEEE Control Sys. Mag. 2006. Vol. 26, no. 4. Pp. 70–80.
3. *Abu Bakar M. R., Nagy Z. K., Saleemi A. N., Rielly C. D.* The impact of direct nucleation control on crystal size distribution in pharmaceutical crystallization processes // Cryst. Growth Des. 2009. Vol. 9, no. 3. Pp. 1378–1384.
4. *Anshus B. E., Ruckenstein E.* On the stability of a well stirred isothermal crystallizer // Chem. Eng. Sci. 1971. Vol. 28, no. 2. Pp. 501–513.
5. *Buyevich Y. A., Mansurov V. V., Natalukha I. A.* Instability and unsteady processes of the bulk continuous crystallization – I. Linear stability analysis // Chem. Eng. Sci. 1991. Vol. 46, no. 10. Pp. 2573–2578.
6. *Vollmer U., Raisch J.* H_∞ -Control of a continuous crystallizer // Control Eng. Practice. 2001. Vol. 9, no. 8. Pp. 837–845.

**ПОСТАНОВКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СМЕШАННОЙ
ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ, КОГДА УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ
ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕНЬШЕ
МИНУС ЕДИНИЦЫ**

Мамажонов М.^{1,a}, Шерматова Х. М.^{2,b}

¹Кожандский государственный педагогический институт, Кожанд,

²Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

^amirzatamajonov@gmail.com, ^bhilola-1978@mail.ru

Здесь рассматривается следующее уравнение третьего порядка парабола-гиперболического типа вида

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \right) (Lu) = 0 \quad (1)$$

в треугольной области G плоскости xOy , где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in G_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in G_i \quad (i = 2, 3, 4), \end{cases}$$

$a, b, c \in R, \gamma = b/a, -\infty < \gamma < -1$, а $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3$, здесь G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0; 0), B(1; 0), B_0(1, 1), A_0(0, 1)$; G_2, G_3 и G_4 – треугольники с вершинами в точках $A, B, C(1/2, -1/2)$; $A, D(-1, 1), A_0$ и $B, E(2, 1), B_0$ соответственно; J_1, J_2 и J_3 – открытые отрезки с вершинами в точках $A, B; A, A_0$ и B, B_0 соответственно.

Эта работа является продолжением работы [1]. В работе [1] поставлен один класс краевых задач для уравнения (1) при произвольных постоянных коэффициентах $a, b, c \in R$ и исследован случай 1° ($a \neq 0, b = 0$). В работах [2, 3] исследован случай 2° ($a = 0, b \neq 0$), а в этой работе ставится задача для случая 7° при $-\infty < \gamma < -1$.

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача. Требуется найти функцию $u(x, y)$, которая 1) непрерывна в замкнутой области \bar{G} и в области $G \setminus J_1 \setminus J_2 \setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны в G вплоть до части границы области G , указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G \setminus J_1 \setminus J_2 \setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u|_{BC} = \psi_1(x), \quad 1/2 \leq x \leq 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BC} = \psi_2(x), \quad 1/2 \leq x \leq 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{AC} = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad u|_{AF_1} = \psi_4(x), \quad -1/2 \leq x \leq 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AD} &= \psi_5(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad u|_{A_0D} = f_1(x), \quad -1 \leq x \leq -0, \\ u|_{B_0E} &= f_2(x), \quad 1 \leq x \leq 2, \quad u|_{EF_2} = \psi_6(x), \quad 3/2 \leq x \leq 2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{BE} &= \psi_7(x), \quad 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

и 4) следующим условиям склеивания:

$$\begin{aligned} u(x, +0) &= u(x, -0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u_y(x, +0) &= u_y(x, -0) = \nu_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_{yy}(x, +0) &= u_{yy}(x, -0) = \mu_1(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(+0, y) &= u(-0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u_x(+0, y) &= u_x(-0, y) = \nu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u_{xx}(+0, y) &= u_{xx}(-0, y) = \mu_2(y), \quad 0 < y < 1, \\ u(1+0, y) &= u(1-0, y) = \tau_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u_x(1+0, y) &= u_x(1-0, y) = \nu_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u_{xx}(1+0, y) &= u_{xx}(1-0, y) = \mu_3(y), \quad 0 < y < 1. \end{aligned}$$

Здесь ψ_i ($i = \overline{1, 7}$), f_j ($j = 1, 2$) – заданные достаточно гладкие функции, а τ_i , ν_i , μ_i ($i = 1, 2, 3$) – неизвестные пока достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямой $x + y = 0$ или $x - y = 1$, $F_1(-1/2, 1/2)$, $F_2(3/2, 1/2)$.

Теорема. Если $\psi_1 \in C^3[1/2, 1]$, $\psi_2 \in C^2[1/2, 1]$, $\psi_3 \in C^2[1/2, 1]$, $\psi_4 \in C^3[-1/2, 0]$, $\psi_5 \in C^2[-1, 0]$, $\psi_6 \in C^3[3/2, 2]$, $\psi_7 \in C^2[1, 2]$, $f_1 \in C^3[-1, 0]$, $f_2 \in C^3[1, 2]$, причем выполняются условия согласования $\psi_5(0) = \psi_3(0)$, $\psi_2(1) = \psi_7(1)$, $f_2(2) = \psi_6(2)$, $\psi'_2(1/2) = -\psi'_3(1/2)$, то задача допускает единственное решение.

Доказательство теоремы проводится методом построения решения. Здесь мы даем лишь идею доказательства этой теоремы. Для этого уравнение (1) перепишем в виде одного параболического, трех гиперболических уравнений с неизвестными правыми частями. Пользуясь заданным краевым условиям, найдутся эти правые части. С помощью заданных краевых условий и условий склеивания мы получим несколько соотношений между неизвестными функциями (следами решения). Решая эту систему, находим эти следы, тем самым и решение поставленной задачи.

Литература

1. *Мамажонов М., Шерматова Х. М.* О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа // Научный вестник Наманганского государственного университета. 2022. № 2. С. 41–51.

2. *Мамажонов М., Шерматова Х. М.* Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2022. Т. 25, № 3. С. 93–103.
3. *Matajonov M., Shermatova H. M.* On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines // Journal of applied and industrial mathematics. 2022. Vol. 16, no. 3. Pp. 481–489.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ЗАДАННОЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ
СЕРЕДИНЕ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 3D БИАНКИ**

Мамедов И. Г.^{1,a}, Абдуллаева А. Дж.^{2,b}

¹ *Министерство науки и образования Азербайджанской Республики
Институт систем управления, Баку, Азербайджан*

² *Военный Научно-Исследовательский Институт Азербайджанского
Национального Университета Обороны, Баку, Азербайджан
a ilgar-mamedov-1971@mail.ru; b ayunure-huseynova-2015@mail.ru*

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение 3D Бианки:

$$\begin{aligned}
 (V_{1,1,1}u)(x, y, z) \equiv & u_{xyz}(x, y, z) + A_{0,0,0}u(x, y, z) + A_{1,0,0}u_x(x, y, z) + \\
 + & A_{0,1,0}u_y(x, y, z) + A_{0,0,1}u_z(x, y, z) + A_{1,1,0}u_{xy}(x, y, z) + A_{0,1,1}u_{yz}(x, y, z) + \\
 + & A_{1,0,1}u_{xz}(x, y, z) + \int_{\sqrt{x_0x_1}}^x \int_{\sqrt{y_0y_1}}^y \int_{\sqrt{z_0z_1}}^z [K_{0,0,0}(\tau, \xi, \eta; x, y, z) u(\tau, \xi, \eta) + \\
 + & K_{1,0,0}(\tau, \xi, \eta; x, y, z)u_x(\tau, \xi, \eta) + K_{0,1,0}(\tau, \xi, \eta; x, y, z)u_y(\tau, \xi, \eta) + \\
 + & K_{0,0,1}(\tau, \xi, \eta; x, y, z)u_z(\tau, \xi, \eta) + K_{1,1,0}(\tau, \xi, \eta; x, y, z) \times \\
 + & K_{0,1,1}(\tau, \xi, \eta; x, y, z)u_{xy}(\tau, \xi, \eta) + \\
 + & K_{1,0,1}(\tau, \xi, \eta; x, y, z)u_{xz}(\tau, \xi, \eta)] d\tau d\xi d\eta = \varphi_{1,1,1}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Здесь, $u = u(x, y, z)$ – искомая функция, определенная на G ; $A_{i,j,k} = A_{i,j,k}(x, y, z)$ – заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2 \times G_3$, где $G_1 = (x_0, x_1)$, $x_0 \geq 0$, $G_2 = (y_0, y_1)$, $y_0 \geq 0$, $G_3 = (z_0, z_1)$, $z_0 \geq 0$; $\varphi_{1,1,1}(x, y, z)$ – заданная измеримая функция на G . Кроме того, в литературе до сих пор функцию Римана уравнения (1) удалось построить только для случая когда $K_{i,j,k}(\tau, \xi, \eta; x, y, z) \equiv 0$, а функции $A_{i,j,k}(x, y, z)$ являются достаточно гладкими т.е. когда функции $A_{i,j,k}(x, y, z)$ непрерывны вместе с производными $D_x^i D_y^j D_z^k A_{i,j,k}(x, y, z)$ в области \bar{G} .

В данной работе уравнение (1) впервые исследовано в общем случае, когда коэффициенты $A_{i,j,k}(x, y, z)$ и $K_{i,j,k}(\tau, \xi, \eta; x, y, z)$ являются

негладкими функциями, удовлетворяющими лишь следующим условиям:

$$\begin{aligned} A_{0,0,0}(x, y, z) \in L_p(G), A_{1,0,0}(x, y, z) \in L_{\infty, p, p}^{x, y, z}(G), A_{0,1,0}(x, y, z) \in \\ \in L_{p, \infty, p}^{x, y, z}(G), A_{0,0,1}(x, y, z) \in L_{p, p, \infty}^{x, y, z}(G), A_{1,1,0}(x, y, z) \in \\ \in L_{\infty, \infty, p}^{x, y, z}(G), A_{0,1,1}(x, y, z) \in L_{p, \infty, \infty}^{x, y, z}(G), A_{1,0,1}(x, y, z) \in L_{\infty, p, \infty}^{x, y, z}(G), \\ K_{i, j, k}(\tau, \xi, \eta; x, y, z) \in L_{\infty}(G \times G). \end{aligned}$$

При этих условиях решение $u = u(x, y, z)$ уравнения (1) будем искать в пространстве С. Л. Соболева

$$W_p^{(1,1,1)}(G) = \{ u \in L_p(G) / D_x^i D_y^j D_z^k u \in L_p(G); i, j, k = 0, 1 \},$$

где $1 \leq p \leq \infty$. Норму в пространстве $W_p^{(1,1,1)}(G)$ будем определять равенством

$$\|u\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)} = \sum_{i, j, k=0}^1 \|D_x^i D_y^j D_z^k u\|_{L_p(G)}.$$

Для уравнения (1) условия на геометрической середине области классического вида можно задавать в виде

$$\begin{cases} u/x = \sqrt{x_0 x_1} = \Phi(y, z), \\ u/y = \sqrt{y_0 y_1} = \Psi(x, z), \\ u/\sqrt{z_0 z_1} = g(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

где $\Phi(y, z)$, $\Psi(x, z)$ и $g(x, y)$ – заданные измеримые функции на G . Очевидно, что в случае условий (2) функции Φ , Ψ , g кроме условий

$$\Phi \in W_p^{(1,1)}(G_2 \times G_3), \Psi \in W_p^{(1,1)}(G_1 \times G_3), g \in W_p^{(1,1)}(G_1 \times G_2),$$

должны удовлетворять также следующим условиям:

$$\begin{cases} \Phi(\sqrt{y_0 y_1}, z) = \Psi(\sqrt{x_0 x_1}, z), \\ \Phi(y, \sqrt{z_0 z_1}) = g(\sqrt{x_0 x_1}, y), \\ \Psi(x, \sqrt{z_0 z_1}) = g(x, \sqrt{y_0 y_1}), \end{cases}$$

которые являются условиями согласования.

В представленной работе для интегро-дифференциального уравнения 3D (трехмерного) Бианки (1) классические условия (2) на геометрической середине области приведены к следующим неклассическим условиям:

$$\begin{cases} V_{0,0,0}u \equiv u(\sqrt{x_0 x_1}, \sqrt{y_0 y_1}, \sqrt{z_0 z_1}) = \varphi_{0,0,0}, \\ (V_{1,0,0}u)(x) \equiv u_x(x, \sqrt{y_0 y_1}, \sqrt{z_0 z_1}) = \varphi_{1,0,0}(x), \\ (V_{0,1,0}u)(y) \equiv u_y(\sqrt{x_0 x_1}, y, \sqrt{z_0 z_1}) = \varphi_{0,1,0}(y), \\ (V_{0,0,1}u)(z) \equiv u_z(\sqrt{x_0 x_1}, \sqrt{y_0 y_1}, z) = \varphi_{0,0,1}(z), \\ (V_{1,1,0}u)(x, y) \equiv u_{xy}(x, y, \sqrt{z_0 z_1}) = \varphi_{1,1,0}(x, y), \\ (V_{0,1,1}u)(y, z) \equiv u_{yz}(\sqrt{x_0 x_1}, y, z) = \varphi_{0,1,1}(y, z), \\ (V_{1,0,1}u)(x, z) \equiv u_{xz}(x, \sqrt{y_0 y_1}, z) = \varphi_{1,0,1}(x, z), \end{cases} \quad (3)$$

где $\varphi_{0,0,0} \in R$ является заданным числом, а остальные $\varphi_{i,j,k}$ являются заданными функциями, удовлетворяющими условиям:

$$\begin{aligned} &\varphi_{1,0,0}(x) \in L_p(G_1), \varphi_{0,1,0}(y) \in L_p(G_2), \varphi_{0,0,1}(z) \in \\ &\in L_p(G_3), \varphi_{1,1,0}(x, y) \in L_p(G_1 \times G_2), \varphi_{0,1,1}(y, z) \in L_p(G_2 \times G_3), \\ &\varphi_{1,0,1}(x, z) \in L_p(G_1 \times G_3). \end{aligned}$$

Трехмерная краевая задача на геометрической середине области в этой постановке более естественна, чем трехмерная краевая задача на геометрической середине области в классической постановке. Это связано с тем, что в этой постановке (1)–(3) трехмерной краевой задачи на правые части краевых условий никаких дополнительных условий типа согласования не требуются.

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

Мамедова А. А.

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

abdrahmanova-a@mail.ru

Рассмотрим уравнение распределенного порядка

$$\int_b^c D^\alpha z(t) d\mu(\alpha) = Az(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$, $m - 1 < c \leq m \in \mathbb{N}$; $\mu \in BV((b, c]; \mathbb{C})$, т. е. $\mu : (b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ функция с ограниченной вариацией; c точка вариации меры $d\mu(t)$, т. е., μ не постоянна в каждой левой окрестности c ; $A \in Cl(\mathcal{Z})$. В (1) используется интеграл Римана–Стилтьеса.

В работе все интегралы Римана–Стилтьеса рассматриваются на отрезках вида $(b, c]$, включающих только правый конец. Если нужно взять интеграл с μ , такой, что $\alpha = b$ – точка излома μ , мы заменим b на $b - \varepsilon$, предполагая, что μ постоянна на $(b - \varepsilon, b]$, и будем рассматривать интеграл по $(b - \varepsilon, c]$, который также включает только правый конец этого интервала.

Замечание. Всякая функция μ с ограниченной вариацией имеет вид $\mu = \mu_c + \mu_d$, где μ_c – непрерывная функция с ограниченной вариацией, μ_d – функция скачков. Следовательно, (1) имеет вид

$$\int_b^c D^\alpha z(t) d\mu(\alpha) = \int_b^c \mu'_c(\alpha) D^\alpha z(t) d\alpha + \sum_{k=1}^n \omega_k D^{\alpha_k} z(t) = Az(t),$$

если существует подходящая производная μ'_c , α_k точки скачков функции μ_d , $\omega_k = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_k+} \mu(\alpha) - \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_k-} \mu(\alpha)$ величина скачков, $k = 1, 2, \dots, n$.

Будем рассматривать задачу с начальными условиями (см.[1])

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{m-1-k}^c D^{\alpha-m+k} z(t) d\mu(\alpha) := \int_{m-1-k}^c D^{\alpha-m+k} z(0) d\mu(\alpha) = z_k, \quad (2)$$

для уравнения (1), $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Решением задачи (1), (2) является функция $z \in C(\mathbb{R}_+; D_A)$, такая что

$$\int_{m-1-k}^c D^{\alpha-m+k} z(t) d\mu(\alpha) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z}), \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$\int_b^c D^\alpha z(t) d\mu(\alpha) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z}),$$

выполнены равенство (1) для $t \in \mathbb{R}_+$ и условия (2).

Рассмотрим комплексно-значные функции

$$W(\lambda) := \int_b^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha), \quad W_k(\lambda) := \int_k^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha), \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

которые аналитичны на $S_{\pi,0} := \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > 0\}$.

Лемма 1. Пусть $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$, $m-1 < c \leq m \in \mathbb{N}$, $\mu \in BV((b, c]; \mathbb{C})$, c есть точка вариации меры $d\mu(t)$. Тогда

$$\exists C, \varrho > 0 \forall \lambda \in S_{\pi,0} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \varrho\}$$

$$\min\{|W(\lambda)|, |W_0(\lambda)|, |W_1(\lambda)|, \dots, |W_{m-1}(\lambda)|\} \geq C|\lambda|^c.$$

Доказательство. По определению интеграла Римана–Стилтьеса для малого $\delta > 0$ существует разбиение $\{\alpha_0 = b, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = c\}$ промежутка $(b, c]$ достаточно малого радиуса $r := \max\{\alpha_k - \alpha_{k-1} : k = 1, 2, \dots, n\}$, содержащее точки $\xi_k \in (\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, получаем для $|\lambda| > \varrho$

$$\begin{aligned} & \left| \int_b^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha) \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n \lambda^{\xi_j} (\mu(\alpha_j) - \mu(\alpha_{j-1})) \right| - \delta \geq \\ & \geq |\lambda|^{\xi_n} \left(|\mu(\alpha_n) - \mu(\alpha_{n-1})| - \left| \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^{\xi_j - \xi_n} (\mu(\alpha_j) - \mu(\alpha_{j-1})) \right| - \delta |\lambda|^{-\xi_n} \right) \geq \\ & \geq \frac{|\mu(\alpha_n) - \mu(\alpha_{n-1})|}{2} |\lambda|^c, \end{aligned}$$

так как ξ_n произвольная точка из $(\alpha_{n-1}, c]$. Здесь $\mu(\alpha_n) - \mu(\alpha_{n-1}) = \mu(c) - \mu(\alpha_{n-1}) \neq 0$ для достаточно малого r , так как c точка вариации меры $d\mu(t)$. Для W_k доказательство аналогично.

Лемма 2. Пусть $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$, $m-1 < c \leq m \in \mathbb{N}$, $\mu \in BV((b, c]; \mathbb{C})$, c – точка вариации меры $d\mu(t)$. Тогда для всех $k, l = 0, 1, \dots, m-1$, $k > l$,

$$\exists C, \varrho > 0 \quad \forall \lambda \in S_{\pi,0} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \varrho\}$$

$$(|W_k(\lambda) - W_l(\lambda)| \leq C|\lambda|^k) \wedge (|W_k(\lambda) - W(\lambda)| \leq C|\lambda|^k),$$

$$\exists C, \varrho > 0 \quad \forall \lambda \in S_{\pi,0} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \varrho\} \quad |W(\lambda)| \leq V_b^c(\mu)|\lambda|^c.$$

Литература

1. Fedorov V. E., Du W. S., Kostić M., Abdrakhmanova A. A. Analytic resolving families for equations with distributed Riemann–Liouville derivatives // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 681.

МЕТОД НЕОБХОДИМЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Мамчурев Мурат О.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; mamchuev@rambler.ru*

Работа посвящена исследованию нелокальных краевых задач для дробного диффузионно-волнового уравнения с помощью необходимых нелокальных условий, которые выражены в терминах специальных интегральных операторов. Необходимые нелокальные условия представляют собой структурное свойство всех регулярных решений дробного диффузионно-волнового уравнения, связывающее следы решения и его производной на границе прямоугольных областей (в том числе неограниченных).

На основе этого структурного свойства решений дробного диффузионно-волнового уравнения предложен метод определения корректности постановок краевых задач с неклассическими условиями и подход к их решению. С использованием предложенного подхода было построено решение ряда нелокальных краевых задач для дробного диффузионно-волнового уравнения и их доказана однозначная разрешимость.

К МОДЕЛИРОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ГРУНТОВЫХ МАССИВОВ НАКЛОННЫХ ОТКОСОВ НА ОПОЛЗАНИЕ

Мамчурев Мухтар О.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; mamchurc@yandex.ru*

При оценке устойчивости грунтовых массивов важнейшую роль играет правильный выбор очертания кривой скольжения [1]. В результате расчетов устойчивости грунтовых массивов необходимо выявить очертание и местоположение кривой обрушения с минимальным значением коэффициента устойчивости [2]. При этом, критическая поверхность скольжения может иметь не только прямолинейную, ломанную, круглоцилиндрическую и логарифмическую формы, но и произвольное очертание, в том числе с переменной (возрастающей, уменьшающейся) по высоте кривизной [3], которые наиболее близко могут быть описаны гиперболическими кривыми.

Оценка устойчивости откосов на практике чаще всего производится с использованием метода круглоцилиндрических поверхностей скольжения, однако, как показывают натурные данные, поверхность скольжения с наименьшей устойчивостью может иметь иное очертание, например, гиперболическое.

Работа посвящена сравнительному анализу коэффициентов устойчивостей круглоцилиндрических и гиперболических поверхностей скольжения.

Расчетная схема представлена наклонным откосом из однородного массива из связанного или несвязанного грунта, расположенного на недеформированном (скальном, полускальном) основании.

Полученные результаты дают представление о влиянии нелинейности поверхности скольжения, а также отклонения от круглоцилиндрического очертания последней, на величину коэффициента устойчивости склона.

Литература

1. Анахаев К. Н., Беликов В. В., Анахаев К. К., Амишонов Б. Х., Борисова Н. М. О расчете поверхностей скольжения береговых склонов на основе дистанционных данных // *Процессы в геосредах*. 2022. № 3. С. 1655–1663.
2. Гидротехнические сооружения. Часть 1. Под ред. д.т.н., профессора Расказова Л. Н. 2008. 575 с.
3. Кротошкин М. П. Расчеты устойчивости склонов с использованием алгоритмов минимизации коэффициента устойчивости // *Инженерные изыскания*. 2017. № 1. С. 20–30.

**К ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ
В СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ
СИСТЕМАХ**

Мансимов К. Б.^{1,2,a}, Масталиев Р. О.^{1,3,b}

¹*Институт систем управления Министерства науки и образования
Азербайджанской Республики;* ²*Бакинский государственный университет;*

³*Университет Азербайджана, Баку, Азербайджан*

^a*kamilbmansimov@gmail.com,* ^b*rashad.mastaliyev@au.edu.az*

Изучается задача оптимального управления нелинейными стохастическими системами, математическая модель которых задается стохастическим обыкновенным разностным уравнением, описывающим влияние случайных воздействий или помех. Целевым функционалом определяющего качество управления, является функционал типа Майера. Учитывая стохастические свойства задачи и используя модифицированный вариант метода приращений функционала, установлено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме дискретного принципа максимума Понтрягина и исследованы особые (в смысле принципа максимума Понтрягина) управления на оптимальность.

Рассмотрим в векторной форме стохастическую управляемую систему управления с дискретным временем [1–3]

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t), \xi(t)), \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \quad (1)$$

и начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – вектор состояния системы, конечная последовательность T – задано, причем $t_1 - t_0$ – натуральное число, x_0 – случайный вектор с заданным законом распределения, $f(t, x, u, \xi)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x до второго порядка включительно, $\xi(t) \in R^m$, $t \in T$ – случайный вектор с известным законом распределения, описывающий случайные внешние воздействия на объект управления, $u(t)$ – r мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т. е.

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T. \quad (3)$$

На траекториях системы (1), (2) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим терминальный функционал

$$J(u) = E\varphi(x(t_1)). \quad (4)$$

Здесь $\varphi(x) \in R^1$ – заданная, дважды непрерывно-дифференцируемая функция, а E – оператор математического ожидания.

Задача заключается в минимизации функционала (4) при ограничениях (1)–(3).

Целью работы является установление аналога дискретного принципа максимума Понтрягина и нахождение необходимых условий оптимальности второго порядка для особых управлений [4, 5] в рассматриваемой стохастической задаче оптимального управления (1)–(4).

Литература

1. *Азанов В. М.* Оптимальное управление дискретной стохастической системой с вероятностным критерием и нефиксированным временем окончания // Автоматика и телемеханика. 2020. № 12. С. 3–23.
2. *Sworder D. D.* Optimal control of discrete-time stochastic systems // Journal of mathematical analysis and applications. 1966. Vol. 15. Pp. 253–263.
3. *Sie-Long K., Mohd I. Abdul Aziz.* Optimal control of discrete-time linear stochastic dynamic system with model-reality differences // International conference on machine learning and computing, IPCSIT. 2011. Vol. 3. Pp. 573–578.
4. *Габасов Р.* К теории оптимальных дискретных процессов // Журнал вычислительной математики и МФ. 1969. Т. 4, № 8. С. 780–796.
5. *Мансимов К. Б., Масталиев Р. О.* Оптимизация процессов, описываемых разностными уравнениями Вольтерра. Монография: LAP RU, 2017. 263 с.

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Марданов М. Дж.^{1,а}, Рагимов А. Б.^{2,б}

¹Институт математики и механики, ²Институт Систем Управления, Баку, Азербайджан ^аmisirmardanov@yahoo.com, ^бanar_r@yahoo.com

В докладе предлагается подход к численному решению следующей обратной задачи относительно параболического уравнения ([1–4]):

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + a_1(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + a_2(x, t) v(x, t) + f(x, t) + F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}, \quad (1)$$

где

$$F(x, t) = \sum_{s=1}^L B_s(x, t) C_s(x), \quad (2)$$

при следующих начально-краевых условиях и дополнительных условиях:

$$v(x, 0) = \phi_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

$$v(0, t) = \psi_0(t), \quad v(l, t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$v(x, \bar{t}_s) = \phi_{1s}(x), \quad x \in [0, l], \quad \bar{t}_s \in (0, T], \quad s = 1, \dots, L. \quad (5)$$

Здесь: $L > 0$ – заданное целое число, $\bar{t}_s \in (0, T]$, $s = 1, \dots, L$ – заданные моменты времени; заданные функции $a(x, t) > 0$, $a_1(x, t)$, $a_2(x, t)$, $f(x, t)$, $B_s(x, t)$, $\phi_0(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\phi_{1s}(x)$, $s = 1, \dots, L$ непрерывны по x и t ; $B_s(x, t)$ – линейно-независимые функции, дифференцируемые по t , причем $a_2(x, t) \leq 0$, $B_s(x, t) > 0$, $\frac{\partial B_s(x, t)}{\partial t} \geq 0$. Функции $\phi_0(x)$, $\phi_{1s}(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ удовлетворяют условиям согласования:

$$\phi_0(0) = \psi_0(0), \quad \phi_0(l) = \psi_1(0),$$

$$\phi_{1s}(0) = \psi_0(\bar{t}_s), \quad \phi_{1s}(l) = \psi_1(\bar{t}_s), \quad s = 1, \dots, L.$$

Задача (1)–(5) заключается в определении неизвестной непрерывной L – мерной вектор-функции $C(x) = (C_1(x), \dots, C_L(x))^*$ и соответствующего решения начально-краевой задачи $v(x, t)$ – дважды непрерывно дифференцируемой по x и один раз непрерывно дифференцируемой по t при $(x, t) \in \Omega$, удовлетворяющих условиям (3)–(5).

Важно отметить, что предлагаемый численный метод решения задачи (1)–(5) не является итерационным и основан на использовании метода прямых. Задача приводится к коэффициентно-обратной задаче относительно краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой с использованием специального представления для решения краевой задачи применяется подход типа прогонки, предложенный ранее в работах [1, 3, 4]. Приводятся результаты проведенных численных экспериментов, подтверждающие эффективность предлагаемого подхода.

Литература

1. Рагимов А. Б. О численном решении одного класса обратных задач для параболического уравнения // Кибернетика и Системный Анализ. 2017. Т. 53, № 3. С. 73–84.
2. Марданов М. Дж., Шарифов Я. А., Зейналлы Ф. М. Существование и единственность решений нелинейных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями нелокальными краевыми условиями // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. Т. 60, С. 61–72.
3. Aida-zade K. R., Rahimov A. B. An approach to numerical solution of some inverse problems for parabolic equations // J. of Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. Vol. 22, no. 1. Pp. 96–111.
4. Айда-заде К. Р., Рагимов А. Б. Решение классов коэффициентно-обратных задач и задач с нелокальными условиями для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 84–94.

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Масаева О. Х.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; olesya.masaeva@yandex.ru*

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u + D_{0y}^\beta u = f(x, y), \quad 1 < \beta < 2, \quad (1)$$

где $u = u(x, y)$, D_{0y}^β – оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка β [1, с. 9], в области $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, y > 0\}$.

Дифференциальные уравнения дробного порядка весьма эффективны для моделирования многих систем, в том числе экономических и социальных [2].

В работе [3] исследована система Коши–Римана дробного порядка. Уравнения с операторами Римана–Лиувилля, обобщающие уравнение Лапласа, изучены в работах [4–6].

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию u такую, что $y^{2-\beta} u \in C(\bar{\Omega})$, имеющую непрерывные производные u_{xx} , $D_{0y}^\beta u$ в области Ω и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $(x, y) \in \Omega$.

В данной работе исследуется следующая

Задача Дирихле. *Найти в области Ω регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию*

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\beta-2} u = \tau(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

$\tau(x)$ – заданная непрерывная функция на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003. 272 с.
2. *Нахушев А. М.* О математических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием // Доклады АМАН. 2007. Т. 9, № 1. С. 128–137.
3. *Псху А. В.* Аналог формулы Шварца для системы Коши–Римана дробного порядка. // Материалы Воронеж. весен. мат. шк. «Понтрягинские чтения–ХІІІ» – «Современные методы в теории краевых задач». Воронеж, 2002. С. 127.
4. *Масаева О. Х.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной // Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, № 3. С. 312–322.
5. *Масаева О. Х.* Задача Неймана для обобщенного уравнения Лапласа // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 2, № 3. С. 83–90.

6. *Масаева О. Х.* Решение краевой задачи для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 40, № 3. С. 53–63.

РАЗРАБОТКА МЕТОДА СТЕГАНОДЕТЕКТИРОВАНИЯ СКРЫТЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Маслова О. И.^а, Потапов И. Р.^б, Будко К. Л.^с

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия
^а *oksmaslova@inbox.ru*, ^б *iv.pot.03@mail.ru*, ^с *budkokira@hotmail.com*

На сегодняшний день нейронные сети активно применяют в различных научных направлениях, в том числе и стеганодетектировании, т. к. они позволяют добиться наибольшей универсальности в распознавании скрытых изображений. Но возникает ряд сложностей при разработке нейронных сетей, например, правильно выбранная архитектура нейронной сети в контексте задач распознавания влияет на эффективность полученного решения.

Нейронная сеть, состоящая из небольшого количества нейронов или скрытых слоев, будет изучать наиболее грубые взаимосвязи в обучающих данных и игнорировать более тонкие детали, а это может быть критичным в задачах стеганодетектирования.

Основой стеганодетектирования изображений является определение факта наличия или отсутствия скрытой информации в нем. По своей сути данная задача является задачей бинарной классификации, т. к. предполагает отнесение объекта к одному из двух классов. Наибольшую эффективность в решении подобных задач в настоящее время демонстрируют сверточные нейронные сети.

В качестве основы предлагаемого метода стеганодетектирования используется нейронная сеть с архитектурой VGG-16, которая была изначально разработана для классификации изображений, однако хорошо себя зарекомендовала и в ряде других областей, связанных с обработкой изображений.

За счет изменения архитектуры известной нейронной сети был разработан метод стеганодетектирования скрытых изображений.

В результате внесения изменений в известный алгоритм станет возможным повышение точности обнаружения изображений-стегоконтейнеров. Предложенный алгоритм позволит использовать изображения, имеющие большее разрешение, чем размерность входа нейронной сети, путем разбиения входного изображения на блоки.

Литература

1. *Ye J., Ni J., Yi Y.* Deep Learning Hierarchical Representations for Image Steganalysis // IEEE Trans. Inf. Forensics Secur. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. 2017. Vol. 12, no. 11. Pp. 2545–2557.

2. *Nabares-Soto R.* Strategy to improve the accuracy of convolutional neural network architectures applied to digital image steganalysis in the spatial domain // PeerJ Comput. Sci. PeerJ Inc. 2021. Vol. 7. Pp. 1–21.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Матвеева И. И.

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
i.matveeva@ngsu.ru*

Рассматриваются некоторые классы систем неавтономных уравнений с переменным запаздыванием. Исследованы асимптотические свойства решений на полупрямой и получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. Работа продолжает наши исследования свойств решений неавтономных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–3]).

Литература

1. *Матвеева И. И.* Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 3. С. 583–598.
2. *Matveeva I. I.* Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // Sib. Elect. Math. Rep. 2021. Vol. 18, no. 2. Pp. 1689–1697.
3. *Matveeva I. I.* Estimates for solutions to a class of nonlinear time-varying delay systems // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, no. 14. Pp. 3497–3504.

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДЖРБАШЯНА–НЕРСЕСЯНА

Мелехина Д. В.^a, Плеханова М. В.^b, Околелов Н. А.^c

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

^a*daryamelekhina0112@gmail.com, ^bmariner79@mail.ru,*

^c*okolelov01.01@gmail.com*

Пусть \mathcal{Z} , \mathcal{U} банаховы пространства, подмножество Z открыто в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, $B : Z \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Z}$ является нелинейным отображением. Рассмотрим нелинейную обратную задачу

$$D^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + B(t, D^{\sigma_0} z(t), D^{\sigma_1} z(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z(t), u(t)), \quad (1)$$

$$D^{\sigma_k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\Phi z(t) = \Psi(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (3)$$

где D^{σ_k} – производные Джрбашяна–Нерсесяна, которые соответствуют $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$. Решением задачи (1)–(3) на отрезке $[t_0, T]$ является пара $(z, u) \in C([t_0, T]; \mathcal{Z}) \times C([t_0, T]; \mathcal{U})$, такая, что для $k = 0, 1, \dots, n$ $D^{\sigma_k} z \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются равенства (2), для любого $t \in [t_0, T]$ $(t, D^{\sigma_0} z(t), D^{\sigma_1} z(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}} z(t)) \in Z$ и выполняются равенства (1), (3).

Обозначим $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$. Далее будем использовать следующие условия (A)–(F) [1].

(A) отображение $B: Z \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Z}$ имеет вид

$$B(t, \bar{y}, u) = B_1(t, \bar{y}) + B_2(t, \bar{y}, u), \quad (t, \bar{y}, u) \in Z \times \mathcal{U}.$$

Возьмем $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{Z}^n$, для $R, T > 0$ обозначим

$$S_{\mathcal{Z}^n}(\bar{a}, R) = \{\bar{y} \in \mathcal{Z}^n : \|y_k - a_k\|_{\mathcal{Z}} < R, k = 0, 1, \dots, n-1\},$$

$$S_{\mathcal{Z}^n}(\bar{a}, R, T) = [t_0, T] \times S_{\mathcal{Z}^n}(\bar{a}, R).$$

Для $(t_0, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in Z$ и достаточно гладкой функции Ψ возьмем

$$v_0 = D^{\sigma_n} \Psi(t_0) - \Phi A z_0 - \Phi B_1(t_0, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}).$$

Кроме того, будут использоваться следующие условия:

(B) уравнение $\Phi B_2(t_0, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, u) = v_0$ относительно переменной u имеет единственное решение $u_0 \in \mathcal{U}$;

(C) оператор $B_3: [t_0, T] \times \mathcal{U}^{n+1} \rightarrow \mathcal{U}$ удовлетворяет тождеству

$$\Phi B_2(t, \bar{y}, u) = B_3(t, \Phi y_0, \Phi y_1, \dots, \Phi y_{n-1}, u), \quad (t, \bar{y}, u) \in Z \times \mathcal{U};$$

(D) для некоторого $R > 0$ и для любого $t \in [t_0, T]$ отображение

$$v = B_3(t, D^{\sigma_0} \Psi(t), D^{\sigma_1} \Psi(t), \dots, D^{\sigma_{n-1}} \Psi(t), u)$$

в шаре $S_{\mathcal{U}}(u_0, R)$ имеет обратное отображение $u = F(t, v)$;

(E) оператор F непрерывен по совокупности переменных (t, v) на множестве $S_{\mathcal{U}}(u_0, R, T)$ для некоторых $R > 0$ и липшицев по v на этом множестве;

(F) оба отображения $B_1(t, \bar{y})$ и $B_2(t, \bar{y}, u)$ непрерывны по всей совокупности переменных на $S_{\mathcal{Z}^n \times \mathcal{U}}((z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, u_0), R, T) \subset Z \times \mathcal{U}$ для некоторого $R > 0$; более того, они удовлетворяют условию Липшица в (\bar{y}, u) на этом множестве.

Теорема. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $n \in \mathbb{N}$, Z открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, $B: Z \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Z}$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $(t_0, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in Z$, $\alpha_0 = 1$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}; \mathcal{U})$, $D^{\sigma_k} \Psi \in C([t_0, T]; \mathcal{U})$,

$k = 0, 1, \dots, n$, $\Phi z_0 = \Psi(t_0)$, выполняются предположения (A)–(F). Тогда существует $T_1 \in (t_0, T]$, такая, что нелинейная обратная задача (1)–(3) имеет единственное решение на $[t_0, T_1]$.

Работа поддержана Российским научным фондом и Правительством Челябинской области, грант № 23-21-10015.

Литература

1. Fedorov V.E., Plekhanova M.V., Melekhina D.V. Nonlinear inverse problems for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives // Fractal and Fractional. 2023. Vol. 7, no. 6. P. 464.

ЗАДАЧА С КОМБИНИРОВАННЫМ УСЛОВИЕМ ТРИКОМИ И ФРАНКЛЯ НА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Мирсабуров М.^{1,a}, Эргашева С. Б.^{2,b}

¹ Термезский государственный университет

² Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

^a mirsaburov@mail.ru, ^b sarvinozergasheva96@mail.ru

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой

$$\sigma_0(y = \sigma_0(x)) : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1,$$

с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(\text{sign } y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0, \quad (1)$$

где m – положительная постоянная.

Обозначим через D^+ и D^- части области D , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через A_1 и A_2 точку пересечения характеристики AC с характеристиками уравнения (1), выходящими из точек $E_0(c_0, 0)$ и $E(c, 0)$, где $-1 < c_0 < c < 1$. На отрезке $[c_0, c]$ введем линейную функцию $\omega(x) = a_0 - b_0x$ которая отображает отрезок $[c_0, c]$ на отрезок $[c, 1]$, где $\omega(c_0) = 1$, $\omega(c) = c$, $a_0 = c(1 - c_0)/(c - c_0)$, $b_0 = (1 - c)/(c - c_0)$.

В задаче Трикоми [1, с. 29] во всех точках характеристики AC задается значение искомой функции. В данной работе исследуется корректность задачи, которая отличается от задачи Трикоми тем, что куски A_1A_2 и A_2C характеристики AC освобождены от локального краевого условия, и это недостающее условие Трикоми заменено аналогами условия Франкля [2, 3] на кусках A_1A_2 и A_2C характеристики AC и на сегментах E_0E и EB отрезка AB .

Задача TF. Требуется найти в области D функцию $u(x, y) \in C(\bar{D})$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

2) функция $u(x, y)$ является в области D^- обобщенным решением класса $R_1[4, C.104]$ уравнения (1) ($u(x, y) \in R_1$, если в формуле Даламбера $\tau'(x)$, $\nu(x) \in H$ ([7])

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in (-1, 1) / \{c_0, c_1\}, \quad (2)$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y) |_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (3)$$

$$u(x, y) |_{AA_1} = \psi(x), \quad x \in [-1, (c_0 - 1)/2], \quad (4)$$

$$u[\theta(x)] - u[\theta(\omega(x))] = f_0(x), \quad x \in [c_0, c], \quad (5)$$

$$u(x, 0) - u(\omega(x), 0) = u(c, 0) + f(x), \quad x \in [c_0, c], \quad (6)$$

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i \left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4} \right]^{2/(m+2)},$$

$\theta(x_0)$ – аффикс точки пересечения характеристики AC с характеристикой исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in [c_0, c]$ [5, 6].

Заданные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f_0(x)$, $f(x)$ – непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем $\varphi(x) = (1 - x^2)\varphi_0(x)$, $\varphi_0(x) \in C^1[-1, 1]$, $f(c_0) = 0$, $f(c) = 0$.

Заметим, что условия (5) и (6) являются аналогами условия Франкля [2] соответственно на участках A_1A_2 и A_2C характеристики AC и на сегментах E_0E и EB отрезка AB оси $y = 0$. Из условия (6) при $x = c$, с учетом $f(c) = 0$, имеем $u(c, 0) = 0$, тогда условие (6) при обозначении $u(x, 0) = \tau(x)$ примет вид

$$\tau(x) - \tau(\omega(x)) = f(x), \quad x \in [c_0, c].$$

Задача TF при значении параметра $c_0 = 1$ переходит в задачу Трикоми [1, с. 29], а при $c_0 = -1$ – в задачу с аналогом условия Франкля на характеристике AC и на отрезке AB [7].

Теорема. Задача TF однозначно разрешима.

Доказательство теоремы с использованием условий (2)–(6) проводится методом изложенной в работе [7].

Литература

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.: Ленинград, 1947. 192 с.
2. Франкль Ф. И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 196–202.
3. Капустин Н. Ю., Сабитов К. Б. О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 60–68.
4. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. Москва, 1985. 304 с.
5. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии // Учен. зап. Казанск. ун-та. 1962. Т. 122, № 3. С. 3–16.
6. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
7. Мирсабуров М. Задача с аналогом условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 778–788.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА–КАПУТО

Нагуманова А. В.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
urazaeva_anna@mail.ru

Пусть \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{U} – банаховы пространства, операторы $L, M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ с плотными областями определения D_L и D_M соответственно, $\ker L \neq \{0\}$. Множество точек $\mu \in \mathbf{C}$, в которых оператор $\mu L - M : D_L \cap D_M \rightarrow \mathcal{Y}$ инъективен, и $(\mu L - M)^{-1}L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, называется L -резольвентным множеством $\rho^L(M)$ оператора M . Обозначим $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$.

Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что пара операторов (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если

(i) существуют $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ и $a_0 \geq 0$, такие что для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая константа $K = K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\max \{ \|R_{\lambda^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L_{\lambda^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})} \} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Рассмотрим вырожденное дробное дифференциальное уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + B(t)u + y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Здесь D_t^α – дробная производная Герасимова–Капуто, $B: [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $y: [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$, $u \in \mathcal{U}$, $T > 0$. Для уравнения (1) зададим условия Коши

$$x^{(k)}(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

и условие переопределения

$$\int_0^T x(t) d\mu(t) = x_T. \quad (3)$$

Скалярная функция $\mu(t)$ предполагается имеющей ограниченную вариацию на $[0, T]$. Интеграл в условии (3) понимается как векторный интеграл Римана–Стилтьеса. Элементы x_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, x_T считаются известными.

Решением задачи (1)–(3) называется пара (x, u) , где вектор-функция $x \in C([0, T]; D_M) \cap C^{m-1}([0, T]; \mathcal{X})$, для которой $Lx \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Y})$,

$$g_{m-\alpha} * \left(Lx - \sum_{k=0}^{m-1} (Lx)^{(k)}(0) g_{k+1} \right) \in C^m([0, T]; \mathcal{Y})$$

и для всех $t \in [0, T]$ выполняется равенство (1) при соответствующем $u \in \mathcal{U}$, а также равенства (2) и (3).

Обозначим

$$X_{\alpha, \beta}(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-\beta} (\mu^\alpha L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad \beta \in \mathbf{R},$$

$$\chi_x^{-1} := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t X_{\alpha, \alpha}(t-s) L_1^{-1} Q B(s) ds,$$

$$\psi_x := P x_T - \int_0^T \sum_{k=0}^{m-1} X_{\alpha, k+1}(t) P x_k d\mu(t) - \int_0^T d\mu(t) \int_0^t X_{\alpha, \alpha}(t-s) L_1^{-1} Q y(s) ds.$$

Теорема. Пусть $\alpha > 0$, \mathcal{U} – банахово пространство, \mathcal{X} , \mathcal{Y} – рефлексивные банаховы пространства, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$. Пусть $y: [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}^0 \dot{+} L_1 [D_{L_1^{-1} M_1}]$, $L_1^{-1} Q y \in C([0, T]; D_{L_1^{-1} M_1})$, $Q_0 y \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Y})$, $B: [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $\text{im} B(t) \subset \mathcal{Y}^0 \dot{+} L_1 [D_{L_1^{-1} M_1}]$ при $t \in [0, T]$, $L_1^{-1} Q B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; D_{L_1^{-1} M_1}))$, $Q_0 B \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}))$, $\chi_x^{-1} \in \mathcal{L}(D_{L_1^{-1} M_1}; \mathcal{U})$, функция $\mu: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ имеет ограниченную вариацию, $x_k \in D_M$, $P x_k \in D_{L_1^{-1} M_1}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $x_T \in D_M$ таковы, что выполняются условия согласования

$$P_0 x_k = -D_t^k|_{t=0} M_0^{-1} Q_0 [B(t) \chi_x^{-1} \psi_x + y(t)], \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$P_0 x_T = - \int_0^T M_0^{-1} Q_0 [B(t) \chi_x^{-1} \psi_x + y(t)] d\mu(t).$$

Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение, при этом

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|Px_k\|_{\mathcal{X}} + \|Px_T\|_{\mathcal{X}} + \|L_1^{-1} Qy\|_{C([0,T]; D_{L_1^{-1} M_1})} \right).$$

Литература

1. Федоров В. Е., Нагуманова А. В. Линейные обратные задачи для вырожденного эволюционного уравнения с производной Герасимова–Катупо в секториальном случае // Математические заметки СВФУ. 2020. Т. 27, № 2. С. 54–76.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТОЙЧИВОЙ РЕГИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗЕЛЕННОЙ ЭКОНОМИКИ

Нахушева З. А.^a, Ашинова И. В.^b

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия;^a z.nakhusheva@mail.ru, ^b asin07@mail.ru

Современные кризисы демонстрируют неустойчивость сложившейся модели мирового экономического развития. Одним из способов выхода из создавшейся ситуации является переход на рельсы «зеленой экономики», от которой требуется циркулярный инклюзивный рост, улучшающий благосостояние людей и создающий социальную справедливость, одновременно снижающий экологические риски. Учитывая современную ситуацию изменения миропорядка в условиях неопределенностей, в нашей стране уделяется особое внимание усилению роли регионального управления. Медленный, но объективно необходимый переход экономической науки к «зеленым» трекам развития дает возможность трактовать управление как способ получения экономического результата при наименьших производственных и экологических издержках. И, если в технических системах есть смысл говорить об управлении как целенаправленном воздействии субъекта управления на объект с целью перевода его в качественно новое состояние или же для достижения его эффективного функционирования и развития (пассивная роль объекта управления), то в социально-экономической системе и субъект, и объект управления остаются одинаково активными.

Одной из главных целей регионального управления является повышение уровня благосостояния населения, проживающего на данной территории, рост экономического потенциала территории, улучшение качества жизни населения [1]. Функция цели, строящаяся при математическом моделировании указанных процессов, как правило, является нелинейной. Обозначим через $a_i = a_i(t)$ и $b_j = b_j(t)$ – динамические функции параметров объекта управления, $c_k = c_k(t)$ и $d_l = d_l(t)$ – функции

параметров идентификатора субъекта управления. Приведенные выше индексы изменяются следующим образом: индексы объекта $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$, индексы субъекта $k = \overline{0, p}$, $l = \overline{0, q}$. Систему управления будем рассматривать как систему «вход» – «выход». Тогда функции $u = u(t)$ и $v = v(t)$ – параметры входа и выхода системы соответственно. Предположим, что функция $z = z(t)$ обеспечивает устойчивое конкурентное развитие системы «зеленой» экономики, а функция $f = f(t)$ описывает внешнее возмущение среды. Тогда имеет место следующая система уравнений состояния [2, с.114]:

$$\sum_{i=0}^m a_{i+1} \frac{d^i u}{dt^i} = \sum_{j=0}^n b_{j+1} \frac{d^j (v + f)}{dt^j},$$

$$\sum_{k=0}^p c_{k+1} \frac{d^k u}{dt^k} = \sum_{l=0}^q d_{l+1}. \quad (1)$$

Важную роль в модели играет тот факт, что основные законы управления действуют не только для системы в целом, но и для каждой из ее частей, т. е. выполняется принцип локальности процесса моделирования. Также серьезное значение в данной модели имеет принцип полноты ее эффективных параметров.

Учтем тот факт, что система уравнений (1) должна наиболее благоприятно описывать процесс регионального управления как системы с распределенными параметрами и памятью, основной характеристикой которой является нелокальность [3]. Именно принцип нелокальности является фундаментальной основой системы управления процессом регионального «зеленого» развития. Таким образом, если в (1) вместо классической производной по временной переменной будем использовать операторы дробного порядка для описания эффективных параметров, т.е. параметров, изменение которого ведет к изменению поля поведения системы, то мы адекватно опишем моделируемое пространство. Учитывая, что оно очевидно имеет фрактальную структуру, более корректно будет говорить о системе следующего вида, в которой соблюден принцип фрактальности. Из (1) мы получаем уравнения состояния следующего вида:

$$\sum_{i=0}^m a_{i+1} D_{0t}^{\alpha_i} u = \sum_{j=0}^n b_{j+1} D_{0t}^{\alpha_j} (v + f),$$

$$\sum_{k=0}^p c_{k+1} D_{0t}^{\alpha_k} u = \sum_{l=0}^q d_{l+1} D_{0t}^{\alpha_l} z, \quad (2)$$

Здесь:

$$D_{\tau t}^{\alpha} \chi(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\tau}^{\xi} \frac{\chi(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \chi(\xi), & \alpha = 0, \\ \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} D_{\tau t}^{\alpha-[\alpha]-1} \chi(\xi), & \alpha > 0, \end{cases}$$

– оператор дробного интегро-дифференцирования, $[\alpha]$ – целая часть α , $\Gamma(-\alpha)$ – Гамма-функция Эйлера; $0 < \alpha_s = \text{const} \leq 1$, где $s = 1, 2, \dots$, $\max(m, n, p, q)$.

При определенных входных экспериментальных данных с упрощенным видом системы (2) в части конкретных коэффициентов и функций проведено компьютерное моделирование в среде Python, показавшее хорошую корреляцию выходных данных моделируемой системы с экспериментальными данными.

Работа выполнена в рамках проекта «Приоритет 2030».

Литература

1. *Нахушева З. А., Лесев В. Н., Ашинова И. В.* Математическое моделирование процессов развития зеленой экономики // Известия КБНЦ РАН. 2021. Т. 104, № 6. С. 222–228.
2. *Емельянов С. В.* Системы автоматического управления переменной структурой. М.: Наука, 1976. 336 с.
3. *Нахушев А. М.* К проблеме математического моделирования региональных социально-экономических систем // Вестник СамГТУ. Сер. Матем. 2007. Т. 6, № 2. С. 4–15.

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Нахушева Ф. М., Водахова В. А., Гучаева З. Х.

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Нальчик, Россия*

fatima-nakhusheva@mail.ru, v.a.vod@yandex.ru, proporz@yandex.ru

Рассматривается уравнение смешанного типа

$$|y|^k u_{xx} + \text{sign}(xy) |x|^k u_{yy} = 0, \quad k = \text{const} > 0, \quad (1)$$

в конечной односвязной области Ω , ограниченной кусочно-гладкой кривой Жордана σ с концами в точках $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, расположенной в первом квадрате $x > 0$, $y > 0$ и характеристиками $AD: x^p + (-y)^p = 1$, $CD: x + y = 0$, $BC: (-x)^p + y^p = 1$, $2p = k + 2$; Ω_1, Ω_2 – гиперболические части смешанной области Ω , где $x > 0$ и $x < 0$ соответственно; Ω_3 – эллиптическая часть области Ω ; \mathcal{I}_1 (\mathcal{I}_2) – интервал $0 < x < 1$ ($0 < y < 1$) прямой $y = 0$ ($x = 0$).

Задача А. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \sigma,$$

$$u(x, y)|_{OD} = c_1(x), \quad (2)$$

$$a_1(y) D_{0y}^\beta y^{2\beta-1} u[Q_0(y)] + b_1(y) D_{y1}^\beta (1-y)^{2\beta-1} u[Q_1(y)] = c_2(y) \quad \forall y \in \mathcal{I}_2, \quad (3)$$

где $\beta = k / (2k + 4)$; $Q_0(y), Q_1(y)$ – аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(0, y) \in \mathcal{I}_2$ с характеристиками OC, BC ; $\varphi(x, y), a_1(y), b_1(y), c_1(x), c_2(y)$ – заданные непрерывные функции, причем $a_1^2(y) + b_1^2(y) \neq 0, y \in \mathcal{I}_2$; $\varphi(x, y) \in C^1(\sigma)$; $a_1(y), b_1(y), c_i(t) \in C^{(2,h)}(\mathcal{I}_i), h > 0; i = 1, 2$; $D_{0y}^l f, D_{y1}^l f$ – операторы дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегро-дифференцирования [1].

Существование и единственность задачи А были доказаны в [2] в случае, когда краевые условия (2), (3) заменены условиями

$$a_i(t) D_{0t}^{1-\beta} u [Q_0(t)] + b_i(t) D_{t1}^{1-\beta} u [Q_1(t)] = c_i(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}_i, \quad i = 1, 2.$$

Имеет место теорема единственности решения задачи А.

Теорема. В области Ω не может существовать более одного регулярного решения задачи А, если выполнены условия

$$k \leq (\sqrt{5} - 1) / 2, \quad (1 - y)^{1-\beta} a_1(y) + y^{1-\beta} b_1(y) \neq 0,$$

$$a_1(y) \neq 0, \quad \left[\frac{1}{y^{(1/2p)+k}} \left(1 + \left(\frac{y}{1-y} \right)^{1-\beta} \frac{b_1(y)}{a_1(y)} \right) \right]' \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{I}_2.$$

Вопрос разрешимости задачи А эквивалентно редуцируется к вопросу разрешимости интегральных уравнений

$$c\tilde{v}_1(x) + \int_0^1 k(x, t) \tilde{v}_1(t) dt = g(x),$$

$$A(y) \tilde{v}_2(y) + \int_0^1 k^*(y, t) \tilde{v}_2(t) dt = f(y)$$

относительно неизвестных функций $\tilde{v}_1(x), \tilde{v}_2(y)$. Здесь

$$g(x) = c_3^{1+1/(2p)-\beta} D_{0x}^{1-\beta} x^{2\beta-1} c_1(x),$$

$$f(y) = -y^{1/2-\beta} (1-y)^{1-\beta} D_{0y}^{1-2\beta} y^{1-\beta} (1-y)^{1-\beta} c_2(y).$$

Эти уравнения представляют собой систему сингулярных интегральных уравнений. Определены условия, приводящие эту систему к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых будет следовать из единственности решения задачи.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003. 272 с.
2. *Салахитдинов М. С., Менгзияев Б.* Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 133–139.

**ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕМА
ЗАГРЯЗНЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ**

Нахушева М. З., Езаова Б. З.

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Нальчик, Россия; e-mail@address*

Рассмотрим обобщенное уравнение Лапласа в частных производных дробного порядка

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D_{0x_1}^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} D_{0x_1}^{\beta-1} \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad (1)$$

где $D_{0x_1}^\alpha$ – оператор дробного интегриродифференцирования [1, с. 11]

$$D_{0x}^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1+\alpha}}, & \alpha < 0, \\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D_{0x}^{\alpha-(n+1)} f, & \alpha > 0. \end{cases}$$

Докажем, что целевая функция, моделирующая объем загрязнения окружающей среды, является решением уравнения (1).

Пусть l – множество потребителей социально-экономической экосистемы, в которой происходит процесс загрязнения окружающей среды. Введем функцию полезности $u_i = u(x_i)$ для каждого i -го потребителя. Обозначим через $x_i, i = 1, 2, \dots, l$ множество, на котором определена функция u_i , тогда $X = \prod_{i=1}^l x_i$ – декартово произведение множества X_i .

Во множестве X выделим подмножество $X_0 \subseteq X$, которое назовем множеством допустимости. Тогда вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_l), x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, l$ назовем допустимым распределением.

Рассмотрим функцию полезности вида [2, с. 4-14]

$$u(x) = \sum_{i=1}^l a_i x_i^{\alpha_i}, \quad (2)$$

здесь $a_i = const > 0, 0 < \alpha_i = const \leq 1, i = 1, 2, \dots, l$.

Предположим, что интересы социально-экономической экосистемы выражаются следующей функцией полезности:

$$u(x) = u(x_1, x_2),$$

где x_1 – объем потребления, x_2 – переменная, описывающая объем загрязнения. Важно, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} < 0, \quad (3)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \infty.$$

Условие замещения можно описать следующим образом: если потребление x_1 уменьшается на некоторую величину Δx_1 , то объем загрязнения x_2 также уменьшается на Δx_2 . Предельная норма замещения будет иметь вид:

$$S = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}.$$

Также предположим, что функция полезности $u(x)$ при малом уровне потребления для возмещения уменьшения x_1 на одну единицу требуется уменьшить объем работ x_1 загрязнение на достаточно большую величину u , наоборот, при неограниченном возрастании x_1 величина Δx_2 , необходимая для возмещения одной единицы потребления стремиться к 0.

Условия, обеспечивающие монотонное убывание функции $X_2(x_1, \rho_0)$ выполняются при выполнении неравенства [3, с. 172]

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\partial u \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) < 0. \quad (4)$$

Отметим, что данное неравенство выполняется, если

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \leq 0.$$

В качестве примера функции полезности, удовлетворяющего условию (4) может выступать частный случай функции (1)

$$u(x) = u(x_1, x_2) = a_1 x_1^\alpha - a_2 x_2^\beta,$$

здесь $a_1, a_2 > 0$, $0 < \alpha, \beta < 1$.

Мы определили функцию цели, отметим, что она является решением обобщенного уравнения Лапласа в частных производных дробного порядка

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D_{0x_1}^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} D_{0x_2}^{\beta-1} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Таким образом, целевая функция является элементом ядра обобщенного уравнения Лапласа.

Работа выполнена в рамках программы «Приоритет 2030».

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003. 272 с.
2. *Нахушев А. М.* К проблеме математического моделирования региональных социально-экономических систем // Вестник СамГТУ. Серия математическая. 2007. Т. 6, № 2. С. 4–14.
3. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 296 с.

О СТРУКТУРЕ ЯДРА ЗАДАЧИ ШВАРЦА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Николаев В. Г.

Новгородский государственный университет,
Великий Новгород, Россия; vg14@inbox.ru

Пусть неособая 2×2 -матрица J имеет кратное собственное число λ , где $\text{Im } \lambda \neq 0$. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$. Назовем 2-вектор-функцию $\phi = \phi(z)$ аналитической по Дуглису [1, 2] в области D , если она удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad z = x + iy \in D. \quad (1)$$

Пусть область D – эллипс, контур $\Gamma = \partial D$. Для эллиптической системы в частных производных первого порядка (1) рассмотрим следующую *однородную задачу Шварца* [2]. Требуется найти аналитическую по Дуглису в эллипсе D функцию $\phi(z)$ по граничному условию

$$\text{Re } \phi(z)|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Как известно, линейное пространство решений задачи (2) называется ядром задачи Шварца в данном эллипсе D . Очевидными решениями задачи (2) являются вектор-константы $\phi(z) \equiv ic$, $c \in \mathbb{R}^2$. Если ядро состоит только из постоянных функций, то оно называется *тривиальным*. Следующий пример показывает, что в ядро могут входить так же и вектор-полиномы.

Пример 1. Пусть

$$\phi_2(z) = \begin{pmatrix} (x^2 + 9y^2)i \\ 7x^2 + 9y^2 - 1 + 18xyi \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 7i & 1 \\ 16 & -i \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрица J в (3) имеет кратное собственное число $\lambda = 3i$. При этом функция $\phi_2(z)$ является аналитической по Дуглису с данной матрицей J – согласно (1). Имеем: $\text{Re } \phi_2(z)|_{\Gamma} = 0$ на эллипсе $\Gamma: 7x^2 + 9y^2 = 1$.

Справедлива

Теорема. Пусть ядро задачи Шварца в эллипсе D нетривиально. Тогда нетривиальная составляющая ядра состоит из одного вектор-полинома $\phi_n(z)$ некоторой степени n .

Таким образом, в силу теоремы квадратичный вектор-полином $\phi_2(z)$ (3) есть единственная нетривиальная составляющая ядра задачи Шварца для матрицы J (3) в эллипсе $D: 7x^2 + 9y^2 \leq 1$.

Литература

1. Солдатов А. П. Функции, аналитические по Дуглису. Новгород: Издательство НовГУ, 1995. 196 с.
2. Васильев В. Б., Николаев В. Г. О задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 10. С. 1351–1361.

О СОПРЯЖЕНИИ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ

Николаева Н. А.

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск,
Россия; niknataf@mail.ru

В представленной работе рассматривается задача о равновесии двумерного упругого тела с трещиной и с тонким упругим включением. Упругое включение моделируется балкой Тимошенко [1–2]. На берегах трещины задаются краевые условия взаимного непроникания берегов [3]. Предполагается, что трещина точкой пересечения делит включение на две части. Таким образом, возникает контакт частей включения в одной точке. Указанная точка является точкой сопряжения. В этом случае, исходя из геометрии расположения трещины и включения, условие непроникания учитывается и в точке сопряжения. Наличие данного краевого условия исключает взаимное проникание частей включения друг в друга и является естественным с точки зрения механики. Целью данной работы является отыскание краевых условий в точке сопряжения для дифференциальной постановки, доказательство разрешимости соответствующей краевой задачи и проведение анализа сходимости решений при стремлении параметров жесткости тонких включений к бесконечности.

Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (НИР № FSRG-2023-0025).

Литература

1. Grigolyuk E. I., Selezov I. T. Non-classical oscillation theory of rods, plates and shells. Moscow: VINITI, 1973.
2. Khudnev A. M., Leugering G. On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // Mathematics and Mechanics of Solids. 2015. Vol. 20. Pp. 495–511.
3. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Одинабеков Дж. М.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе, Таджикистан
jasur_79@inbox.ru

В настоящей заметке в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ рассматривается следующая эллиптическая система

$$a(z) \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial \bar{z}} + b(z) e^{2i\varphi} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial z^2} + \frac{c(z)}{z} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} + \frac{d(z)}{\bar{z}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} + e(z) \frac{\partial \omega}{\partial z} +$$

$$+f(z)\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{z}}+\nu(z)\omega+h(z)\bar{\omega}=g(z), \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $\omega = u(x, y) + iv(x, y)$, формальные производные по z и по $\bar{z} = x - iy$ определяются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$\varphi = \arg z$, коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ и т.д. будем считать непрерывными функциями в \bar{D} , а $g(z) \in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ ($2 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$):

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z): |z|^{\beta-2/p}f(z) = F(z) \in L^p(D), \|f\|_{L^p_{\beta-2/p}} = \|F\|_{L^p}\},$$

Как видно из (1), коэффициенты при первых производных $\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}$, $\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial z}$ имеют сингулярную особенность первого порядка, а коэффициент при производной $\frac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial z^2}$ в точке $z = 0$ по всем лучам, выходящим из начала координат, имеет разные пределы.

Задача Дирихле. Найти непрерывные решения $\omega(z)$ системы (1) в области D из класса $L^p_{\beta-1-\frac{2}{p}}(D) \cap W^2(D \setminus 0)$, ($2 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$), удовлетворяющие на границе Γ условию

$$\omega(t)|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Это означает, что функция $\omega(z)$ имеет в $D \setminus 0$ обобщенные производные $\frac{\partial^k\omega}{\partial z^{k-l}\partial\bar{z}^l}$ ($k = 1, 2; l = 0, 1, 2$) и $|z|^{\beta-1-\frac{2}{p}}\omega(z) \in L^p(D)$ при $2 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$.

Следует отметить, что вторая кривая задача для эллиптических систем дифференциальных уравнений изучена в [1].

Пусть теперь $|z|^{\beta-1-\frac{2}{p}}\omega(z) \in L^p(D)$ при $2 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$. Тогда $\frac{\omega}{z} \in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, и более того непосредственными вычислениями можно показать, что все функции $\frac{\omega}{z}$, обладающие в D обобщенными производными второго порядка, непрерывные в \bar{D} и удовлетворяющие на Γ условию (2), единственным образом представляются в виде

$$\frac{\omega(z)}{z} = -\frac{2}{\pi} \iint_D \ln \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right| \frac{f(\zeta)}{\zeta} ds_{\zeta}, \quad (3)$$

где $f(z)$ – неизвестная функция из пространства $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, $2 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$. Найдем первую и вторую производную от (3) и подставляя в систему (1) для определения неизвестной функции $f(z)$ из класса $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, $2 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$, получим следующее сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)f(z) - \frac{b(z)}{\pi} \iint_D \frac{\zeta\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}(\zeta - z)^2} ds_{\zeta} + \frac{b(z)}{\pi} \iint_D \frac{z\bar{\zeta}\overline{f(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^2} ds_{\zeta} -$$

$$-\frac{B(z)}{\pi} \iint_D \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta(\zeta-z)} ds_\zeta - \frac{A(z)}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta(\overline{\zeta}-\overline{z})} ds_\zeta + T = g(z), \quad (4)$$

где $A(z) = a(z) + a_1(z)$, $B(z) = b_1(z) - b(z)$, T – вполне непрерывный оператор, первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Применяя к (4) результаты работы [2], получим

Теорема. *Для того чтобы задача (2) была нетривиальной в классе $L^p_{\beta-1-\frac{2}{p}}(D) \cap W^2(D \setminus 0)$, ($2 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$), необходимо и достаточно выполнение условий:*

a) $|a(z)| \neq |b(z)|$ при $z \in \overline{D}$, $a(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma$,

b) $\mathcal{G}_k(x; \beta) \neq 0$, $-\infty < x < \infty$, $k = 0, 1, \dots, N_0$,

причем индекс задачи (2) равен

$$\varkappa = -\{2 \operatorname{Ind}_\Gamma a(t) + 2 \sum_{k=1}^{N_0} \operatorname{ind}_{-\infty < x < \infty} \mathcal{G}_k(x; \beta) + \operatorname{ind}_{-\infty < x < \infty} \mathcal{G}_0(x; \beta)\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Литература

1. *Одинабеков Д. М.* Задача Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка // ДАН Республики Таджикистан. 2015. Т. 58, № 2. С. 106–111.
2. *Джангибеков Г.* Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам эллиптических уравнений на плоскости // ДАН России. 1993. Т. 330, № 4. С. 415–417.

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Орипов Д. Д.

*Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
dastonbekoripov94@gmail.com*

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение высокого четного порядка

$$D_{0t}^\gamma u(x, t) - \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} \right) = f(x, t), \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ – неизвестная функция, $f(x, t)$ – заданная функция, а γ и α – заданные действительные числа, причем $0 < \alpha < 1$, $p - 1 < \gamma \leq p$; $p, n \in \mathbb{N}$, $p \leq 2$.

Задача А. Найти функцию $u(x, t)$, которая:

1) $(\partial^j/\partial x^j)u, (\partial^j/\partial x^j)[x^\alpha(\partial^{2n+1}/\partial x^{2n+1})u], D_{0t}^{\gamma-q}u(x, t) \in C(\overline{\Omega}), j = \overline{0, 2n}, q = \overline{1, p}; (\partial^{2n+1}/\partial x^{2n+1})[x^\alpha(\partial^{2n+1}/\partial x^{2n+1})u], D_{0t}^\gamma u(x, t) \in C(\Omega);$ 2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1); 3) выполняются следующие начальные и граничные условия:

$$D_{0t}^{\gamma-q}u(x, t)|_{t=0} = \varphi_q(x), \quad q = \overline{1, p}, \quad x \in [0, 1];$$

$$\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u(x, t)\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u(x, t)\Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n}, \quad t \in [0, T];$$

$$\frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}u(x, t)\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad t \in [0, T];$$

$$\frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}\left(x^\alpha \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}u(x, t)\right)\Big|_{x=1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad t \in [0, T],$$

где $\varphi_q(x), q = \overline{1, p}$ – заданные функция, D_{0t}^ε – интегро-дифференциальный оператор Римана–Лиувилля [1]:

$$D_{0t}^\varepsilon f(t) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\varepsilon)} \int_0^t (t-z)^{-\varepsilon-1} f(z) dz & \text{при } \varepsilon < 0, \\ f(t) & \text{при } \varepsilon = 0, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{[\varepsilon]+1} D_{0t}^{\{\varepsilon\}-1} f(t) & \text{при } \varepsilon > 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера [2], $[\varepsilon]$ и $\{\varepsilon\}$ – целая и дробная часть числа ε .

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1965. 296 с.

К ТЕОРИИ КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ РАЗНОГО ПОРЯДКА

Охунов Н. К., Олими А. Г.

*Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова,
Худжанд, Таджикистан;
Abdumamon1950@mail.ru.*

Рассмотрим уравнение

$$A_{(\alpha), (b)}^n y = f(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, \quad x \in \Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b), \quad \Gamma = (a, b), \quad (1)$$

получаемое n -кратным повторным применением линейного обыкновенного дифференциального оператора

$$A_{(\alpha),(b)}y \equiv y' + p(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} y - q(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i},$$

где $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, $b_1 < b_2 < b_3$ – точки отрезка $\bar{\Gamma}$ действительной числовой оси, $(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_i > 0$ – действительные числа, точки b_i , $i = 1, 2, 3$ являются сингулярными (особыми) точками уравнения (1), а $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – известные функции, непрерывные на отрезке Γ кроме, быть может, точек b_i в которых могут иметь разрыв первого рода. Число α_i называется порядком сингулярности точки b_i , которая, как в работе [1] называется слабо сингулярной, сингулярной и сверхсингулярной точкой при $0 < \alpha_i < 1$, $\alpha_i = 1$, $\alpha_i > 1$, соответственно.

Решение уравнения (1) определяется как в работах [1], [2].

Определение. Функция $y(x)$ называется решением уравнения (1) на множестве $\Gamma_{(b)}$, если она подчиняется условиям $A_{(\alpha),(b)}^s y \in C^1(\Gamma_{(b)})$, $s = \overline{0, n-1}$ и выражение $A_{(\alpha),(b)}^n y$ обращает его в тождество относительно точек $\Gamma_{(b)}$.

Уравнение (1), в зависимости от расположения точек b_i в пределах $\bar{\Gamma}$ и всевозможных, соответствующих систем значений чисел α_i , $i = 1, 2, 3$, охватывает 108 различных обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя особыми точками.

В наших исследованиях (см., например, [3]–[5]) уравнение (1) изучено в базовых случаях, когда особые точки имеют одинаковый порядок сингулярности, на этой основе исследовались и случаи, когда точки имеют разный порядок сингулярности. В рассмотренных случаях найдено интегральное представление общего решения и доказаны его характеристические свойства. Полученное представление применено для изучения поведения решений в окрестности особых точек. Показано, что все решения уравнения (1) в окрестности слабо сингулярной точки являются ограниченными, а в окрестности сингулярной или сверхсингулярной точки b_i их поведение зависит от знака числа $p(b_i \pm 0)$, стремятся они к нулю или бесконечности, соответственно, как степенная или экспоненциальная функции.

С помощью полученного представления решений уравнения (1) и его характеристических свойств поставлены и решены в явном виде ряд задач с начальными условиями и задача сопряжения решений на особых точках.

Конкретно, в данном докладе представляются основные результаты для одного из случаев уравнения (1).

Литература

1. *Rajabov N.* Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients. Dushanbe: TSNU, 1998. 160p.
2. *Олимов А. Г.* Об одном обобщении линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка // Ученые записки Худжандско-

го государственного университета им. академика Б. Г. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. 2010. Т. 17, № 2. С. 17–19.

3. *Олими А. Г., Охунов Н. К.* Представление общего решения в интегральном виде и граничные задачи для одного обыкновенного операторно-дифференциального уравнения с тремя слабо сингулярными точками // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. 2022. № 3. С.141–159.
4. *Олими А. Г., Охунов Н. К.* Задача типа линейного сопряжения для операторно-дифференциального уравнения с двумя граничными и одной внутренней сингулярными точками // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Г. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. 2022. Т. 63, № 4. С. 2–20.
5. *Раджабов Н. Р., Олими А. Г., Охунов Н. К.* Представление общего решения в интегральном виде и задачи Коши–Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя сингулярными точками // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. 2023. № 1. С. 69–81.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Очилова Н. К.

*Ташкентский международный университет Кимё.Ташкент, Узбекистан;
nargiz.ochilova@gmail.com*

В настоящей работе в области Ω исследуется краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0y}^\alpha u, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - x^n u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

$0 < \alpha < 1$, $m, n = \text{const} > 0$ с оператором Капуто [1]:

$${}_C D_{oy}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} u_t(y,t) dt,$$

Ω_1 – область, ограниченная отрезками: $A_1A_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < h_2\}$, $A_1B_1 = \{(x,y) : y = 0, 0 < x < h_1\}$, $B_1B_2 = \{(x,y) : x = h_1, 0 < y < h_2\}$, $A_2B_2 = \{(x,y) : y = h_2, 0 < x < h_1\}$ при $y > 0$, а Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком A_1B_1 оси x и двумя характеристиками $A_1C : \frac{1}{q}x^q - \frac{1}{p}(-y)^p = 0$, $B_1C : \frac{1}{q}x^q + \frac{1}{p}(-y)^p = 1$, уравнения (1) выходящими из точек $A_1(0;0)$, $B_1(h_1;0)$, пересекающимися в точке $C\left(\left(\frac{q}{2}\right)^{1/q}, -\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p}\right)$ при $y < 0$. Здесь $2q = n + 2$, $2p = m + 2$, $h_1 = q^{1/q}$, $h_2 > 0$ $m > n$.

Введем следующие обозначения:

$\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$, $I_1 = \{(x,y) : 0 < x < h_1, y = 0\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I_1$. $I_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < h_2\}$, $2\alpha_1 = n/(n+2)$, $2\beta_1 = m/(m+2)$ причем $0 < \alpha_1 < \beta_1 < 1/2$.

В области Ω для уравнения (1) исследуется следующая

Задача. Требуется определить функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $\Delta = \{u(x, y) : u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-), u_{xx} \in C(\Omega^+), {}_C D_{oy}^\alpha u \in C(\Omega^+)\}$;
- 2) $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2 ;
- 3) $y^{1-\alpha} u_y \in C(\Omega_1)$, $u_y \in C(\Omega_2)$, причем эти функции непрерывны вплоть до границы $A_1 B_1$. Кроме того на $A_1 B_1$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u_y(x, +0) = \eta_1(x) u_y(x, -0) + \eta_2(x) u(x, 0) + \eta_3(x), (x, 0) \in A_1 B_1;$$

причем $\nu^\pm(x)$ может иметь особенность порядка меньше единицы при $x \rightarrow 0$ и ограничена при $x \rightarrow h_1$;

- 4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$[\xi_1 u_x(x, y) + \xi_2 u(x, y)] \Big|_{A_1 A_2} = \varphi_1(y), 0 \leq y \leq h_2,$$

$$[\mu_1 u_x(x, y) + \mu_2 u(x, y)] \Big|_{B_1 B_2} = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq h_2,$$

$$u(x, y) \Big|_{AC} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \left(\frac{q}{2}\right)^{1/q},$$

где $\xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2 = \text{const}$, и $\eta_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi(x)$ – заданные функции.

Литература

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. in: North-Holland mathematics studies. Elsevier Science B.V.: Amsterdam. 2006. Vol. 204.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧЕРЕПНО-МОЗГОВЫХ ТРАВМ

Ошхунов М. М.^{1,a}, Семенова Ж. Б.^{2,b}, Энес А. З.^{1,c}

¹ *Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия*

² *НИИ неотложной детской хирургии и травматологии, Москва, Россия*

^a *mtuaed@inbox.ru*, ^b *JSeman@mail.ru*, ^c *ahmedenes@mail.ru*

Уравнения механики деформируемого твердого тела.

Для математического моделирования поведения биологических тканей используются системы уравнений, основанные на линейной теории упругости [1–3], уравнения движения и реологические соотношения:

$$p v_i = \nabla_j \sigma_{ij} \sigma_{ij} = q_{ijkl} e_{kl} + F_{ij}, \quad (1)$$

где p – плотность среды; v_i – компоненты скорости смещения, σ_{ij} , e_{kl} – компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций; ∇_j – ковариантная производная по j -й координате; F_{ij} – правая часть.

Тензор 4-го порядка q_{ijkl} определяет реологию среды. В случае линейно упругого тела его компоненты выражаются через две независимые постоянные – константы Ламе λ и μ :

$$q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} + \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2)$$

Плотность определяется из уравнения состояния $p = p_e(\frac{p}{k})$, где $p = -\frac{1}{3} \sum \sigma_{kk}$ – давление; $k = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ – коэффициент всестороннего сжатия. Уравнения (1) и (2) допускают запись в матричной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mu} + A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{\mu} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{\mu} = \vec{f},$$

где $\vec{\mu} = (v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})^T$ – вектор искоемых функций; \vec{f} – вектор правых частей той же размерности; A_i – матрицы 6×6 , x_1, x_2 – независимые пространственные переменные; t – время.

Конечно-элементная модель.

Для проведения математического моделирования процесса ударного взаимодействия бетонного блока с затылочной областью головы использован метод конечных элементов.

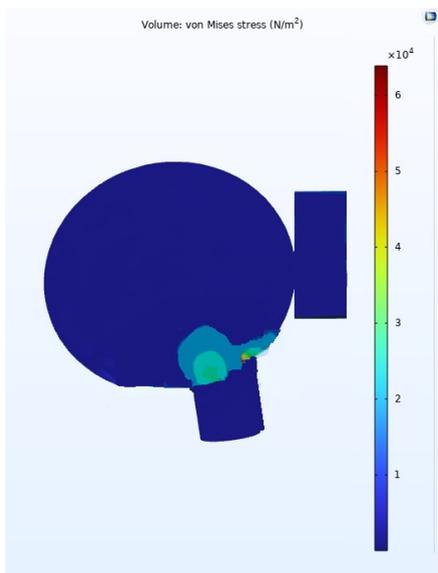


Рис. 1. Зоны эквивалентного растяжения при ударе в затылочную область головы бетонного блока

В качестве модели использовался вытянутый сфероид. Исследуемая модель представляет собой кожно-апоневротический лоскут, который находится на поверхности головы. Затем следовали слои костей свода черепа, ликвора субарахноидального пространства, а также поверхностных и глубинных отделов головного мозга.

При помощи программной оболочки COMSOL Multiphysics получены математические 3D-модели черепа, ликвора, головного мозга и бетонного блока с использованием метода конечных элементов [2–4].

В ходе эксперимента создавались условия когда в «затылочную область» закрепленной модели головы бьет бетонный блок перпендикулярно поверхности блока со скоростью 0,2 м/с. Созданная модель закреплена связями с ограничением перемещений по осям x , y , z в области «большого затылочного отверстия».

Как видно из рис. 1, максимальное напряжение мозговой ткани образуется в области большого затылочного отверстия и впереди от него за счет деформации растяжения.

Литература

1. *Новацкий В. К.* Теория упругости. М., 1975.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 138 с.
3. *Зильберглейт А. С., Златина И. Н., Синяков В. С., Хайкова М. И.* Способ измерения модуля упругости мышечной ткани человека // Бюллетень экспериментальной биологии и медицины. 1983. № 12. С. 101–105.
4. *Khalil T. B., Hubbard R. P.* Parametric study of head response by finite element modeling // Journal Biomechanics. 1977. Vol. 10, no. 2. Pp. 119–132.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА СУШКИ ЯЧМЕНЯ ПУТЕМ ИК-НАГРЕВА

**Павленко В. А., Арсланбекова С. А., Дик Е. Н.,
Зиянгирова С. Р.**

*Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Башкирский Государственный
Аграрный Университет, Уфа, Россия; PVA100186@mail.ru*

В последнее время одной из основных проблем аграрной науки является изучение процесса сушки зерновых. Этой проблемой занимаются также сотрудники кафедры прикладной механики и компьютерного инжиниринга Башкирского Государственного Аграрного Университета (БГАУ). Ими в лабораторных условиях в стенах БГАУ производилась сушка различных культур зерновых: пшеницы, ржи, овса и ячменя. В свою очередь, сушка зерновых также производилась различными способами: СВЧ, ИК-нагрев, сублимированная, конвективная, вакуумная.

Зерно, в основном, поступает на сушку влажностью приблизительно 35 – 40%. Экспериментально установлено, что в таком случае наиболее эффективным является сушка путем ИК-нагрева. В редких случаях зерно поступает влажностью менее 25%. В таких случаях наиболее эффективными будут уже другие способы сушки, см. работу [1].

В настоящей работе речь пойдет об ИК-нагреве, точнее, о построении математической модели сушки зерновых путем ИК-нагрева. В качестве испытуемого зерна был выбран ячмень. В построенной модели будут указаны зависимости температуры, влагосодержания ячменя, а также давления внутри резервуара от времени.

В книге [2] приведена система дифференциальных уравнений, которая отражает зависимость температуры, давления и влагосодержания зерна от времени. Эта система имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_{11}\Delta T + k_{12}\Delta U + k_{13}\Delta P, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = k_{21}\Delta T + k_{22}\Delta U + k_{23}\Delta P,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = k_{31}\Delta T + k_{32}\Delta U + k_{33}\Delta P,$$

где T – температура, U – влагосодержание, P – давление внутри резервуара, t – время. Коэффициенты в уравнениях следующие

$$k_{11} = a_m, \quad k_{12} = a_m\delta, \quad k_{13} = \frac{k_p}{\rho_0}, \quad k_{21} = \frac{r\varepsilon a_m}{c}, \quad k_{22} = a + \frac{r\varepsilon a_m\delta}{c},$$

$$k_{23} = \frac{r\varepsilon a_m\delta_p}{c}, \quad k_{31} = -\frac{a_m\varepsilon}{c}, \quad k_{32} = -\frac{a_m\varepsilon\delta}{c}, \quad k_{33} = a_p - \frac{a_m\varepsilon\delta_p}{c_p},$$

где a_m – коэффициент диффузии зерна, δ – коэффициент диффузии влаги в зерне, k_p – коэффициент фильтрационного переноса влаги, ρ_0 – плотность зерна, r – удельная теплота парообразования воды, то есть, $r \approx 2,3 \times 10^6$ Дж/кг, ε – коэффициент, характеризующий скорость потока влаги и пара в процессе сушки, c – удельная теплоёмкость воды, то есть $c \approx 4200$ Дж/(кг*К), a – коэффициент диффузии сухого вещества в зерне, δ_p – относительный коэффициент фильтрационного переноса влаги, a_p – коэффициент конвективной фильтрационной диффузии, c_p – коэффициент емкости влажного воздуха в зерне.

Основная проблема заключается в том, что невозможно узнать значения приведенных выше коэффициентов. В справочных литературах они отсутствуют, вычислить их экспериментально тоже невозможно. Более того, часть коэффициентов существенно зависят от температуры, влагосодержания и давления. Поэтому в ходе эксперимента были получены значения температуры, влагосодержания и давления внутри резервуара в течение каждой секунды сушки. Далее была проведена математическая обработка результатов этого эксперимента и, получив формулы, отражающие зависимости температуры, влагосодержания и давления внутри резервуара, подставили в уравнения. Тем самым, получены значения приведенных выше коэффициентов, а также каким образом они меняются в процессе сушки.

Литература

1. Масалимов И. Х., Каримов Х. Т. Оценка способов сушки ячменя // Вестник Российской академии сельскохозяйств. наук. 2014. № 3. С. 71–72.
2. Лыков А. В. Теория сушки. Москва: Энергия, 1968. 465 с.

**КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ТЕСТ 0-1
ДРОБНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СЕЛЬКОВА
С ПЕРЕМЕННОЙ ПАМЯТЬЮ**

Паровик Р. И.

*Институт космических исследований и распространения радиоволн
ДВО РАН, Камчатский край, Паратунка, Россия; parovik@ikir.ru*

Рассмотрим следующую задачу Коши [1]:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1(t)} x(t) = -x(t) + ay(t) + bx^2(t)y(t), x(0) = x_0, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2(t)} y(t) = v - ay(t) - bx^2(t)y(t), y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t), y(t) \in C^1[0, T]$ – искомые функции решения, v, a, b, x_0, y_0 – заданные константы, $0 < \alpha_1(t), \alpha_2(t) < 1$ – заданные непрерывные функции.

Здесь дробные производные переменного порядка $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ понимаются в смысле Герасимова–Капуто и определяются из формулы (2) при $m = 1$:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m - \alpha(t))} \int_0^t \frac{x^{(m)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha(t)+1-m}}, 0 \leq m - 1 < \alpha(t) < m, \\ \frac{d^m x(t)}{dt^m}, m \in N. \end{cases} \quad (2)$$

Задачу Коши (1) будем называть дробной динамической системой Селькова с переменной памятью [1].

Замечание 1. Необходимо отметить, что в случае, когда порядки дробных производных $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ принимают постоянные значения, то мы приходим к дробной динамической системе Селькова с постоянной памятью, рассмотренной в работе [2]. Если порядки дробных производных постоянные и равны единице, то мы приходим к классической динамической системе Селькова, которая была применена к исследованию автоколебательного процесса превращения субстрата и продукта в биологии [3]. В работе [4] авторы предложили применить классическую динамическую систему Селькова для описания автоколебательного режима микротрещин.

Замечание 2. Дробные производные постоянного порядка хорошо раскрыты в монографиях [5] и [6], а ознакомиться с дробными производными переменного порядка можно в обзорной статье [7].

В настоящей работе с помощью алгоритма Тест 0-1, который был предложен в статье [8], были исследованы хаотические и регулярные режимы дробной динамической системы Селькова (1). Для этих целей сначала было получено численное решения задачи Коши (1) на основе метода Адамса–Башфорта–Мултона [9]. Далее, для избежания эффекта

«передискретизации» (гладкости данных), была проведена процедура «прореживания» полученного дискретного набора данных численного решения. Были отобраны те значения, которые соответствовали локальным минимумам и максимумам. Далее, полученный прореженный дискретный временной ряд подавался на вход алгоритма Тест 0-1.

Суть алгоритма Тест 0-1 заключается в построении коэффициентов корреляции между наборами дискретных значений временного ряда в зависимости от значений интересующего нас параметра дробной динамической системы Селькова (1). Если коэффициенты корреляции группируются вблизи единицы, то речь идет о хаотическом режиме, а если вблизи нуля, то о регулярном режиме. Визуализация динамических режимов дается с помощью бифуркационных диаграмм.

Замечание 3. Необходимо отметить, что процедура нахождения численного решения задачи Коши (1) и реализация алгоритма Тест 0-1 была осуществлена в среде компьютерной математики Matlab.

В работе были подтверждены результаты, полученные ранее [1], а также уточнены границы диапазонов значений параметров задачи Коши (1), при которых характерно возникновение хаотических режимов в дробной динамической системе Селькова.

Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда № 22-11-00064 (<https://rscf.ru/project/22-11-00064/>) по теме «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности».

Литература

1. *Parovik R. I.* Studies of the fractional Selkov dynamical system for describing the self-oscillatory regime of microseisms // *Mathematics*. 2022. Vol. 10, no. 22. Pp. 4208.
2. *Паровик Р. И.* Исследование дробной динамической системы Селькова // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2022. Т. 41, № 4. С. 146–166.
3. *Selkov E. E.* Self-oscillations in glycolysis. I. A simple kinetic model // *Eur. J. Biochem*. 1968. no. 4. Pp. 79–86.
4. *Маковецкий В. И., Дудченко И. П., Закупин А. С.* Автоколебательная модель источников микросейсм // *Геосистемы переходных зон*. 2017. № 4(1). С. 37–46.
5. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003. 272 с.
6. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
7. *Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F.* Applications of variable-order fractional operators: A review // *Proc. R. Soc. A R. Soc. Publ*. 2020. no. 476. 20190498.
8. *Gottwald G. A., Melbourne I.* On the implementation of the 0–1 test for chaos // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2009. Vol. 8, no. 1. Pp. 129–145.
9. *Diethelm K, Ford N. J., Freed A.D.* A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations // *Nonlinear Dyn*. 2002. no. 29, Pp. 3–22.

φ – СИЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ, ТИПА
МАРЦИНКЕВИЧА, ОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пачулия Н. Л., Голава М. Р.

Абхазский государственный университет, Сухум, Абхазия
niaz-pachulia@rambler.ru

Пусть $(\varphi_n^{(v)})_{n \in \mathbb{N}_0}$, $v = 1, 2$, ортонормированные с неотрицательными ограниченными весами α_v , соответственно, на сегментах $\Delta_v = [a_v, b_v]$, системы функций полиномиального вида, сохраняющие постоянные и равномерно ограниченные на $\Delta_v^{(1)} = [c_v, d_v \subset (a_v, b_v)]$.

Далее, пусть $\Delta = \Delta_1 X \Delta_2$, $\Delta_0^1 = \Delta_1^1 X \Delta^1$ и $f \in L_{1,\alpha}[\Delta] \cap L_{2,\alpha}[\Delta \setminus \Delta_0^1]$, $S[f]$ – ряд Фурье функции f , $S_{m,n}(f, x, y)$ – прямоугольные частные суммы порядка m по x и n по y ряда $S[f]$. Справедлива

Теорема. Пусть $f \in L_{\mu,\alpha}[\Delta] \cap L_{2,\alpha}[\Delta \setminus \Delta_0^1]$, $\mu > 1$, $(x, y) \in (c_1, d_1) X (c_2, d_2)$ и $1 < p < \mu$

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2} \int_x^{x+h_1} \int_y^{y+h_2} |f(t, \tau) - f(x, y)|^p dx dy \right\}^{\frac{1}{p}} = 0, \quad (1)$$

$$\sup_{h_1} \frac{1}{h_1} \int_x^{x+h_1} \int_{a_2}^{b_2} |f(t, \tau) - f(x, y)|^p dx dy = M_1(x, y) < \infty, \quad (2)$$

$$\sup_{h_2} \frac{1}{h_2} \int_{a_1}^{b_1} \int_y^{y+h_2} |f(t, \tau) - f(x, y)|^p dx dy = M_2(x, y) < \infty, \quad (3)$$

а функция φ удовлетворяет следующим свойствам: непрерывна на $[0, \infty)$, возрастает, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ для $u > 0$, $\varphi(2u) \leq \alpha \varphi(u)$ для $u \in [0, \sigma]$, $\ln \varphi(u) = 0 \left(u^{\frac{1}{2}} \right)$, $u \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(|S_{k,k}(f, x, y) - f(x, y)|) = 0. \quad (4)$$

Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \varphi(u)/u^{\frac{1}{2}} = \infty$, то существуют системы функции $\varphi_n^{(1)} \varphi_n^{(2)}$, непрерывная функция f и точка (x_0, y_0) в которой равенство (4) не выполняется.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВАЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ
АГРЕССИВНЫХ НАСЕКОМЫХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ
РЕГУЛЯЦИЕЙ**

Переварюха А. Ю.

*Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН,
Санкт-Петербург, Россия; madelf@rambler.ru*

Нами развиваются методы имитационного моделирования для агрессивных инвазионных процессов в модификациях с необычными коэффициентами:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{(1 - N(t)/(K + \vartheta N))^{\Theta}}{(1 - N(t))/K(1 - \gamma)}.$$

Решения подобных моделей с $\dot{N} = rF(N(t))^{\Theta}$ описывают уравнивающиеся процессы $\forall N(0) > 0$. Не все уравнения имеет смысл дополнять включением $t - \tau$. Основное отличие у разных моделей ограниченного роста — положение точки перегиба $N_p \neq 0$ на графике решения $N(t)$. Для модели ордината точки перегиба $N_p = K/2$, абсцисса $t_p = r^{-1} \ln(K - N(0))/N(0)$. Положение ординаты точки перегиба N_p важно установить для задачи оптимальной эксплуатации и анализа сценариев с изъятием $\dot{N} = rf(N(t)) - Q$. Прирост численности в точке N_p максимизируется — популяция демонстрирует лучшую продуктивность, а весь излишек прироста можно изымать. Концепция чрезвычайно опасна для промысла популяций с критическими пороговыми состояниями. Модель $\dot{N} = rf(N(t - \tau)) - F(N)$ с запаздывающей регуляцией, но без параметра ниши K с $f(x) = rxe^{-bx}$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau) \exp(-bN(t - \tau)) - \delta N(t).$$

При увеличении $r\tau$ решение демонстрирует колебания с $\min N_*(t) \rightarrow \epsilon$.

В работе сравним динамику разработанной нами детерминированной модели инвазионного процесса для агрессивного вселенца с $N(t - \tau)$ и модель инвазии в форме уравнения с отклоняющимся аргументом, где величина запаздывания τ возмущена равномерно распределенной случайной величиной $\gamma \in [-0.5, 0.5]$, что отражает влияние случайных факторов на небольшую исходную группу особей-вселенцев. Для включения стохастической компоненты лучше возмущать именно величину запаздывания $\gamma\tau$, что качественно отразится на сценариях инвазионного процесса. Возмущение репродуктивного параметра не несет существенного смысла, но стохастика запаздывания позволяет рассматривать сценарии — сравнивать варианты, актуальные для разрушающих среду вредителей [1].

Разработана модель специфических экстремальных кризисных процессов популяций вне равновесного состояния популяции со средой на базе систем уравнений с возмущенным запаздыванием и с пороговыми триггерными функциями. Исследуемые экстремальные биофизические

процессы происходят при инвазиях агрессивных чужеродных видов в адаптирующуюся среду. Время адаптации нового биотического окружения и восстановление истощенных активным вселенцем ресурсов среды, важные характеристики популяционного процесса. Эффекты запаздывания разделены на три типа по биологическому генезису и роли в развитии процессов. Инвазионные процессы проходят этап кризисной динамики $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$ и сопровождаются длительными осцилляциями. Так биосистема получит несколько сценариев динамики кризиса, включая гибель $N(t_\infty) = 0$.

Зададим пороговое развитие инвазионного популяционного процесса с кризисом в уравнении с функцией сопротивления среды $\dot{N} = F(N(t - \tau)) - \Psi(N(t - \nu))$. Пороговый эффект реакции агрессивному росту численности вселенца выразим \ln_K -регуляцией в функции противодействия $\Psi(N(t - \nu))$ и при $Q > q$, $m \geq 2$, $N(0) < J < K$ так:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{K}{N(t - \tau)} \right) - Q \frac{N^m(t - \nu)}{(J - N(t))^2} - qN(t).$$

В разработанной нами модели (1) на начальном этапе идет увеличение численности небольшой группы $N(0) < J$. Далее рост остановлен. Вместо стабилизации $N(t) \rightarrow K$, $N(t_S) < K$ или превышения равновесия K начинается стадия резкого кризиса с возрастанием $F(N^2; J^{-1})$ при $N \rightarrow J$ и потенциал роста еще не нивелирован \ln_K -регуляцией.

Рассмотрен сценарий, когда достигнутая численность $N(t) \rightarrow K$ не будет устойчивой. Стохастическое возмущение динамики значимо при активации противоборства в состоянии критическом для среды. При приближении к порогу разрушения среды наблюдается усиление противодействия, что типично для иммунного ответа организма. Время активации важно, вариативно, но не менее τ_1 . Пусть τ_1 варьируется случайной величиной γ в ограниченном диапазоне. Предложим модель инвазии с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{K}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \delta > q, \gamma(\omega) \in [1, 2].$$

При приближении $N(t)$ к пороговому значению J , $N(0) < J < K$ резкий переход в глубокий популяционный кризис $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$. Сценарий преодоления кризиса с образованием колебаний $N(t) \rightarrow N_*(t)$, $\max N_*(t) < J$ зависит от стохастических временных факторов. Популяция погибает при увеличении репродуктивного потенциала r . Существует $r = \bar{r}$, что для события $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} N(t; \bar{r}\tau) = 0$ вероятность $P > 0$ и $\exists \hat{r} > \bar{r}$, $t < \infty$ реализуется для данного события $P = 1$, \hat{r} – критический порог репродуктивной активности.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект РНФ № 23-21-00339) в СПб ФИЦ РАН.

Литература

1. Соловьева Т. Н., Переварюха А. Ю. Динамическая модель деградации запасов осетровых рыб со сложной внутрипопуляционной структурой // Информационно-управляющие системы. 2016. № 4. С. 60–67.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ «СРЕДНЕГО ПОЛЯ» ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИЙ

Петракова В. С.^{1,2,a}, Криворотько О. И.^{2,b}

¹ *Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск,*

² *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* ^a *vika-svetlakova@yandex.ru,* ^b *krivorotko.olya@mail.ru*

С 2020 года пандемия Covid-19 стала одной из ключевых проблем в сфере здравоохранения, экономики и повседневной жизни людей. Для прогнозирования распространения заболеваемости за годы пандемии было разработано более сотни различных математических моделей, при этом поиск наиболее эффективных из них все еще ведется, поскольку SARS-Cov-2 имеет ряд существенных особенностей, затрудняющих моделирование. Например, динамика заболевания коронавирусом различается в зависимости от рассматриваемого региона и крайне нестабильна из-за появления новых штаммов или введения противовирусных мер. Коронавирус также имеет ряд симптоматических отличий от других вирусов, часто протекает в легкой форме и может протекать бессимптомно, а вылечившийся человек не получает стойкого иммунитета и может повторно заразиться.

Работа посвящена переносу известных экономических моделей «среднего поля» [1] на прогнозирование распространения эпидемий, в частности эпидемии коронавируса. Идея использования подхода «Игры среднего поля» для моделирования распространения вирусов обусловлена тем, что традиционные эпидемиологические модели, такие как компартментальные модели SIR-типа [2], не учитывают неоднородность населения, и поэтому не могут использоваться для долгосрочных прогнозов. Другой известный подход к решению такой задачи, так называемые агентные модели [3], позволяют учитывать неэпидемиологические факторы, но приводят к вычислительно сложным системам. В свою очередь, структурная простота моделей «среднего поля» и возможность учета усредненного массового поведения агентов делают такие модели привлекательными для использования их в области эпидемиологии.

В работе представлено два математических подхода «среднего поля» к решению задачи прогнозирования развития эпидемии. Различие рассматриваемых подходов заключается в выборе является ли стратегия изоляции, выбираемая игроками общей для всей популяции или разной для каждой эпидемиологической группы. Показано, что схожие по структуре модели приводят к разным результатам моделирования. Приведен пример прогноза распространения COVID-19 с помощью обоих

подходов по наблюдаемой эпидемиологической ситуации в г. Красноярск в 2021 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-71-10068).

Литература

1. *Lasry J. M., Lions P. L.* Mean field games // Japanese Journal Of Math. 2007. Vol. 2, no. 1. Pp. 229–260.
2. *Brauer F.* Mathematical epidemiology: Past, present, and future // Infectious Disease Modelling. 2017. Vol. 2, no. 2. Pp. 113–127.
3. *Krivorotko O., Sosnovskaia M., Vashchenko I., Kerr C., Lesnic D.* Agent-based modeling of COVID-19 outbreaks for New York state and UK: parameter identification algorithm // Infectious Disease Modelling. 2022. Vol. 7, no. 1. Pp. 30–44.

ВЫРОЖДЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПРОИЗВОДНОЙ ДЖРБАШЯНА–НЕРСЕЯНА В СЕКТОРИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Плеханова М. В.^a, Ижбердеева Е. М.^b

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;

^amariner79@mail.ru, ^belizaveta.izhberdeeva@gmail.com

Пусть D^{σ_k} – дробная производная Джрбашяна – Нерсеяна, которая определяется набором действительных чисел $\{\alpha_k\}_0^n = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, где $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, предполагается, что $\sigma_n > 0$.

Пусть \mathcal{X}, \mathcal{Y} банаховы пространства. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из \mathcal{X} в \mathcal{Y} , через $\mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ обозначим множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в \mathcal{X} , действующих в \mathcal{Y} . Обозначим через $D_L, D_M \subset \mathcal{X}$ области определения операторов $L, M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ соответственно.

Рассмотрим начальную задачу

$$D^{\sigma_k} Px(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

для уравнения

$$D^{\sigma_n} Lx(t) = Mx(t) + f(t), \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

где $L, M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, функция $f \in C([0, T]; \mathcal{Y})$.

Функция $x: (0, T) \rightarrow D_L \cap D_M$ называется решением задачи (1), (2), если $D^{\sigma_k} Px \in C([0, T]; \mathcal{X})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $D^{\sigma_n} Lx \in C((0, T); \mathcal{Y})$, $Mx \in C((0, T); \mathcal{Y})$, равенство (2) справедливо для всех $t \in (0, T)$ и выполняются условия (1).

Обозначим через $R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) := L(\mu L - M)^{-1}$, через $\rho^L(M)$ обозначим множество $\mu \in \mathbb{C}$, такое, что отображение $\mu L - M: D_L \cap D_M \rightarrow \mathcal{Y}$ инъективно и $R_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$.

Обозначим также $S_{\theta,a} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \theta, \lambda \neq a\}$ для $\theta \in (\pi/2, \pi)$, $a \in \mathbb{R}$.

Пара операторов (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\sigma_n > 0$, если для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполнено $\lambda^{\sigma_n} \in \rho^L(M)$; для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует $K(\theta, a) > 0$ такое, что для всех $\mu \in S_{\theta, a}$

$$\max\{\|R_{\mu^{\sigma_n}}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L_{\mu^{\sigma_n}}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\mu - a|^{\alpha_0} |\mu|^{\sigma_n - \sigma_0 - 1}}.$$

Обозначим $\ker R_{\mu}^L(M) = \mathcal{X}^0$, $\ker L_{\mu}^L(M) = \mathcal{Y}^0$. Обозначим через \mathcal{X}^1 (\mathcal{Y}^1) замыкание образа $\text{im} R_{\mu}^L(M)$ ($\text{im} L_{\mu}^L(M)$) в норме пространства \mathcal{X} (\mathcal{Y}). Через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $D_{L_k} := D_L \cap \mathcal{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{Y}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 1. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, пара операторов $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Y})$, $L_1^{-1}Qf \in C([0, T]; D_{L_1^{-1}M_1}) \cup C^\gamma([0, T]; \mathcal{X}^1)$ для некоторых $\gamma \in (0, 1]$, $x_k \in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), и оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} X_{-\sigma_k}^1(t)x_k + \int_0^t X_{1-\sigma_n}^1(t-s)L_1^{-1}Qf(s)ds - M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Теорема 2. Пусть банаховы пространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} рефлексивны, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\alpha_0 + \alpha_n > 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, пара операторов $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $f \in C((0, T); \mathcal{Y})$, $Qf \in C([0, T]; D_{M_1L_1^{-1}}) \cup C^\gamma([0, T]; \mathcal{Y}^1)$ для некоторых $\gamma \in (0, 1]$, $x_k \in D_L \cap D_M \cap \mathcal{X}^1$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) и оно имеет вид

$$x(t) = L_1^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} Y_{-\sigma_k}^1(t)Lx_k + L_1^{-1} \int_0^t Y_{1-\sigma_n}^1(t-s)Qf(s)ds - M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Замечание. Если рассмотреть задачу $D^{\sigma_k}x(0) = x_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ для уравнения (2), то получим аналогичные результаты с дополнительным условием согласования

$$D^{\sigma_k}M_0^{-1}(I-Q)f(0) = -(I-P)x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Литература

1. Fedorov V.E., Plekhanova M.V., Izhberdeeva E.M. Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan–Nersesyan fractional derivative // Fractal and Fractional. 2022. Vol. 6, no. 541. Pp. 1–16.

2. *Plekhanova M.V., Izherdeeva E.M.* Degenerate equations with the Dzhrbasyan–Nersesyan derivative in the sectorial case // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 2. Pp. 634–643.

ВЫРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДЖРБАШЯНА–НЕРСЕСЯНА

Плеханова М. В.^а, Пестерев И. Н.^б

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
^аmariner79@mail.ru, ^бpesterev_gosha@mail.ru

Пусть \mathcal{X}, \mathcal{Y} – банаховы пространства. Обозначим через $D_L, D_M \subset \mathcal{X}$ области определения оператора $L, M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линейные замкнутые плотно определенные операторы) соответственно, $R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) := L(\mu L - M)^{-1}$, через $\rho^L(M)$ обозначим множество $\mu \in \mathbb{C}$, такое, что отображение $\mu L - M : D_L \cap D_M \rightarrow \mathcal{Y}$ инъективно и $R_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$.

Определение. Пусть $L, M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Пара операторов (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ для некоторого $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\sigma_n > 0$, если

- (i) для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется включение $\lambda^{\sigma_n} \in \rho^L(M)$;
- (ii) для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует $K(\theta, a) > 0$, такое что для всех $\mu \in S_{\theta, a}$

$$\max\{\|R_{\mu^{\sigma_n}}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L_{\mu^{\sigma_n}}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\mu - a|^{\alpha_0} |\mu|^{\sigma_n - \sigma_0 - 1}}.$$

Пусть $\alpha_k \in (0, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, $(L, M) \in \mathcal{H}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $\gamma = \partial S_{\theta, a}$ для некоторого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. Тогда семейства

$$\left\{ X_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \mu^{\sigma_n - 1 + \beta} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t > 0 \right\}, k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\left\{ Y_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \mu^{\sigma_n - 1 + \beta} L_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}) : t > 0 \right\}, k = 0, 1, \dots, n-1,$$

аналитически продолжим в секторе $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$.

В случае $\ker L \neq \{0\}$ вырожденные семейства операторов $X_\beta(t)$ используются при построении решения уравнения

$$D^{\sigma_n} Lx(t) = Mx(t), \quad t \in (0, T),$$

где D^{σ_n} – дробные производные Джрбашяна–Нерсесяна, которые заданы набором чисел $\{\alpha_k\}_0^n = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\sigma_n > 0$.

Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

Литература

1. Плеханова М. В., Ижбердеева Е. М. k -разрешающие семейства операторов для уравнений с производной Джрбашьяна–Нерсесяна // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2022): материалы 4-й Международной конференции. 19–22 сентября 2022. Иркутск: Издательство ИГУ. С. 38–40.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Попов С. В.^{1,2,a}, Попов Н. С.^{2,b}

¹Академия наук Республики Саха (Якутия), ²Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова Якутск, Республика Саха (Якутия), Россия; ^adusporov@mail.ru, ^bporovnsrg@mail.ru

Нелокальные краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с интегральными условиями на боковой границе рассматривались в работах [1]. Исследования для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка с интегральным условием на боковой границе проводились в работах [2, 3]. В работе изучается интегро-дифференциальное уравнение с интегральными условиями на боковой границе и доказывается теорема существования и единственности регулярного решения.

Пусть Ω – ограниченная область пространства \mathbb{R}^n с гладкой границей Γ , Q – цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $S = \Gamma \times (0, T)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$ заданные в цилиндре \bar{Q} функции, $u_0(x)$, $u_1(x)$ – на множестве $\bar{\Omega}$, $N(t)$ – при $t \in [0, T]$ и $K(x, y, t)$ – при $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

В цилиндре Q рассматривается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((Au)_t - \Delta u \right) - \Delta u + cu = f, \quad Au = \int_0^t N(t - \tau)u(x, \tau) d\tau. \quad (1)$$

Для уравнения (1) выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t)dy|_{(x,t) \in S} \quad (3)$$

или

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x)} \Big|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K_2(x, y, t)u(y, t)dy \Big|_{(x,t) \in S}. \quad (4)$$

Доказательство разрешимости проводится методами перехода к нагруженному уравнению с однородными краевыми условиями, продолжения по параметру, априорных оценок, доказываются регулярные разрешимости поставленных краевых задач (1)–(3) или (1), (2), (4).

Отметим, что исследованию краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с вырождением и с нелокальными граничными условиями посвящена работа [4].

Литература

1. *Кожанов А. И.* Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // ДАН. 2014. Т. 457, № 2. С. 152–156.
2. *Попов Н. С.* О разрешимости краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, № 1. С. 82–95.
3. *Popov N. S.* Solvability of a Boundary Value Problem for a Pseudoparabolic Equation with Nonlocal Integral Conditions // Differential Equations. 2015. Vol. 51, no. 3. Pp. 362–375.
4. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для одного класса нелокальных интегро-дифференциальных уравнений с вырождением // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2017. Т. 23, № 4. С. 19–24.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЛАТФОРМ ОБРАБОТКИ BIG DATA: HADOOP И SPARK

Потапов И. Р.^а, Маслова О. И.^б

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия

^а*iv.pot.03@mail.ru*, ^б*oksmaslova@inbox.ru*

В настоящее время рост объемов новой информации происходит экспоненциально вверх. Чтобы своевременно реагировать на все изменения, появилась необходимость в уже ставшей неотъемлемой частью современного мира обработке больших данных.

Для эффективной работы с большими объемами информации стала острой нужда в модернизации имеющихся для анализа данных инструментов и технологий. Рассмотрим несколько подобных инструментов, а точнее Hadoop и Spark – одни из популярнейших фреймворков для обработки больших данных.

Hadoop – это фреймворк, предназначенный для разработки, а так же выполнения распределенных программ, работа которых основана на распределении обработки на кластеры из огромного количества узлов.

Spark – фреймворк, позволяющий реализовать распределенную обработку неструктурированных и слабоструктурированных данных с высокой скоростью за счет обработки данных в оперативной памяти, вместо обращения к диску.

Проведен анализ характеристик вышеуказанных платформ, позволяющий выявить основные преимущества и недостатки. Сравнение проводилось по следующим факторам: модель вычислений, производительность, масштабируемость, потоковая обработка данных, обработка малых объемов данных, машинное обучение, интеграция с другими инструментами и стоимость.

Итогом сравнительного анализа стало заключение о том, что использование Spark является наиболее эффективным, т.к. он обладает превосходством в производительности и скорости обработки, тем самым соответствуя современным стандартам и требованиям анализа данных.

Литература

1. Уайт Т. Nadoop: Подробное руководство. СПб.: Питер, 2013. 672 с.
2. Ермагамбетов Р. Т. Современные системы хранения и обработки больших данных: Nadoop и Apache Spark // Форум молодых ученых. 2018. № 8(24). С. 229–239.

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТАНКОВИЧА И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

Псху А. В.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; pskhu@list.ru*

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{D}_x^{[\mu]} f(x) = \int_{\mathbb{R}} D_{0x}^t f(x) \mu(dt), \quad (1)$$

где D_{0x}^t – оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка t по переменной x с началом в точке $x = 0$; μ – неотрицательная мера Лебега–Стилтьеса на \mathbb{R} с компактным носителем. Операторы вида (1) относятся к классу операторов дробного дифференцирования распределенного порядка [1, 2].

В докладе обсуждается метод построения решений начальных задач для эволюционных уравнений вида

$$\mathcal{D}_x^{[\mu]} u(x) = Lu(x) + f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{D}_x^{[\mu_1]} u(x) = a.$$

Здесь L – линейный оператор, μ_h – сдвиг меры μ на h . Предполагается, что $\text{supp } \mu \in (0, 1)$.

Метод основан на интегральном преобразовании, связывающим оператор (1) с оператором дифференцирования первого порядка [3]. Данное преобразование обобщает преобразование Станковича [4, 5] на случай распределенных параметров, и совпадает с ним в случае, когда мера μ сосредоточена в единственной точке.

Среди других обсуждаемых в работе приложений данного преобразования – формула обращения оператора (1).

Литература

1. Нахушев А. М. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.

2. *Нахушев А. М.* К теории дробного исчисления // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 313–324.
3. *Pskhu A. V.* Transmutation operators intertwining first-order and distributed-order derivatives // Bol. Soc. Mat. Mex. (to appear).
4. *Станковић Б.* О једној класи сингуларних интегралних једначина // Зборник радова С.А.Н. 1955. Кн. 4. С. 81–130.
5. *Pskhu A. V.* The Stankovich Integral Transform and Its Applications: Agarwal, P., Agarwal, R.P., Ruzhansky, M. (Eds.) Special Functions and Analysis of Differential Equations, Chapman and Hall/CRC, 2020. Pp. 197–212.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Пулькина Л. С.

*Самарский национальный исследовательский университет им. академика
С. П. Королева, Самара, Россия; ludmila.pulkina@gmail.com*

В докладе рассматривается задача с нелокальными условиями для уравнения

$$u_{yy} - (au_x)_x - (bu_{xy})_x + cu = f(x, y),$$

которое можно интерпретировать как обобщение уравнения Буссинеска–Лява, так и как уравнение с доминирующей смешанной производной. Обратив на это внимание, естественно рассмотреть для него не только начально-краевые задачи, но и задачи с условиями на характеристиках. Действительно, считая $b \neq 0$ всюду в области $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, запишем уравнение, сделав незначительные преобразования, следующим образом

$$u_{xxyy} + (Au_x)_x + (Bu_y)_y + Cu = F(x, y).$$

Будем изучать для него задачу отыскания решения, удовлетворяющего условиям

$$\int_0^b K_1(x, y)u(x, y)dy = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x),$$

$$\int_0^a K_2(x, y)u(x, y)dx = \mu(y), \quad u_x(0, y) = \nu(y).$$

Отмеченная особенность изучаемого уравнения позволяет исследовать поставленную задачу как методами, применяемыми к обоснованию разрешимости начально-краевых задач с нелокальными условиями, так и методами, разработанными для интегральных аналогов задачи Гурса. Обсуждению этих двух подходов и будет посвящено сообщение на конференции.

ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ

Рамазанов М. И.^а, Гульманов Н. К.^б, Копбалина С. С.^с

Карагандинский университет имени академика Е. А. Букетова, Караганда,
Казахстан; ^аramatur@mail.ru, ^бgulmanov.nurtay@gmail.com,
^сkopbalina@mail.ru

Краевые задачи для уравнений параболического типа в областях с границами изменяющимися со временем и вырождающихся в точку принципиально отличны от классических. Вследствие зависимости размера области от времени к ним не применимы методы разделения переменных и интегральных преобразований, так как не удастся согласовать решение задачи с движением границы области теплопереноса. Используя метод тепловых потенциалов, задача редуцирована к сингулярному интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода. Особенность полученного интегрального уравнения заключается в том, что к нему неприменим метод Пикара и соответствующее однородное интегральное уравнение имеет ненулевые решения.

Рассматривается следующая двумерная граничная задача по пространственным переменным в области

$$Q = \left\{ (x, y, t) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < kt^\omega, \omega > \frac{1}{2}, t > 0 \right\}$$

с боковой поверхностью $\Gamma = \left\{ (x, y, t) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = kt^\omega, t > 0 \right\}$ для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a^2 \beta \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1)$$

с граничным условием

$$u(x, y, t) \big|_{\Gamma} = g(x, y, t) \quad (2)$$

где $0 < \beta < 1$, $g(x, y, t)$ – заданная функция. Необходимо найти функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) в Q и граничному условию (2). Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия $g \in L_\infty(Q)$, $(0 < \beta < 1)$, то граничная задача (1)–(2) имеет решение $u(x, y, t) \in L_\infty(G)$.

Результаты данной работы будут использованы при решении подобной задачи в вырождающейся области, когда граница области изменяется по произвольному закону $r = \gamma(t)$, $\gamma(0) = 0$.

Работа выполнена по грантам Министерства образования и науки Республики Казахстан: AP14869607, 2022–2024 гг. и AP09259780, 2021–2023 гг.

Литература

1. *Ramazanov M. I., Gulmanov N. K.* On the singular Volterra integral equation of the boundary value problem for heat conduction in a degenerating domain // The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2021. Vol. 31, no. 2. Pp. 241–252.
2. *Ramazanov M. I., Jenaliyev M. T., Gulmanov N. K.* Solution of the boundary value problem of heat conduction in a cone // Opuscula Mathematica. 2022. Vol. 42, no. 1. Pp. 75–91.
3. *Ramazanov M. I., Gulmanov N. K.* Solution of a two-dimensional boundary value problem of heat conduction in a degenerating domain // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2021. Vol. 111, no. 3. Pp. 65–78.

$G_k^{(4)}$ -ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ И СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ЗНАЧЕНИЙ СПИНА

Рахматуллаев М. М.^{1,2,a}, Расулова М. А.^{1,2,b}

¹ Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент,

² Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан;

^a mrahmatullaev@rambler.ru, ^b m_rasulova_a@rambler.ru

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k , т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины, которого выходит ровно $k + 1$ ребер, где V – множество вершин, L – множество ребер τ^k (см. [1]).

Пусть G_k – свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими a_1, a_2, \dots, a_{k+1} , соответственно, т.е. $a_i^2 = e$. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k .

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi \equiv Z$, где Z – множество целых чисел. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ – фактор группа, где G_k^* – нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 1. Конфигурация σ называется G_k^* -периодической, если $\sigma(x) = \sigma_i$ при $x \in H_i, \forall x \in G_k$, т.е. значение конфигурации в вершине x зависит не от x , а от номера класса принадлежности x . G_k -периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делителя называется периодом конфигурации.

Гамильтониан модели Поттса с внешним полем имеет вид (см. [2], [3])

$$H(\sigma) = J \sum_{\substack{\langle x, y \rangle, \\ x, y \in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + \alpha \sum_{x \in V} \delta_{0\sigma(x)},$$

где $J, \alpha \in R$, α – внешнее поле и δ_{uv} – символ Кронекера.

Определение 2. Конфигурация φ называется основным состоянием для гамильтониана H , если

$$U(\varphi_b) = \min \{U_n : n = 1, 2, 3, \dots, 2k + 4\}$$

для любого $b \in M$.

Периодическая (трансляционно-инвариантная) конфигурация являющаяся основным состоянием далее назовем *периодическим (трансляционно-инвариантным) основным состоянием*.

Пусть

$$G_k^{(4)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четно}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{четно}\},$$

где $w_j(x)$ — число a_j в слове x и $|x|$ — длина слова x , т.е. $|x| = \sum_{j=1}^{k+1} w_j(x)$.

$G_k^{(4)}$ — является нормальным делителем индекса 4 в G_k .

Рассмотрим фактор группу $G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$, где $H_0 = G_k^{(4)}$,

$$H_1 = \{x \in G_k : |x| - \text{четно}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{нечетно}\},$$

$$H_2 = \{x \in G_k : |x| - \text{нечетно}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{четно}\},$$

$$H_3 = \{x \in G_k : |x| - \text{нечетно}, \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{нечетно}\}.$$

$G_k^{(4)}$ -периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_0, & \text{если } x \in H_0, \\ a_1, & \text{если } x \in H_1, \\ a_2, & \text{если } x \in H_2, \\ a_3, & \text{если } x \in H_3, \end{cases}$$

где $a_i \in \Phi$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Далее для удобства $G_k^{(4)}$ -периодическую конфигурацию $\varphi(x)$, $x \in G_k$ напомним в виде $\varphi = (a_0, a_1, a_2, a_3)$.

Следующая теорема описывает множество всех $G_k^{(4)}$ -периодических основных состояний.

Теорема. Пусть $k \geq 2$ и $|A| \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда верны следующие утверждения:

I. а) на множестве A_1 существует счетное количество $G_k^{(4)}$ -периодических основных состояний, не являющихся $G_k^{(2)}$ -периодическими и они имеют следующий вид: $\varphi = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, $a_i \in \Phi \setminus \{0\}$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$;

б) на множестве $A_1 \cap A_{k+3}$ существует счетное количество $G_k^{(4)}$ -периодических основных состояний, не являющихся $G_k^{(2)}$ -периодическими и они имеют следующий вид: $\varphi_1 = (0, a_1, a_2, a_3)$, $\varphi_2 = (a_0, 0, a_2, a_3)$, $\varphi_3 = (a_0, a_1, 0, a_3)$, $\varphi_4 = (a_0, a_1, a_2, 0)$, $a_i \in \Phi \setminus \{0\}$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$;

II. Пусть $J \neq 0$. Тогда всякие $G_k^{(4)}$ - периодические основные состояния, кроме конфигураций, указанных в пункте I, являются $G_k^{(2)}$ - периодическими.

Литература

1. *Rozikov U. A.* Gibbs measures in biology and physics: The Potts Model. Singapore: World scientific publishing Co. Pte. Ltd., 2023, 367 p.
2. *Rozikov U. A., Ganikhodjaev N. N.* The Potts Model with Countable Set of Spin Values on a Cayley Tree // Letters in mathematical physics. 2006. Vol. 75. Pp. 99–109.
3. *Рахматуллаев М. М., Расулова М. А.* Периодические основные состояния для модели Поттса с внешним полем и счетным множеством значений спина на дереве Кэли // Математические заметки. 2022. Т. 112, № 1. С. 106–117.

ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ УВЕЛИЧЕНИЯ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ

Рехвиашвили С. Ш.^{1,a}, Гаев Д. С.^{2,b}

- ¹ *Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,*
² *Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия;* ^a *rsergo@mail.ru,* ^b *dahir@mail.ru*

В докладе обсуждается новый способ построения элементной базы информационных и вычислительных систем. Существенно новый результат заключается в повышении быстродействия полупроводниковых приборов и интегральных схем за счет включения в их конструкцию излучателя в виде светодиода или маломощного лазера. Излучатель размещается в одном корпусе вместе с функциональным кристаллом транзистора или интегральной схемы. В процессе работы на функциональный кристалл воздействует непрерывный стационарный электромагнитного излучения. Внешнее излучение приводит к уменьшению напряжений открывания и увеличению коэффициентов усиления биполярных транзисторов, снижению пороговых напряжений и напряжений отсечки полевых транзисторов, увеличению быстродействия и радиационной стойкости указанных приборов и интегральных схем на их основе. По данной работе написаны статьи и патенты на изобретения.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Рузиев М. Х.^a, Юлдашева Н. Т.^b

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан; ^a *mruziev@mail.ru,* ^b *nyuldasheva87@gmail.com*

Рассмотрим уравнение

$$\text{sign } y \mid y^m \mid u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \quad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+ – первый квадрант плоскости, D^- – конечная область четвертого квадранта плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (1), выходящими из точек $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, и отрезком OB прямой $y = 0$, $I = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$.

В (1) m, β_0 – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Введем обозначения: $I_0 = \{(x, y) : 0 < y < \infty, x = 0\}$, $I_1 = \{(x, y) : 1 < x < \infty, y = 0\}$, C_0 и C_1 – соответственно точки пересечения OC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(c, 0)$, где $c \in I$ – произвольное фиксированное число.

Пусть $p(x) \in C^1[0, c]$ – диффеоморфизм из множества точек отрезка $[0, c]$ во множество точек отрезка $[c, 1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(0) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера приведем линейную функцию $p(x) = 1 - kx$, где $k = \frac{1-c}{c}$.

Задача БС. Найти в области D функцию $u(x, y)$ со свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\overline{D})$, где $\overline{D} = D^+ \cup \overline{D^-} \cup \overline{I_0} \cup \overline{I_1}$;
- 2) $u(x, y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
- 3) $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 [1] области D^- ;
- 4) выполняются равенства

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, \quad x > 0, \quad y > 0;$$

- 5) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad y \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \tau_1(x), \quad x \in \overline{I_1},$$

$$D_{x,c}^\beta (c-x)^{2\beta-1} u[\Theta_0(x)] = a(x)u(x, 0) + b(x), \quad x \in [0, c],$$

$$u(p(x), 0) = \mu u(x, 0) + f(x), \quad 0 \leq x \leq c,$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y, \quad x \in I \setminus \{c\},$$

причем эти пределы при $x = 0$, $x = 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$, $a(x)$, $b(x)$, $f(x) \in C[0, c] \cap C^{1,\delta}(0, c)$, $b(0) = 0$, $b(c) = 0$, $f(0) = 0$, $f(c) = 0$, $a(0) = 0$, $a(x)$ – неположительная невозрастающая функция, $D_{x,c}^\beta$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля [2], $\theta_0(x)$ – координата точки пересечения характеристики EC_0 с характеристикой, исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in (0, c)$, $\tau_1(x) \in C(\overline{I_1})$, причем функция $\tau_1(x)$ в окрестности точки $x = 1$ представима в виде $\tau_1(x) = (1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x) \in C(\overline{I_1})$ при достаточно больших x удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)| \leq \frac{M}{x^\varepsilon}$, ε, M, μ – положительные константы, $\tau_1(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на

любом отрезке $[1, N]$, $N > 1$, $\varphi(y) \in C(\overline{I_0}) = 0$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi(y) \in L(0, \infty)$, $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом отрезке $[0, N]$, $N > 0$, $\varphi(\infty) = 0$, $\varphi(0) = 0$.

Теорема БС. Пусть выполнены условия $\varphi(y) \equiv 0$, $b(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $\tau_1(x) \equiv 0$, $0 < \mu < 1$. Тогда задача БС имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство теоремы производится с помощью принципа экстремума. При доказательстве существования решения задачи применяются теория сингулярных интегральных уравнений и интегрального уравнения Фредгольма.

Литература

1. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 305 с.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

ВЫВОД ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДРОБНО-ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОПЕРАТОРА ПОРЯДКА $0 < \alpha < 1$ НА ВЕРШИНАХ МЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Сабиров К. К.

*Институт математики им. В. И. Ромоновского АН РУз, Ташкент,
Узбекистан; karimjonsabirov80@gmail.com*

Операторы дробного дифференциала привлекли большое внимание в последние несколько десятилетий благодаря их приложениям во многих, казалось бы, далеких областях науки и техники (см. [1]–[3]). Спектральный анализ несамосопряженных дробных дифференциальных операторов подробно исследован Т.С. Алероевым [4]–[6], а также самосопряженных граничных условий в вершинах метрических графов для операторов, порожденных уравнениями Шредингера, Дирака и Боголюбова де Жена изучаются в [7]–[10].

В данной работе рассмотрен дробно-пространственный оператор порядка $0 < \alpha < 1$ на метрическом звездном графе. Выведены граничные условия на вершинах метрического звездчатого графа, обеспечивающие самосопряженность оператора. Полученный результат распространен на другие топологии метрических графов.

Литература

1. Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. Stuttgart, Germany, 2000.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam, the Netherlands, 2006.
3. Umarov S. Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols, Springer, 2015.

4. *Aleroev T. S.* A problem on the zeros of the Mittag-Leffler function and the spectrum of a fractional-order differential operator // *Differential Equations*. 2000. Vol. 36, no. 9. Pp. 1414–1415.
5. *Aleroev T. S., Aleroeva Kh. T.* On a class of fractional non-selfadjoint operators associated with differential equations // *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. 2014. Vol. 58, no. 10. Pp. 1–9.
6. *Aleroev T. S., Aleroeva H. T.* On one class of nonself-adjoint operators associated with differential equations of fractional order // *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 214, no. 2.
7. *Kostrykin V., Schrader R.* Kirchhoff's rule for quantum wires // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1999. Vol. 32. Pp. 595–630.
8. *Bolte J., Harrison J.* Spectral statistics for the Dirac operator on graphs // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2003. **36** Pp. 2747–2769.
9. *Harrison J. M., Weyand T., Kirsten K.* Zeta functions of the Dirac operator on quantum graphs // *Journal of Mathematical Physics*. 2016. Vol. 57. Pp. 102301.
10. *Sabirov K., Jumanazarov D., Yusupov J., Matrasulov D.* Bogoliubov de Gennes equation on metric graphs // *Physics Letters A*. 2018. Vol. 382. Pp. 2856–2860.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ОТЫСКАНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Сабитов К. Б.

*Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологии,
Стерлитамак, Россия; sabitov_fmfm@mail.ru*

Рассмотрим уравнение смешанного типа со степенным вырождением

$$\mathcal{L}u \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - bK(y)u = F(x, y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в области $D = \{(x, y) | 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $K(y) = (\text{sign } y)|y|^n$, n, l, α и β – заданные положительные числа, а b – любое заданное действительное число и следующие обратные задачи.

Задача 1. *Найти функции $u(x, y)$ и $f(x) = f_1(x) = f_2(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad f(x) \in C(0, l) \cap L[0, l];$$

$$\mathcal{L}u(x, y) \equiv F(x, y), \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-;$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta;$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Задача 2. Найдите функции $u(x, y)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $f_1(x) \neq f_2(x)$, удовлетворяющие условиям задачи 1 и, кроме того,

$$f_1(x), f_2(x) \in C(0, l) \cap L_2[0, l]; \quad u_y(x, \beta) = \chi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$, $\chi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Основной целью доклада является построение в явном виде решений поставленных задач. Будут приведены теоремы единственности, существования и устойчивости решения задач 1 и 2 для уравнения (1). Идея доказательства единственности решения задачи 1 исходит из работы [1]. Результаты по этим задачам опубликованы в работах [2, 3]. Отметим также, что работы Джамалова С.З. [4, 5], где для общих многомерных уравнений смешанного типа изучены обратные задачи по отысканию правой части, доказаны теоремы существования и единственности в определенном классе функций.

Литература

1. Romanov V, Hasanov A. Uniqueness and stability analysis of final data inverse source problems for evolution equations // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2022/ Vol. 30. №3.
2. Sabitov K. B., Burkhanova (Haji) I. A. The boundary value problem of finding a right-hand side for mixed type equation with Chaplygin's type operator // Eurasian journal of mathematical and computer applications. 2021. Vol. 9, no. 4. Pp. 26–50.
3. Sabitov K. B., Burkhanova (Haji) I. A. Reserve problem to find right parts mixed equations with Chaplygin's type operator // Lobachevskii journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, no. 15. Pp. 3726–3740.
4. Джамалов С.З. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка // Известия Вузов. Математика. 2019. №6. С. 11 – 22.
5. Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, №1. С. 34 – 44.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Сафаров Ж. Ш.

Институт математики им. В.И. Ромоновского АН РУз, Ташкент,
Узбекистан; j.safarov65@mail.ru

Данная работа посвящается исследованию обратной задачи, заключающаяся в нахождении решения и одномерного ядра свертки интегрального члена неоднородного интегро-дифференциального уравнения с волновым оператором в главной части из условий составляющих прямую задачу и некоторого дополнительного условия.

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = \int_0^t k(t - \theta)u(x, y, \theta) d\theta + g(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q, \quad (1)$$

с начальными

$$u|_{t=0} = a(x, y), \quad u_t|_{t=0} = b(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

и граничным условиями:

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial Q, \quad (3)$$

где Δ – оператор Лапласа; $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а $\partial Q := \partial\Omega \times [0, T]$, $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $g(x, y, t)$ – заданные функции.

Нахождение функции $u(x, y, t)$ из (1)–(3), при известной $k(t)$ назовем прямой задачей.

Обратная задача заключается в определении неизвестной функции $k(t)$, $t > 0$, по имеющейся дополнительной информации о решении прямой задачи в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$:

$$u(x_0, y_0, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $h(t)$ – заданная функция.

В работах [1], [2] исследуются аналогичные задачи в случаях, когда пространственную область представляют круг и квадрат соответственно. Отличительной чертой данной работы является тот факт, что пространственные переменные в данном случае принадлежат любой области плоскости с гладкой границей.

Определение. Решением обратной задачи (1)–(4) назовем функции $u(x, t)$ и $k(t)$ из классов $C^2(Q) \cap C_{xy,t}^{0,1}(\bar{Q})$ и $C[0, T]$ соответственно, удовлетворяющие соотношениям (1)–(4).

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $k(t) \in C[0, T]$, $g_{mn}(t) \in C[0, T]$, выполнены условия

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_{mn}^j |a_{mn}| < \infty, \quad j = \overline{0, 2}, \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_{mn}^j |b_{mn}| < \infty, \quad j = \overline{0, 1}, \quad (5)$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_{mn}^j \|g_{mn}\| < \infty, \quad j = \overline{0, 1}, \quad (6)$$

$$a(\partial\Omega) = b(\partial\Omega) = 0. \quad (7)$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)–(3).

Теорема 2. Пусть $h(t) \in C^3[0, T]$, $g_{nm}(t) \in C^1[0, T]$, $h(0) = a(x_0, y_0) \neq 0$, $h'(0) = b(x_0, y_0)$, $h''(0) = g(x_0, y_0, 0) - \lambda_m^2 \Delta \varphi(x_0, y_0)$ и выполнены условия (5)–(7), тогда существует единственное решение обратной задачи (1)–(4), удовлетворяющее уравнению

$$k(t) = \frac{1}{h(0)} \left[h'''(t) - F'''(t) - \int_0^t k(s) M'''[k](t-s) ds \right], \quad t \in [0, T].$$

Пусть $K(k^0)$ – множество функций $k(t) \in C[0, T]$, удовлетворяющих для $t \in [0, T]$ неравенству $\|k(t)\|_{C[0, T]} \leq k^0$ с фиксированной положительной постоянной

$$k^0 := \max_{t \in [0, T]} |k(t)| \leq 2\|k_0\|.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть k_1 и k_2 – два решения обратной задачи (1)–(4), соответствующие двум наборам данных $\{a^1, b^1, g^1, h^1\}$ и $\{a^2, b^2, g^2, h^2\}$. Тогда имеет место следующая оценка устойчивости:

$$\|k^1 - k^2\|_{C[0, T]} \leq$$

$$C(\|a^1 - a^2\|_{C^1[\bar{\Omega}]} + \|b^1 - b^2\|_{C[\bar{\Omega}]} + \|g^1 - g^2\|_{C^{0,1}[\bar{\Omega}]} + \|h^1 - h^2\|_{C^3[0, T]}),$$

где $C = C(k^0, T)$ – некоторая положительная постоянная.

Литература

1. Safarov J. S., Durdiev D. K. Inverse problem for an integro-differential wave equation in a cylindrical domain // Lobachevskii journal of mathematic. 2022. Vol. 43, no. 11. Pp. 239–249.
2. Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки, 2023. Т. 114, № 2. С. 244–259.

ДИАГНОСТИКА НЕИСПРАВНОСТЕЙ ДАТЧИКОВ И СТРАТЕГИЯ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОГО УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ

Свидницкий А. Д.^a, Ганьшин К. Ю.^b, Новикова Е. Н.^c,
Потапов И. Р.^d, Будко К. Л.^e

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия;
^aadsvidnitckii@ncfu.ru, ^bmagnuskos@gmail.com, ^cnovikovaelena_nik@mail.ru,
^dpotapov.potapov-ivan2016@yandex.ru, ^ebudkokira@hotmail.com

В представленной работе исследуются диагностика неисправностей датчиков и стратегия отказоустойчивого управления для квадрокоптеров при неисправностях и помехах датчиков. Мы предлагаем систему оценки диагностики неисправностей и метод отказоустойчивого управления (ФТС). Система диагностики неисправностей обеспечивает оценку

неисправности датчика в зависимости от времени при неизвестной границе возмущений. Более того, отказоустойчивое управление устраняет помехи, которые оцениваются с помощью соответствующего наблюдателя возмущений. В целом, предлагаемый ФТС гарантирует сходимость отслеживания за конечное время с использованием несингулярного алгоритма быстрого терминального скользящего режима. Устойчивость замкнутой системы подтверждается теорией Ляпунова. Наконец, традиционный несингулярный режим быстрого скольжения терминала и управление скользящим режимом адаптивной нейронной сети сравниваются с предложенным методом посредством моделирования при неисправностях датчиков и возмущениях с различными сценариями.

Литература

1. *Nguyen N. P., Xuan Mung N., Hong S. K.* Actuator fault detection and fault-tolerant control for hexacopter // *Sensors*. 2019. Vol. 19, no. 21. P. 4721.
2. *Sudhir N., Swarup A.* On adaptive sliding mode control for improved quadrotor tracking // *Journal of Vibration and Control*. 2017. Vol. 24. Pp. 3219–3230.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПОДЗЕМНОГО ПЕРЕНОСА

Сербина Л. И.

*Ставропольский государственный педагогический институт, Ставрополь,
Россия; lserbina@mail.ru*

При математическом моделировании ряда задач подземного массопереноса определенная роль отводится существенно нелинейному дифференциальному параболическому уравнению в частных производных второго порядка. Центральное место в исследованиях уравнений этого класса занимает задача изучения влияния характера нелинейности модельного уравнения на разрешимость классических линейных задач для рассматриваемого нелинейного уравнения [1]. В общем случае решение этого вопроса является достаточно сложным. Преодоление математических трудностей на пути решения этого вопроса, ограничиваются рассмотрением частных примеров.

Задача безнапорной фильтрации в приближении Буссинеска [2] в одномерном случае сводится к квазилинейному параболическому уравнению относительно уровня грунтовых вод $h = h(\xi; t)$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\sigma} I(\xi, t; h), \quad (1)$$

где $a = \text{const}$ – коэффициент уровнепроводности, функция $\frac{1}{\sigma} I(\xi, t; h)$ – описывает интенсивность фильтрации.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о квазилинеаризации уравнения (1), в основе которого лежит идея метода редукции к нагруженным уравнениям, предложенного А. М. Нахушевым [3]. Рассматривая весьма общие и физически содержательные ситуации, когда интенсивность фильтрации и скорость расхода грунтовой в слое $0 \leq \xi \leq l$ меняются по законам, учитывающим явления последействия, т. е. тот факт, что на интенсивность фильтрации в данный момент времени t оказывает влияние последовательность предшествующих состояний уровня грунтовых вод, предложен новый подход к проблеме квазилинеаризации уравнения (1) с использованием нагруженных уравнений смешанного типа. В частности, получено, что уравнение (1) аппроксимируется линейным дифференциальным уравнением смешанного эллиптико-гиперболического типа, с сопутствующим ему нелокальным условием.

Литература

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. Полубарина-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.

КРИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ОСНОВНЫХ КЛАССОВ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Ситник С. М.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия; sitnik@bsu.edu.ru

Основные классы операторов дробного интегродифференцирования изложены, например, в ставших классическими монографиях [1]–[6]. К ним относятся и известные книги Адама Маремовича Нахушева [4]–[6], по которым многие впервые знакомились с операторами дробного порядка и их приложениями. Отметим также несколько недавних публикаций [7]–[14].

В докладе приведены основные классы операторов дробного интегродифференцирования: Римана–Лиувилля, дробный интеграл по произвольной функции М. М. Джрбашяна, осреднённый или континуальный оператор, дробная производная А. М. Герасимова, дробные производные Джрбашяна–Нерсеяна, последовательные или композиционные операторы дробного интегродифференцирования. В докладе уточнены исторические и приоритетные факты, связанные с указанными операторами.

Важную роль играют также различные обобщения дробного интегродифференцирования с использованием специальных функций в ядрах интегральных операторов. К ним относятся операторы Лава [1], Сайго [8], Эрдейи–Кобера [1,9,14], Бушмана–Эрдейи [9–11,13], интегральные операторы с неоднородными ядрами [12,14] и многие другие.

Необходимо отметить, что огромный вклад в приложения дробного исчисления внесли советские и российские механики. Здесь следует прежде всего отметить значительный вклад академика Ю. Н. Работнова и его школы, книги и работы которого заложили основы нескольких разделов строительной механики [15]. На основе его работ, в которых использовались методы дробного исчисления, разрабатывались и были включены в ГОСТы нормативы для строительства фундаментов зданий. Поэтому без большого преувеличения можно сказать, что все дома и другие здания советской эпохи 1950–80 годов (и позже) были построены на фундаменте дробного исчисления. Существенный вклад в приложения дробного исчисления также внесли советские механики А. М. Герасимов, С. И. Мешков, Д. Шермергор, М. Розовский, А. Ржаницын, Ю. А. Россихин и другие. О реальной истории приложений дробного исчисления в механике см. обзорные статьи Ю. А. Россихина и М. В. Шитиковой [16–17].

«Меккой» дробного исчисления в России иногда называют город Нальчик, благодаря замечательной школе, созданной здесь Адамом Маремовичем Нахушевым. Из его книг многие узнали о существовании дробного исчисления и на этих книгах учились. А. М. Нахушевым подготовлено много талантливых учеников, которые продолжают исследования в области дробного исчисления и его приложений. В настоящее время эту школу возглавляет А. В. Псху – также ученик А. М. Нахушева.

Вместе с тем стоит отметить, что в последнее время недобросовестными и непрофессиональными авторами вводятся многочисленные обобщения и аналоги дробных производных, которые не могут считаться полноценными объектами дробного исчисления. Некоторые из них не удовлетворяют полугрупповому свойству или сводятся к тривиальному умножению на функцию, другие вводятся по аналогии с формулой для резольвенты интеграла Римана–Лиувилля и также не имеют основных свойств дробного интеграла или производных. Также распространены формы псевдодробных операторов, ядра которых не являются сингулярными на диагонали, что делает их бесполезными для теории и приложений. При этом часто искажаются или перевираются названия операторов и имена их первооткрывателей. Автор называет этот наплыв безграмотного псевдонаучного шарлатанства по тематике дробного интегрирования и его приложений «dirty wave» – грязная волна. Выяснению важного вопроса, какие свойства необходимы для вводимых обобщений дробных интегралов и производных, а также критике неудачных вариантов посвящён проект Юрия Лучко [18] и его продолжение.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 2006. Pp. 540.

3. *Kiryakova V.* Generalized fractional calculus and applications. Longman, Harlow, 1994. pp. 388.
4. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая Школа, 1995. 304 с.
5. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 2000. 298 с.
6. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
7. *Псыу А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
8. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: изд. Самарского университета, Саратовский филиал, 1992. 162 с.
9. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64, № 2. С. 3–45.
10. *Ситник С. М., Шижкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. 224 с.
11. *Shishkina E., Sitnik S.* Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Series: Mathematics in science and engineering. 1st Edition. Elsevier, Academic Press, 2020. Pp. 592.
12. *Уринов А. К., Ситник С. М., Шижкина Э. Л., Каримов Ш. Т.* Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения). Узбекистан, Фергана: «Фаргона», 2022. 192 с.
13. *Скоромник О. В.* Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода. Белоруссия, Новополоцк: Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, 2019. 180 с.
14. *Уринов А. К., Каримов Ш. Т.* Операторы Эрдейи – Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных. Узбекистан, Фергана: «Фаргона», 2021. 202 с.
15. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твёрдых тел. М.: Наука, 1977, 384 с.
16. *Rossikhin Y. A.* Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. 2010. Vol. 63, No. 1. P. 12.
17. *Шитикова М. В.* Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022, № 1, С. 3–40.
18. *Luchko Yu.* Special Issue “Fractional Integrals and Derivatives: “True” versus “False” // Mathematics (MDPI). 2019.

**ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТНЫХ ТОЖДЕСТВ ГИЛЬБЕРТА
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ СПЕЦИАЛЬНЫХ
ФУНКЦИЙ**

**Ситник С. М.^{1,a}, Шишкина Э. Л.^{1,2,b}, Алзамили Х. Ф.^{1,c},
Маслов М. Г.^{1,d}.**

¹ *Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия,*

² *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

^a *sitnik@bsu.edu.ru,* ^b *ilina_dico@mail.ru,* ^c *alzamili.khitam@mail.ru,*

^d *mller.michail@yandex.ru*

Рассмотрим два важных хорошо известных факта из совершенно различных разделов математики. Первый факт – это известное резольвентное тождество Гильберта из функционального анализа [1]

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A), \quad (1)$$

где A является линейным ограниченным оператором в некотором пространстве Банаха, λ и μ комплексные числа, $R_\lambda(A)$ и $R_\mu(A)$ резольвенты оператора A со спектральными параметрами λ, μ .

Второй факт – это фундаментальная формула для резольвенты дробного интеграла Римана–Лиувилля

$$R_\lambda f(x) = -\frac{1}{\lambda}f(x) - \frac{1}{\lambda^2} \int_a^x E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-y)^\alpha}{\lambda} \right) (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy, \quad (2)$$

где $E_{\alpha,\beta}$ есть двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера, см. [2]–[6]. Эта формула была выписана в работе Хилле и Тамаркина [2] в 1930 году без доказательства. Первое известное нам доказательство приведено в книге М. М. Джрбашяна [3]. Интересные современные результаты, связанные с резольвентами, приведены в [7].

Основная идея этой работы состоит в том, чтобы подставить формулу для конкретной резольвенты оператора Римана–Лиувилля (2) в абстрактное резольвентное тождество Гильберта (1). На этом пути возможно вычислять без дополнительных усилий достаточно сложные интегралы от произведения функций Миттаг-Леффлера. Это новый метод для вычисления интегралов подобного типа.

В качестве примера полученных результатов приведем одну формулу для вычисления интеграла от произведения функций Миттаг-Леффлера.

Теорема 1. *Для резольвент дробных интегралов Римана–Лиувилля (2) следующая формула выводится из резольвентного тождества Гильберта (1).*

$$\int_t^x (y-t)^{\alpha-1} (x-y)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(y-t)^\alpha}{\mu} \right) E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-y)^\alpha}{\lambda} \right) dy =$$

$$= \frac{\mu\lambda}{\lambda - \mu} (x - t)^{\alpha-1} \left(E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-t)^\alpha}{\mu} \right) - E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-t)^\alpha}{\lambda} \right) \right).$$

В качестве следствий приведём несколько формул для интегралов, которые вытекают из приведённой теоремы 1.

При $\alpha = 1$ получается очевидная формула

$$\int_t^x e^{\frac{y-t}{\mu}} e^{\frac{x-y}{\lambda}} dy = \frac{\mu\lambda}{\lambda - \mu} \left(e^{\frac{x-t}{\mu}} - e^{\frac{x-t}{\lambda}} \right).$$

При $\alpha = 2$ получается следующая формула

$$\begin{aligned} & \int_t^x \sinh \left(\frac{y-t}{\sqrt{\mu}} \right) \sinh \left(\frac{x-y}{\sqrt{\lambda}} \right) dy = \\ & = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{\lambda - \mu} \left(\sqrt{\mu} \sinh \left(\frac{x-t}{\sqrt{\mu}} \right) - \sqrt{\mu} \sinh \left(\frac{x-t}{\sqrt{\lambda}} \right) \right). \end{aligned}$$

При $\alpha = 3$ получается следующая формула

$$\begin{aligned} & \int_t^x (y-t)^2 (x-y)^2 {}_0F_2 \left(; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{(y-t)^3}{27\mu} \right) {}_0F_2 \left(; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{(x-y)^3}{27\lambda} \right) dy = \\ & = \frac{2\mu\lambda}{\lambda - \mu} (x-t)^2 \left({}_0F_2 \left(; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{(x-t)^3}{27\mu} \right) - {}_0F_2 \left(; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{(x-t)^3}{27\lambda} \right) \right), \end{aligned}$$

где ${}_0F_2$ есть гипергеометрическая функция Гаусса.

Дальнейшие примеры включают другие типы дробных интегралов и специальных функций в ядрах, резольвенты общих интегральных операторов, резольвенты из прикладных задач физики и механики. К последним относятся, например, резольвенты Ржаницина из теории вязкоупругости.

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
2. Hille E., Tamarkin J. D. On the theory of linear integral equations // Ann. Math. 1930. Vol. 31. Pp. 479–528.
3. Джрбачян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Springer Monographs in Mathematics. 2nd ed. 2020. P. 556

6. *Shishkina E., Sitnik S.* Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Series: Mathematics in Science and Engineering. 1st Edition. Elsevier, Academic Press, 2020. P. 592.
7. *Таштаджян Л. А.* Этюды о резольvente // УМН. 2020. Т. 75, № 1 (451). С. 155–194.

**ИНТЕГРИРОВАННЫЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ
ГЕРАСИМОВА–КАПУТО**

Скорынин А. С., Федоров В. Е.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
^askorynin@csu.ru, ^bkar@csu.ru

Пусть \mathcal{Z} – банахово пространство, D^α – дробная производная Герасимова–Капуто порядка $\alpha > 0$, $[\alpha] = m \in \mathbb{N}$, A – линейный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве \mathcal{Z} , $\beta \geq 0$.

A порождает β – интегрированную разрешающую функцию, если существует $\omega \geq 0$ и сильно непрерывная функция $S_\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, такие что $\omega(S_\beta) \leq \omega$, $(\omega^\alpha, \infty) \subset \rho(A)$ и равенство $\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1} = \lambda^\beta S_\beta(\lambda)$ выполняется для всех $\lambda > \omega$. В этом случае S_β называется β – интегрированной разрешающей функцией, порожденной оператором A .

Рассмотрим задачу Коши

$$D^k z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $T > 0$, $f \in L_1(0, T; \mathcal{Z})$ и оператор A порождает β – интегрированную разрешающую функцию, $\beta \geq 0$.

Под слабым решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $z \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, такую, что для всех $t \in [0, T]$ $J^\alpha z(t) \in D_A$ и

$$z(t) = AJ^\alpha z(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k z_k}{k!} + J^\alpha f(t).$$

Под классическим решением задачи (1), (2) будем понимать функцию

$z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C([0, T]; D_A)$, такую, что $D^\alpha z \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1) и равенство (2) при всех $t \in [0, T]$.

Теорема. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n-1 < \beta \leq n \in \mathbb{N}$, $l = \lceil \frac{\beta}{\alpha} \rceil$, A порождает β -интегрированную разрешающую функцию S_β . Тогда

(i) Если $z_k \in D_{A^l}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $f \equiv 0$, тогда существует единственное слабое решение задачи (1), (2).

(ii) Если $z_k \in D_{A^{l+1}}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $f \equiv 0$, тогда существует единственное классическое решение (1), (2).

(iii) Если $\alpha \geq 1$, $z_k \in D_{A^l}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; D_{A^l})$, тогда существует единственное слабое решение задачи (1), (2).

(iv) Если $\alpha \geq 1$, $z_k \in D_{A^{l+1}}$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, $f \in C([0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; D_{A^{l+1}})$, тогда существует единственное классическое решение задачи (1), (2).

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2708.2022.1.1).

Литература

1. Fedorov V. E., Skorynin A. S., Debbouche A. Integrated resolving functions for equations with Gerasimov–Caputo derivatives // Symmetry. 2023. Vol. 15, no. 7. P. 1393.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН НА ОБЛАЧНЫХ КАПЛЯХ

Созаева Л. Т.

*Высокогорный геофизический институт, Нальчик, Россия;
ljk_62@rambler.ru*

Дистанционные методы исследования дисперсных сред находят широкое применение во многих разделах физики атмосферы, в том числе в радиолокации. В настоящее время на практике используются метеорологические радиолокаторы с двойной поляризацией ДМРЛ-С на рабочей длине волны 5,3 см. ДМРЛ-С позволяют идентифицировать гидрометеоры в облаках и осадках. Для их эффективного использования необходимо иметь знания о форме и методах расчета характеристик рассеяния облачных частиц.

Форму капель принято аппроксимировать сплюсненным сфероидом по результатам лабораторных исследований [1]. Среднее значение фактора формы капель в зависимости от эквивалентного диаметра определяется по формуле:

$$\frac{b}{a} = 1,012 - 0,144D - 1,03D^2, \quad (1)$$

где D – эквивалентный диаметр (диаметр сферы, объем которой равен объему сфероида) в [см]; a – максимальная полуось сфероида; b – минимальная полуось сфероида.

Для расчета характеристик рассеяния капель предлагается применить метод разделения переменных для несферических частиц (Separation of Variables Method, SVM) [2, 3]. Этот метод разработан на сфероидальном базисе и обладает высокой точностью, что делает его эффективным для сфероидальных частиц с большим отношением осей (более 5-10). По методу SVM предполагается, что на частицу падает плоская поляризованная волна под углом α к оси вращения частицы, которая может быть представлена в виде суперпозиции вертикально (ТМ-мода) и горизонтально поляризованных волн (ТЕ-мода).

Для дистанционного зондирования облаков и осадков в радиодиапазоне длин волн находят применение поперечные сечения обратного

рассеяния, определяемые выражениями:

– для ТМ-моды

$$\sigma_0^{\text{TM}} = \frac{4}{c^2 \left[\left(\xi_0^2 - \tilde{f} \right) \left(\xi_0^2 - \tilde{f} \cos^2 \alpha \right) \right]^{1/2}} \cdot \left| \sum_{l=1}^{\infty} i^{(l+1)} b_l^{(1)} S_{1l}(c, \cos \alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} i^{(l-1)} \left(k_1 a_{ml}^{(1)} S_{ml}(c, \cos \alpha) - i b_{ml}^{(1)} S'_{ml}(c, \cos \alpha) \right) \sin \alpha \right|^2, \quad (2)$$

– для ТЕ-моды

$$\sigma_0^{\text{TE}} = \frac{4}{c^2 \left[\left(\xi_0^2 - \tilde{f} \right) \left(\xi_0^2 - \tilde{f} \cos^2 \alpha \right) \right]^{1/2}} \cdot \left| \sum_{l=1}^{\infty} i^{(l+1)} a_l^{(1)} S_{1l}(c, \cos \alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} i^{(l-1)} \left(k_1 a_{ml}^{(1)} S_{ml}(c, \cos \alpha) - i b_{ml}^{(1)} S'_{ml}(c, \cos \alpha) \right) \sin \alpha \right|^2, \quad (3)$$

где $c_i = k_i \frac{d}{2}$, $S_{ml}(c_i, \eta)$ – вытянутые угловые сфероидальные функции с нормировочным множителем $N_{ml}(c_i)$; $\bar{S}_{ml}(c_i, \eta) = N_{ml}^{-1}(c_i) S_{ml}(c_i, \eta)$ – вытянутые угловые сфероидальные функции; $R_{ml}^{(1),(3)}(c_i, \xi)$ – вытянутые радиальные сфероидальные функции первого и третьего порядка; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны.

По формулам (2, 3) с учетом (1) были проведены расчеты поперечных сечений обратного рассеяния для падающей в нижней части облака капли диаметром от 0,1 до 8 мм, где преобладают температуры 10^0C . Именно в этой части облака могут присутствовать крупные капли, размером до 8 мм.

Получено, что поперечные сечения обратного рассеяния зависят от фактора формы. Влияние формы на поперечники обратного рассеяния проявляется от значений эквивалентного радиуса капель $r > 0,12$ см. Чем больше размер капли (больше фактор формы), тем больше разница между поперечниками обратного рассеяния вертикальной (ТМ-моды) и горизонтальной (ТЕ-моды) поляризации; и тем сильнее они отличаются от аналогичной характеристики для эквивалентной сферической капли.

Полученные результаты могут быть полезны как при математическом моделировании градовых облаков, так и для решения обратных задач восстановления микроструктурных характеристик по данным дистанционного зондирования облаков и осадков.

Литература

1. *Andsager K., Beard K., Laird N.* // J. Atmos. Sci. 1999. Vol. 56, no. 15. Pp. 2673–2683.
2. *Voshchinnikov N. V., Farafonov V. G.* // Astrophysics and Space Science. 1993. Vol. 204, no. 10. Pp. 19–86.
3. <http://www.astro.spbu.ru/DOP/6-SOFT/ours.html>

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ИНТЕГРАЛОВ В ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛА ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ GPU

Сокуров А. А.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; isokuroff@mail.ru*

Современные графические процессоры (GPU) представляют собой массивные параллельные устройства, обладающие большой вычислительной мощностью. Специфика работы с трехмерной графикой такова, что GPU конструктивно наделены способностью одновременно и очень эффективно обрабатывать независимые потоки данных, в качестве которых выступают массивы вещественных чисел. Эта особенность GPU в настоящее время начинает активно применяться при компьютерном моделировании сложных физических процессов и решении многомерных задач вычислительной математики.

В докладе обсуждается техника расчета кратных несобственных интегралов, возникающих в теории функционала плотности. Они имеют вид

$$\int_a^{+\infty} \int_b^{+\infty} F(R, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1)$$

где R – числовой параметр. Данная техника предполагает привлечение к численным расчетам многочисленные ядра графического процессора и реализована на основе технологии CUDA [1] от компании Nvidia.

Для приближенного вычисления интегралов вида (1) обычно принято использовать квадратурные формулы Гаусса–Лагерра. Однако в нашем случае подынтегральные функции имеют сильно выраженный осциллирующий характер, из-за чего достижение приемлемой точности требует вычисления корней полиномов Лагерра больших степеней – ста и более. Дополнительно ситуация усложняется тем, что большая часть корней полинома Лагерра приходится на участки, где значения функций ничтожно малы. В итоге метод Гаусса–Лаггера оказывается не столь результативным.

С другой стороны, прямое обобщение основных квадратурных формул на размерности два и более приводит к существенному росту числа вычислений. Так, расчетная сетка из 10^3 точек для одномерного интеграла переходит в сетку из 10^6 точек для двойного и 10^9 для тройного. В этих условиях проведение операций на центральном процессоре, пускай

даже мощном, становится практически невозможным, особенно учитывая необходимость в табуляции (1) по параметру R . Использование же GPU и технологии CUDA в аналогичном подходе позволило уменьшить время работы компьютерной программы на порядки. Расчетная сетка при вычислении межатомного потенциала в рамках метода функционала электронной плотности состояла из 500×10^6 точек, что гарантировало точность в 4–6 верных знаков после запятой.

Литература

1. Боресков А. В., Харламов А. А., Марковский Н. Д. и др. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA. М.: МГУ, 2015. 336 с.

МЕТОД ТРИАНГУЛЯЦИИ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Солдатов А. П.

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, Москва, Россия; soldatov48@gmail.com*

В теории краевых задач для аналитических функций на плоскости ключевую роль играют интегралы типа Коши. В соответствии с этим при исследовании краевых задач на римановой поверхности основное внимание уделяется построению глобальных аналогов ядер Коши типа Бенке–Штейна.

В докладе предлагается другой подход, основанный на триангуляции области D римановой поверхности, в которой ищется решение, на семейство плоских подобластей D_i , $i = 1, \dots, n$, где каждая из областей D_i лежит внутри некоторой координатной карты. В соответствии с этим разбиением краевую задачу можно переписать по отношению к семейству аналитических функций ($\Phi_i = \Phi|_{D_i}$), добавляя к краевому условию для аналитической в D функции Φ , однородное соотношение склейки $\Phi^+ = \Phi^-$ на общих участках границ областей D_i . Эта задача укладывается в схему общей постановки задачи Римана на плоскости.

Пользуясь установленными ранее результатами для задачи Римана, получены критерий фредгольмовости рассматриваемой исходной задачи и формула ее индекса. В случае задач типа линейного сопряжения на компактной римановой поверхности при подсчете индекса по этой формуле естественным образом возникает эйлерова характеристика поверхности, определяющая ее тип.

**ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО
ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ТИПА
ГЕРАСИМОВА–КАПУТО ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА**

Твердый Д. А.^{1,a}, Паровик Р. И.^{1,b}

¹ *Институт космofизических исследований и распространения радиоволн
ДВО РАН, Паратунка, Россия; ^aтвердый@ikir.ru, ^bпаровик@ikir.ru*

В различных приложениях науки и техники возникают обратные задачи [1]. Это связано с тем, что мы можем не знать о некоторых параметрах, рассматриваемого процесса. Однако мы знаем дополнительную информацию, полученную в результате эксперимента. Эту информацию можно использовать для восстановления информации об интересующем нас параметре процесса.

В данной работе исследуется обратная задача для идентификации функции $\alpha(t)$ дробного уравнения:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(t) = 1. \quad (1)$$

Здесь оператор дробного дифференцирования понимается в смысле типа Герасимова–Капуто [2, 3]:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\sigma)}{(t - \sigma)^{\alpha(t)}} d\sigma, \quad 0 < \alpha(t) < 1, \quad t = 0, \dots, T, \quad (2)$$

где $T > 0$ – общее время моделирования, $t \in [0, T]$ – текущее время моделирования, а $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, $\alpha(t)$ – непрерывная функция. Порядок дробной производной будем искать в виде $\alpha(t) = A \cos^2(Ft + P) + S$, где, параметры A, P, S – заданные константы, а параметр F – не известен и определяется по дополнительной информации (экспериментальным данным): $u(t_k) = \phi(t_k)$, $k = 0, \dots, M - 1$, где M – число наблюдений.

В работе [4] исследуются вопросы, связанные с нелинейным переносом радиоактивного газа радона через геосреду с помощью уравнения Риккати с производной дробного переменного порядка (2). Это позволяет описывать процессы роста и спада объемной активности радона в накопительных камерах с датчиками регистрации. В работе [4] вид функции $\alpha(t)$ для модельных уравнений определяется вручную, до достижения высокой корреляции с экспериментальными данными, что приводит к большим временным затратам. Поэтому необходимо знать конкретный вид функции $\alpha(t)$, что приводит нас к обратной задаче.

В статье с помощью итерационного метода Левенберга–Марквардта ньютоновского типа решается задача одномерной оптимизации. Алгоритм решения обратной задачи основан на многократном решении прямой задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $u(0) = u_0$ с помощью неявной конечно-разностной схемы, предложенной в работе [5]. В качестве экспериментальных данных для дополнительной информации были взяты псевдослучайные данные, предварительно сгенерированные на компьютере.

Был разработан программный комплекс, реализующий алгоритм решения обратной задачи для дробного уравнения (1) на языке высокого уровня С. Показано, что помощью метода Левенберга–Марквардта действительно можно восстанавливать вид функции $\alpha(t)$ оператора дробного дифференцирования переменного порядка (2).

Исследования выполнены в рамках гранта РНФ № 23-71-01050 по теме «Разработка программного комплекса для моделирования и анализа объемной активности радона как предвестника сильных землетрясений Камчатки».

Литература

1. *Mueller J. L., Siltanen S.* Linear and nonlinear inverse problems with practical applications. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012. 351 p.
2. *Gerasimov A. N.* Generalization of linear deformation laws and their application to internal friction problems // Applied Mathematics and Mechanics. 1948. Vol. 12. Pp. 529–539.
3. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II // Geophysical Journal International. 1967. Vol. 13, no. 5. Pp. 529–539.
4. *Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I.* Hereditary mathematical model of the dynamics of radon accumulation in the accumulation chamber // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 4:850. Pp. 1–20.
5. *Tverdyi D. A., Parovik R. I.* Investigation of finite-difference schemes for the numerical solution of a fractional nonlinear equation // Fractal and Fractional. 2022. Vol. 6, no. 1:23. Pp. 1–27.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ ЗЕМЛЯ-ИОНОСФЕРА И ЭФФЕКТОВ ЕЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПРОВОДИМОСТИ ГРАНИЦ

Твердый Д. А.^{1,a}, Малкин Е. И.^{1,b}

¹ *Институт космодизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия; ^atverdyi@ikir.ru, ^bmalkin@ikir.ru*

В исследовании приводятся результаты ряда компьютерных симуляций в среде MATLAB. Рассматривается распространение электромагнитной (ЭМ) волны от широкополосного импульсного источника в волноводе с неравномерной проводимостью границ. Данный источник является упрощенной моделью электромагнитной волны, порожденной грозным разрядом, атмосфериком, который является широкополосным сигналом с максимумом интенсивности в диапазоне 6-10 кГц. Из-за удалённости источника излучения его можно рассматривать как плоскую ЭМ волну.

Так как атмосферик распространяется не в свободном пространстве, а в сложном резонаторе с проводящими границами Земля и Ионосфера

[1] то неизбежно происходит взаимодействие с неоднородностями волновода в результате которого изменяются характеристики атмосферика.

По данным WWLLN (The World Wide Lightning Location Network) в среднем каждую секунду на земле возникает до 7 грозových разрядов. Основная гроззовая активность сосредоточена в постоянных гроззовых очагах Азиатском, Американском и Африканском. Данный факт позволяет рассматривать мировые гроззовые очаги как источники не регулярного сигнала атмосфериков. Анализируя характеристики атмосфериков, можно получить информацию о параметрах радиотрасс, которые в свою очередь связаны с состоянием границ волновода. Например, после землетрясений с магнитудами порядка 7 и более, увеличивается насыщенность подземных вод вторичными минералами [2], что приводит к локальному увеличению проводимости земли в данных областях.

Замечание. Предполагается, что, изучая параметры атмосферика можно установить наличие неоднородности проводимости стенки волновода.

На основе системы уравнений Максвелла [3] с краевыми условиями в виде Perfectly matched layer [4] задаётся математическая модель процесса. Краевые условия модели определяют область распространения ЭМ широкополосного сигнала, как волновод с неоднородной проводимостью границ. Система модельных уравнений решается численным методом Finite-Difference Timedomain [5].

Показано, что действительно имеет место обратное рассеяние ЭМ волны на трассе волновода; обратное рассеяние возникает в следствии отражения ЭМ волны, при её взаимодействии с неоднородностью проводимости нижней границы волновода; для разных приближений неоднородностей проводимости наблюдаются волны обратного рассеяния с разной интенсивностью и разным временем прихода. Показано, что действительно, математическое и компьютерное моделирование процесса может помочь в установлении связи между параметрами излучения и неоднородностей.

Замечание. Можно предположить, что верно и обратное. Наблюдение за параметрами ЭМ сигнала, определяющими атмосферик, в том числе наблюдаемой иногда волной обратного рассеяния, позволяет установить наличие неоднородности проводимости на трассе распространения.

Работа выполнена в рамках Государственного задания по теме (2021–2023 гг.) «Физические процессы в системе ближнего космоса и геосфер при солнечных и литосферных воздействиях» рег. № АААА-А21-121011290003-0.

Литература

1. Budden K. G., Eve M. Degenerate modes in the Earth-ionosphere waveguide // Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1975. Vol. 342, no. 1629. Pp. 175–190.
2. Копылова Г. Н., Гусева Н. В., Копылова Ю. Г., Болдина С. В. Химический состав подземных вод режимных водопроводов Петропавловского геодинамического полигона, Камчатка: типизация и эффекты силь-

- ных землетрясений // Journal of Volcanology and Seismology. 2018. № 4. С. 43–62.
3. *Maxwell J. C.* A dynamical theory of the electromagnetic field // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1865. Vol. 155. Pp. 459–512.
 4. *Berenger J. P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journal of Computational Physics. 1994. Vol. 114, no. 2. Pp. 185–200.
 5. *Yee K.* Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1966. Vol. 14, no. 3. Pp. 302–307.

ПРИМЕНЕНИЕ ИИ ПРИ ПОИСКЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ СВЕРХБЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Тетуев Р. К.

*Институт математических проблем биологии РАН, Пушкино, Россия
ruslan.tetuev@gmail.com*

Объяснимый искусственный интеллект (ОИИ [1]) – направление в области развития ИИ, призванное устранить его основной недостаток – отсутствие объяснительного компонента. Хотя изначально именно это упрощение позволило ускорить развитие ИИ в сравнении с альтернативными, более сложными системами поддержки принятия решений, в которых обязательно проводится анализ входных данных, на основании чего и формируется логически обоснованный окончательный результат, как это делается, к примеру, в экспертных системах. В случае же классического ИИ делается попытка обойтись без анализа и без логической индукции, заменив их типовыми правилами, с помощью которых любой комбинации входных данных можно сразу сопоставить оптимальное решение заданной задачи. За несколько десятилетий развития ИИ с помощью различных подходов и технологий действительно удалось научиться успешно отыскивать типовые правила для решения довольно сложных и весьма разнообразных классов задач, что на многих неискушенных пользователей произвело глубокое впечатление и даже благоговейный ужас перед мощью всесильного интеллекта, заключенного в ИИ системах. На деле же, классический ИИ ищет (подбирает) лишь правила, из которых практически невозможно извлечь логику вывода решения, понятную человеку, что сильно ограничивает применение ИИ в медицине, атомной энергетике, военном деле и других прикладных направлениях, сопряженных с высоким риском.

Важно заметить, что отсутствие четкой логики решения задачи отнюдь не является уникальной чертой ИИ. Вообще, не все известные нам математические соотношения получены путем логического вывода и помимо привычных формул Вьета и Кардано существуют, например, формулы Рамануджана, по мнению автора являющиеся исключительно продуктом «мистического озарения», так что все попытки руководителя Харди перенять его «особый математический аппарат» оказались столь

же бесплодными, как и попытки наших современников уяснить ход рассуждений классического ИИ.

В данной работе продемонстрирована идея ОИИ на примере нейросетевой реализации ИИ, призванной преобразовывать коэффициенты спектра функции в точном соответствии с заданным преобразованием оригинала, представленного рядом Фурье по системам классическим ортогональным полиномов [2]. Показано, что в попытке понизить сложность вычислений с квадратичной до линейной (относительно длины спектра) нейросеть находит новые матрицы, задающие ранее неизвестные рекуррентные соотношения, которые однако могут быть аналитически подтверждены и объяснены с точки зрения теории.

Литература

1. Héder M. Explainable AI: A brief history of the concept // ERCIM News. No. 134. 2023. Pp. 9–10.
2. Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985. 216 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Тотиева Ж. Д.

Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Россия
jannatuaeva@inbox.ru

Для (x, z) , $x \in \mathbb{R}$, $z > 0$, $t \in \mathbb{R}$ рассматривается система уравнений термоупругости с памятью [1, 2]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L \left[h(x, t), \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial z} - (3\lambda + 2\mu) \int_0^{H(x, z, t)} \alpha(s) ds \right) \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k \Delta H, \quad H|_{t < 0} \equiv 0, \quad u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$L \left[h(x, t), \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=+0} = - \frac{\delta(t)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \quad (3)$$

$$+ \frac{3\lambda(0) + 2\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} L [h(x, t), R(H(0, t))],$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial z} - \gamma H \right) |_{z=+0} = -\gamma (\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0) t \theta(t), \quad (4)$$

где $u(x, z, t)$ – смещение, $H(x, z, t)$ – приращение температуры, Δ – оператор Лапласа по переменным x, z ; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака;

$\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$, $\gamma > 0$ – некоторые постоянные, $\theta(t)$ – функция Хевисайда, $R(s) = \int_0^s \alpha(\tau) d\tau$, оператор L определен по формуле

$$L[h(x, t), u(x, z, t)] = u(x, z, t) + \int_0^t h(x, t - \tau) u(x, z, \tau) d\tau.$$

В систему уравнений входят $k = \text{const} > 0$ – коэффициент теплопроводности, $\rho(z) > 0$ – плотность среды, $\lambda(z), \mu(z)$ – параметры Ламе, $\alpha(z)$ – коэффициент теплового расширения среды. Считаем, что $\mu(z) > 0$, $\lambda(z) + 2\mu(z) > 0$.

Задачу определения вектора смещения $u(x, z, t)$ и приращения температуры $H(x, z, t)$, удовлетворяющих (в обобщенном смысле) равенствам (1)–(4), при заданных функциях $\alpha(s)$, $h(t)$, $\rho(z)$, $\mu(z)$, $\lambda(z)$ и заданных постоянных k , γ , \tilde{T}_0 , \tilde{T}_1 будем называть **прямой задачей**.

Предполагаем, что ядро $h(x, t)$ можно представить в виде (формально вводится малый параметр $\varepsilon > 0$):

$$h(x, t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(x, t), \quad (5)$$

где функция $h_0(t)$ является заданной, а $h_1(x, t)$ – неизвестная, малая по абсолютной величине, добавка. Требование малости добавочного ядра понимается как малость по норме, содержащей производные ядра до некоторого порядка.

Обратная задача: найти ядро $h_1(x, t) \in C_t^1([0, \infty); L_2(\mathbb{R}))$, $t > 0$, если известна дополнительная информация о решении прямой задачи (1)–(4):

$$u(x, z, t)|_{z=+0} = g(x, t), \quad t > 0, \quad (6)$$

$g(x, t)$ – заданная функция.

Будем считать, что для $T > 0$ $\tilde{h}_1(\nu, t) := F_x[h_1](\nu, t)$ (образ Фурье) $\in \tilde{\Lambda}(\omega, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu, t) \in C_t^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ и \forall фиксированного $t \in [0, T]$ $\text{supp } \tilde{h}_1(\nu, t) \subset [-\omega, \omega]$. Соответственно, $h_1(x, t) \in \Lambda(\omega, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu, t) \in \tilde{\Lambda}(\omega, T)$.

Теорема 1. Пусть $\omega > 0$, $T > 0$ фиксированы. Для существования и единственности решения обратной задачи (1)–(6) $h_1(x, t) \in \Lambda(\omega, T)$ необходимо и достаточно, чтобы $h_0(t) \in C^3[0, T]$, $\tilde{g}(\nu, t) := F_x[g](\nu, t) \in C_t^2(\mathbb{R} \times [0, T])$, $\tilde{g}(\nu, 0) = 0$, и \forall фиксированного $t \in [0, T]$ $\text{supp } \tilde{g}(\nu, t) \subset [-\omega, \omega]$.

Теорема 2. Пусть $h_1^{(1)}(x, t), h_1^{(2)}(x, t) \in \Lambda(\omega, T)$ – решения обратной задачи (1)–(6), отвечающие информации $g^{(1)}(x, t), g^{(2)}(x, t)$ соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 1 имеет оценка устойчивости

$$\int_R \|h_1^{(1)} - h_1^{(2)}\|_{C[0, T]}^2 dx \leq C \int_{-\omega}^{\omega} \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|_{C^2[0, T]}^2 d\nu,$$

где C – некоторая константа, зависящая от величин ω, T и значений функций $\mu(z), \lambda(z), \rho(z), h_0(t)$.

Пусть существует решение $h_1(x, t) \in C_t^1([0, \infty); L_2(\mathbb{R}))$, отвечающее информации $\tilde{g}(\nu, t)$.

Определим множество функций $\tilde{g}_\omega(\nu, t)$ по правилу:

$$\tilde{g}_\omega(\nu, t) := \theta(\omega - |\nu|)\tilde{g}(\nu, t).$$

Выделим семейство обратных задач: определить функцию $h_1^\omega(x, t) = F_\nu^{-1}[\tilde{h}_1^\omega(\nu, t)]$ по информации $\tilde{g}_\omega(\nu, t)$.

Теорема 3. Данное семейство является регуляризованным, то есть:

- 1) для каждого $\omega > 0$ обратная задача корректна;
- 2) если данные таковы, что решение исходной (корректной) задачи существует, то при $\omega \rightarrow \infty$ последовательность решений семейства задач с этими данными стремится к решению исходной (некорректной) задачи.

Литература

1. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
2. Тютнева Ж. Д., Дурдиев Д. К. Задача об определении одномерного ядра уравнения термовязкоупругости // Математ. заметки. 2018. Т. 103, № 1. С. 118–132.

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Туров М. М., Гомзикова Ю. А.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
 turov_m_m@mail.ru

В [1] было выведено, что если дробных производных несколько и это производные Римана–Лиувилля, то возникает так называемый дефект задачи Коши. А в работе [2] была исследована задача с несколькими дробными производными Герасимова–Капуто, дефекта, в этом случае, не наблюдается. Возникает естественный вопрос: если взять в одном уравнении производную и Римана–Лиувилля, и Герасимова–Капуто, то как это скажется на начальных условиях, и какие будут условия существования конечных пределов?

Пусть \mathcal{Z} – банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ – множество линейных ограниченных операторов. Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка с производными Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто

$${}^R D_t^\alpha z(t) = {}^C D_t^\beta A z(t), \quad (1)$$

где $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n - 1 < \beta \leq n \in \mathbb{N}$, $\alpha > \beta$. Зададим два набора начальных условий: типа Коши и Коши для уравнения (1)

$$\begin{cases} D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k^R, & k = 0, \dots, m-1, \\ z^{(l)}(0) = z_l^C, & l = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (2)$$

Решением начально задачи для уравнения (1) будем называть такую функцию $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}$, что $J_t^{m-\alpha} z \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}) \cap C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{L})$ и $z \in C^{n-1}(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{L})$, удовлетворяющую равенству (1) и начальным условиям.

Теорема 1. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n - 1 < \beta \leq n \in \mathbb{N}$, $\alpha > \beta$, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{L})$, m^* - дефект [1]. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2), при этом оно имеет вид

$$z(t) = \begin{cases} \sum_{k=m^*}^{m-1} R_k(t) z_k^R, & [\alpha] - [\beta] \geq 1, \\ 0, & [\alpha] - [\beta] = 0, \end{cases}$$

где

$$R_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda^\alpha - A\lambda^\beta)^{-1} \lambda^{m-k-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$R_k(t) = t^{\alpha+k-m} E_{\alpha-\beta, -m+1+k+\alpha}(At^{\alpha-\beta}),$$

Γ - контур Ганкеля, $E_{\alpha-\beta, -m+1+k+\alpha}(At^{\alpha-\beta})$ - функция Миттаз-Леффлера.

Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка со старшей дробной производной Герасимова-Кацудо

$${}^C D_t^\alpha z(t) = {}^R D_t^\beta A z(t), \quad (3)$$

где $A \in \mathcal{L}(\mathcal{L})$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n - 1 < \beta \leq n \in \mathbb{N}$, $\alpha > \beta$.

Зададим два набора начальных условий: Коши и типа Коши для уравнения (2)

$$\begin{cases} z^{(l)}(0) = z_l^C, \quad l = 0, \dots, m-1, \\ D_t^{\beta-n+r} z(0) = z_r^R, \quad r = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n - 1 < \beta \leq n \in \mathbb{N}$, $\alpha > \beta$, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{L})$, m^* - дефект [1]. Тогда существует единственное решение задачи (3), (4), при этом оно имеет вид

$$z(t) = \begin{cases} \sum_{l=m^*}^{m-1} S_l(t) z_l^C, & m^* = n, \text{ если } \{\alpha\} \leq \{\beta\}, \alpha - \beta < m - 1, \\ \sum_{l=m^*}^{m-1} S_l(t) z_l^C, & m^* = n - 1, \text{ если } \{\alpha\} > \{\beta\}, \alpha - \beta < m - 1, \\ \sum_{l=m^*}^{m-1} S_l(t) z_l^C, & m^* = 0, \text{ если } \alpha - \beta \geq m - 1, \end{cases}$$

где

$$S_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-l-1} (I - A\lambda^{\beta-\alpha})^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$S_l(t) = t^l E_{\alpha-\beta, l+1}(At^{\alpha-\beta}),$$

Γ – контур Ганкеля, $E_{\alpha-\beta, l+1}(At^{\alpha-\beta})$ – функция Миттаг-Леффлера.

Работа поддержана грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

Литература

1. Федоров В. Е., Туров М. М. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана–Лиувилля // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 5. С. 1143–1162.
2. Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуюнг Т. Д. Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными // Математические заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 85–104.

ИССЛЕДОВАНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БИОМАССЫ

Тусупбекова Э. Е.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва,
Россия; elmira.tussupbekova@gmail.com

Проводится исследование и анализ динамической модели для сохранения лесного хозяйства, которое истощается из-за вырубке лесов, роста лесной промышленности, климатических факторов. Рассматривается возрастная структура лесной биомассы через деление на молодые (P) и зрелые (M) популяции. Для промышленных предприятий (I) накладывается ограничение на вырубку молодых популяций. В качестве альтернативных ресурсов для промышленных предприятий вводится модифицированная функция Лесли–Гоуэра [4]. В работе изучается система нелинейных дифференциальных уравнений, исследуется устойчивость решений системы, допускающей линеаризацию в окрестности положений равновесия. Взаимодействие между величинами P, M, I описывается динамической системой:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k} \right) - \beta P + \gamma P,$$

$$\frac{dM}{dt} = \beta P - q_1 EM - d_1 M,$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 I}{\alpha_3 + M} \right) I - d_2 I,$$

где $P(0) \geq 0$, $M(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, а r , β , k , γ , q_1 , E , d_1 , d_2 , α_1 , α_2 , α_3 – действительные параметры. Для доказательства положительности и ограниченности решений системы используется лемма Чена [3].

В результате анализа изучаемой модели было изображено поле направлений динамической системы и фазовые портреты в проекции по

двум переменным. В ходе работы были выявлены условия, при которых положения равновесия представляли собой устойчивый узел, неустойчивый узел, устойчивый седло–узел, неустойчивый седло–узел.

Из анализа литературы мы можем утверждать, что основные предположения модели Лесли применимы для нашей системы уравнений. Были получены условия достижения биоэкономического равновесия. В результате численного моделирования были построены графики, соответствующие полученным в работе результатам. В ходе работы было проанализировано каждое уравнение системы по отдельности.

Литература

1. *Асташова И. В.* Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 8. С. 3–33.
2. *Черепанов А. А.* Программный комплекс PhaPl для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости // Открытое образование. 2017. С. 41–52.
3. *Chen F.* On a nonlinear nonautonomous predator-prey model with diffusion and distributed delay // Comput Appl Math. 2014. Pp. 33–49.
4. *Leslie P. H.* Some further notes on the use of matrices in population mathematics // Oxford University Press. 1948. Pp. 213–245.
5. *Manisha C., Joydip D., Om P. M.* A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for industrialization: a modified Leslie Gower interaction // Springer International Publishing Switzerland. 2015. Pp. 1–10.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НАЦПРОЕКТОВ

Тутукова Б. А.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Высшая школа государственного аудита, Москва, Россия*

Национальные проекты приобретают все большее значение для успешного экономического и социального развития Российской Федерации. На их реализацию выделяется значительный объем финансирования. Нацпроекты способствуют достижению социальных целей развития нашей страны, которые определены Указом Президента РФ [1]. Ведущими экономистами проводились разные попытки разработки методологии оценивания эффективности реализации государственных и национальных программ. Так, в работе [2], был предложен пошаговый алгоритм оценивания эффективности реализации госпрограмм с учетом показателей, которые не имеют финансовый характер. Для проведения оценки эффективности реализации нацпроектов авторами предложена непрерывная экономико-математическая модель, являющаяся адаптацией дискретного алгоритма [2].

Поскольку национальный проект состоит из определенного количества федеральных проектов и не имеет своих самостоятельных показателей, то моделью второго уровня (подмоделью) будет являться модель оценки результатов реализации федерального проекта.

Построим функцию степени достижения целевых показателей федерального проекта. Для этого введем в рассмотрение индекс целевого показателя федерального проекта i . Предположим, что проект имеет m – показателей и, следовательно, $i = 1, 2, 3, \dots, m$. Пусть $f_i = f_i(t)$ – функция, отражающая фактическое значение i -го целевого показателя, где t – время реализации проекта. Тогда $F_i = F_i(t)$ – функция планового значения i -го целевого показателя, а $F_0 = F_0(0)$ – начальное значение i -го целевого показателя.

Функция оценки уровня достижения целей федерального проекта имеет вид:

$$R(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[1 + \frac{f_i(t) - F_i(t)}{F_i(t) - F_0(t)} \right], \quad (1)$$

где α_i – весовой коэффициент значимости i -го показателя ($\alpha_i = \text{const} > 0$), определяемый посредством утвержденного метода оценки важности критериев, $F_i(t) \neq F_0$.

Функция (1) является динамической функцией одной переменной, дифференцируя которую мы можем определить динамику уровня достижения целей. Если $dR/dt > 0$, то динамика имеет положительную тенденцию, если же $dR/dt < 0$ – отрицательная, убывающая.

Учитывая изложенное выше, получаем условия роста выполнения показателей национального проекта

$$\frac{f'_i(F_i - F_0) + F'_i(F_0 - f_i)}{(F_i - F_0)^2} > 0. \quad (2)$$

При определенных выше условиях, знаменатель (2) не равен нулю, следовательно $f'_i(F_i - F_0) + F'_i(F_0 - f_i) > 0$.

Таким образом, показатели выполнения нацпроекта будут увеличиваться, если растут скорости роста фактических значений прямо пропорционально скорости роста плановых значений

$$f'_i > F'_i \frac{(f_i - F_0)}{(F_i - F_0)} > 0. \quad (3)$$

Обобщим модель (1) для национального проекта. Построим подмодель, с помощью которой будет рассчитана средневзвешенная оценка результативности всех федеральных проектов, входящих в национальный проект. Предположим, что в национальный проект входит n федеральных проектов. Пусть $j = 1, \dots, n$ – индекс количества федеральных проектов в национальном проекте. Тогда имеет место следующая формула:

$$\overline{R(t)} = \sum_{j=1}^n \{\beta_n * R_j\} \quad (4)$$

где β_n – весовой коэффициент влияния j -го федерального проекта на национальный проект, R_j – функция уровня достижений целей (1) для j -го федерального проекта, $\overline{R}(t)$ – средневзвешанная оценка результативности федеральных проектов, входящих в нацпроект.

Сделаем следующие допущения. Функция $\Phi = \Phi(t)$ – отражает плановый объем финансирования национального проекта, $\Phi \neq 0$, во время как

$\varphi = \varphi(t)$ – фактический объем. Тогда

$$\overline{\Phi}(t) = \varphi(t)/\Phi(t). \quad (5)$$

Из (5) и (6) оценка эффективности реализации национального проекта будет иметь вид:

$$\Psi(t) = \overline{R}(t)/\overline{\Phi}(t). \quad (6)$$

Вычисляя значения функции $\Psi(t)$ в оцениваемый период времени, определяем, насколько эффективна реализация национального проекта в каждый момент времени. Оценку, аналогичную оценке (3), можно привести и для национального проекта в целом, продифференцировав (5) с учетом требования роста эффективности.

В рамках апробации модели была произведена оценка реализации национального проекта «Образование» за 2022 год в Кабардино-Балкарской республике. Согласно предоставленным данным, [3] оценка эффективности анализируемого моделью национального проекта принята как умеренно эффективная.

Работа выполнена в рамках мероприятия «Школа молодых ученых КБГУ «Математическое моделирование сложных систем» проекта Приоритет 2030.

Литература

1. Указ Президента Российской Федерации от 21.07.2020 г. №474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года».
2. Марголин А. М. Пути совершенствования методов оценки эффективности государственных программ // Экономическая политика. 2018. Т. 13, № 6. С. 54–81.
3. Отчет о деятельности Контрольно-счетной палаты Кабардино-Балкарской республики // [Электронный ресурс]: <https://www.kspkbr.ru/index.php/2012-06-22-11-50-48/otchet-o-deyatelnosti-kontrolno-schetnoj-palaty>

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА
С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ С ПЕРЕМЕННЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Умаров Р. А.

*Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган,
Узбекистан; r.umarov1975@mail.ru*

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$U_{xxx} - U_{yy} + A_1(x)U_{xx} + A_2(x)U_x + A_3(x)U + A_4U_y = g_1(x, y), \quad (1)$$

где $p, q, A_4 \in R, A_i(x), i = \overline{1, 3}, g_1(x, y)$ заданные, достаточно гладкие функции.

Заменой

$$U(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{3} \int_0^x A_1(\xi) d\xi + \frac{A_4}{2}y\right) u(x, y),$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$L(u) = u_{xxx} - u_{yy} + a_1(x)u_x + a_2(x)u = g(x, y). \quad (2)$$

Задача В. Найти функцию $u(x, y)$, из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$\alpha u(x, 0) + \beta u_y(x, 0) = 0, \gamma u(x, q) + \delta u_y(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$$u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad u_{xx}(0, y) = \psi_1(y), \quad 0 \leq y \leq q,$$

где $\psi_i(y), i = \overline{1, 3}, g(x, y)$ заданные функции, $a_1(x), a_2(x) \in C^1[0, p], \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

В работах [1, 2] решение поставленной задачи для уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами было найдено с другими краевыми условиями.

Теорема 1. Если задача В имеет решение, то при выполнении условий $a_1(x) \leq 0, a_2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) \geq 0, \alpha\beta \leq 0, \gamma\delta \geq 0$, оно единственно.

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

$$1) \quad a_1(0) = 0; \quad 2) \quad \psi_i(y) \in C^4[0, q], \quad i = \overline{1, 3}, \quad \alpha\psi_i(0) + \beta\psi_i'(0) = 0,$$

$$\gamma\psi_i(q) + \delta\psi_i'(q) = 0, \quad \alpha\psi''_i(0) + \beta\psi'''_i(0), \quad \gamma\psi''_i(q) + \delta\psi'''_i(q) = 0;$$

$$3) \quad \frac{\partial^3 g(x, y)}{\partial x \partial y^2} \in C[0, q], \quad 0 \leq x \leq p; \quad \alpha g(x, 0) + \beta g'(x, 0) = 0,$$

$$\gamma g(x, q) + \delta g'(x, q) = 0; \quad 4) \quad 0 < C \leq \frac{\lambda_1^2}{Kp(1 + \lambda_1)},$$

то решение задачи В существует.

Здесь

$$C = \max\{|a_1(x)|, |a_1'(x) - a_2(x)|, x \in [0, p]\},$$

$$K = \frac{16}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right) \right)^{-1},$$

λ_1 – первая собственная значения задачи

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda_n^3 Y(y) = 0, \\ \alpha Y(0) + \beta Y'(0) = 0, \\ \gamma Y(p) + \delta Y'(p) = 0. \end{cases}$$

Теорема 2 доказана с помощью методов разделение переменных и построения функции Грина. Решение задачи B найдено в следующем явном виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 Y_n(y) \int_0^p G_n(x, \xi) f_n(\xi) d\xi + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 Y_n(y) \left(\int_0^p R_n(x, \xi) \int_0^p G_n(\xi, s) f_n(s) ds d\xi \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\psi_{2n} - \psi_{3n} p + \frac{\psi_{1n}}{2} p^2 + (\psi_{3n} - \psi_{1n} p) x + \frac{\psi_{1n}}{2} x^2 \right) Y_n(y). \end{aligned}$$

Здесь

$$Y_n(y) = \alpha \sin \sqrt{\lambda_n^3} y - \beta \sqrt{\lambda_n^3} \cos \sqrt{\lambda_n^3} y, \quad n \in N,$$

$$f_n(x) = \left(\frac{a_1(x)p - a_1(x)x + a_2(x)px}{\lambda_n^3} - \frac{a_2(x)p^2 + a_2(x)x^2}{2\lambda_n^3} - \frac{p^2 + x^2}{2} + px \right) \psi_{1n} -$$

$$- \left(\frac{a_2(x)}{\lambda_n^3} + 1 \right) \psi_{2n} + \left(\frac{a_2(x)p - a_1(x) - a_2(x)x}{\lambda_n^3} + p - x \right) \psi_{3n} + \frac{g(x)}{\lambda_n^3}.$$

$$R_n(x, \xi) = \bar{G}_n(x, \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{G}_{mn}(x, \xi),$$

$$\bar{G}_{mn}(x, \xi) = \int_0^p \bar{G}_n(x, s) \bar{G}_{(m-1)n}(s, \xi) ds, \quad m = 1, 2, \dots, \bar{G}_{0n}(x, \xi) = \bar{G}_n(x, s).$$

$G_n(x, \xi)$ функция Грина для задачи:

$$\begin{cases} V_n''' + \lambda_n^3 V_n = 0, \\ V_n(p) = V_n'(p) = V_n''(0) = 0. \end{cases}$$

Литература

1. Араков *Y. P.*, Умаров *R. A.* Solution of the boundary value problem for a third order equation with little terms. Construction of the Green's function // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 3. Pp. 738–748.

2. *Apakov Y. P., Umarov R. A.* Construction of the solution of a boundary-value problem for the third-order equation with lower terms with the help of the Green function // *Math Sci.* 2023. Vol. 274, no. 6. Pp. 807–821.

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Умаров Х. Г.

Академия наук Чеченской Республики

*Чеченский государственный педагогический университет, Грозный, Россия;
umarov50@mail.ru*

Для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных

$$u_{tt} - \alpha u_{txx} - \beta v_{tx} + \gamma u_t = \sigma'(u_x) u_{xx}, \quad (1)$$

где штрих в уравнении обозначает дифференцирование по u_x , коэффициенты α, β, γ – известные положительные числовые параметры, нелинейность $\sigma(\cdot)$ – заданная функция, исследована [7] задача Коши в пространстве $C[R^1]$ непрерывных функций на всей числовой оси.

Уравнение (1) обобщает уравнение колебаний кручения цилиндрического вала при учете внутреннего и внешнего затухания и модерирует распространение продольных волн напряжения вдоль одномерного вязкоупругого стержня, материал которого подчиняется закону деформирования среды Фойхта–Кельвина [1, 2]. Изучению различных аспектов уравнения (1) и его многомерных аналогов и обобщений посвящено большое количество работ. В работах [3–6] исследуются вопросы существования и поведения решений, различных начально-краевых задач для уравнений третьего порядка подобных уравнению (1) предполагая, что [3, 4] производная функция $\sigma(r)$ удовлетворяет условию $\sigma'(r) > 0$; в [5, 6] производная $\sigma'(r)$ переменного знака: $|\sigma'(r)| \leq c = \text{const}$ в [5] и $-\sigma'(r) \leq c = \text{const}$ в [6].

Нелинейность уравнения $\sigma(r), r \in R^1$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция, модуль которой $|\sigma(r)|$ при $r \geq 0$ является непрерывной неубывающей функцией и справедливы оценки:

$$\sup_{x \in R^1} \left| \sigma^{(i)}(g(x)) \right| \leq \left| \sigma^{(i)} \left(\sup_{x \in R^1} |g(x)| \right) \right|, \quad i = \overline{0, 2}, \quad \forall g(x) \in C[R^1]. \quad (2)$$

Наряду с уравнением (1) рассматривается и уравнение

$$v_{tt} - \alpha v_{txx} - \beta v_{tx} + \gamma v_t = \partial_x^2 \sigma(v), \quad (3)$$

получающееся из (1) после дифференцирования его обеих частей по x и последующей замены $v = u_x$.

Лемма. Пусть параметры α, β удовлетворяют условию $\alpha \geq \beta^2$, начальные функции удовлетворяют условиям $\varphi(x) \in C^{(3)}[R^1]$, $\psi(x) \in C^{(1)}[R^1]$, а нелинейность $\sigma(\cdot)$ подчиняется требованиям (2) и пусть

классические решения $u(t, x)$ и $v(t, x)$ уравнений (1) и (3) и их частные производные $u_t(t, x)$ и $v_t(t, x)$ для всех значений временной переменной $t \in [0, t_0]$ по переменной x принадлежат пересечению пространств $C[R^1]$ и $W_2^1(R^1)$. Тогда из существования локального классического решения $v = v(t, x)$, $t \in [0, t_0]$, уравнения (3), следует существование соответствующего классического решения $u = u(t, x)$ уравнения (1) на том же отрезке $[0, t_0]$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы и пусть параметры уравнения (1) удовлетворяют условиям $\alpha, \gamma \geq 2$ и $\beta \leq 1$, а начальные функции $\varphi(x), \psi(x)$ удовлетворяют условию $\gamma \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \alpha \|\varphi'\|_{W_2^1}^2 + 2\|\psi\|_2^2 \geq 2(\varphi + \varphi'', \psi)$, тогда существует единственное глобальное классическое решение $u = u(t, x) \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$, $t \geq 0, x \in R^1$, задачи Коши для уравнения (1), для которого в пространстве $C[R^1]$ справедлива оценка $\|u(t, x)\|_C = \sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq c_1 e^{c_2 t}$, $c_{1,2} = \text{const} \geq 0$, причем частные производные $u_x(t, x), u_t(t, x), u_{tx}(t, x)$ для $t \geq 0, x \in R^1$ также принадлежат пересечению $C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$.

Достаточные условия возникновения разрыва второго рода для функционала

$$f_1(t) = (u, u) + (u_x, u_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx, \quad t \in [0, t_0], \quad (4)$$

т. е. условия разрушения решения уравнения (1) на некотором конечном временном отрезке получены в теореме 2.

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы и пусть параметры α, β, γ , нелинейность $\sigma(\cdot)$ и начальные функции $\varphi(x), \psi(x)$ удовлетворяют требованиям: $\alpha > 1 + 2\max_{\tau \in [0, t_0]} |\sigma'(H(\tau))|$, $\gamma > 1, \beta < 1$,

$$f_1''(0) + h_{25}f_1(0) + h_{34} \geq 0,$$

$$f_1'(0) > \left(4h_{37}/(h_{33} - 4) + 2\sqrt{h_{40}/(h_{33} - 4)}\right) f_1(0) > 0,$$

в которых постоянные величины $h_i = h_i(\alpha, \beta, \gamma; \varphi, \psi; \sigma)$ определяются в ходе доказательства теоремы, тогда решение разрушается за конечное время T_0 и для времени существования решения справедлива оценка сверху $t_0 < T_0 = (f_1(0))^{1-h_{33}/4}/h_{41}$, притом для функционала (4) имеет место оценка снизу

$$f_1(t) \geq e^{4h_{37}t/(h_{33}-4)} / \left[(f_1(0))^{1-h_{33}/4} - h_{41}t \right]^{4/(h_{33}-4)}.$$

Литература

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М., 1970.
2. Ерофеев В. И., Кажасев В. В., Семерикова Н. П. Волны в стержнях. Диссипация. Диссипация. Нелинейность. М., 2002.

3. Greenberg J. M., MacCamy R. C., Mizel V. J. On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ // J. Math. and Mech. 1968. Vol. 17. Pp. 707–728.
4. Webb G. F. Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation // Canad. J. Math. 1980. Vol. XXXII, no. 3. Pp. 631–643.
5. Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н. Смешанная задача для одного класса уравнений третьего порядка // Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22, № 6. С. 81–86.
6. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск, 1983.
7. Umarov Kh. G. Solution blow-up and global solvability of the Cauchy problem for a model third-order partial differential equation // Differential Equations. 2023. Vol. 59, no. 1. Pp. 51–73.

**ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО
ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ВТОРОГО РОДА**

Уринов А. К.^{1,2,а}, Окбоев А. Б.^{2,б}

¹ Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

² Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент,
Узбекистан; ^а urinovak@mail.ru, ^б aktaljon12012@gmail.com

Рассмотрим вырождающееся гиперболическое уравнение второго рода

$$L_{\alpha, \lambda}(u) \equiv u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y - \lambda^2 u = f(x, y), \quad y < 0 \quad (1)$$

в конечной односвязной области D , ограниченной его характеристиками $OB : x - 2\sqrt{-y} = 0$, $AB : x + 2\sqrt{-y} = 1$ и $OA : y = 0$, где α и λ – заданные числа, причем $\alpha \in R$, $\alpha < 1$ а $\lambda \in R$ или $i\lambda \in R$, а $f(x, y)$ – заданная функция.

В этой работе мы исследуем следующую видоизмененную задачу Коши для уравнения (1).

Задача Коши. Найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую в области D уравнения (1) и следующим начальным условиям

$$\begin{cases} u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1]; \\ \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha (\partial/\partial y)[u - A_\alpha^-(\tau, \lambda)] = \nu(x), \quad x \in (0, 1), \end{cases} \quad (2)$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ и $f(x, y)$ – заданные функции, а $A_\alpha^-(\tau, \lambda)$ – оператор вида

$$A_\alpha^-(\tau, \lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(2n+2\beta)(4y)^k C_n^k}{\Gamma^2(n+\beta)(\beta+1/2)_k(\beta+n)_k} \times \\ \times \int_0^1 \Psi_k(\tau, \lambda) [z(1-z)]^{k+n+\beta-1} \bar{J}_{k+n+\beta-1}(\sigma) dz,$$

при $\alpha \neq -n$, $\alpha \neq 1/2 - n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; (3)

$$A_{-n+1/2}^{-}(\tau, \lambda) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{C_{n+1}^k (4y)^k}{k!(-n+1/2)_k} \int_0^1 \Psi_k(\tau, \lambda) [z(1-z)]^k \bar{J}_k(\sigma) dz$$

при $\alpha = 1/2 - n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; (4)

$$A_{-n}^{-}(\tau, \lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(4y)^k C_{n+1}^k}{(-n)_k (1/2)_k} \int_0^1 \Psi_k(\tau, \lambda) [z(1-z)]^{k-1/2} \bar{J}_{k-1/2}(\sigma) dz +$$

$$+ \frac{4(4y)^{n+1}}{\pi(-n)_n (3/2)_n} \int_0^1 \Psi_{n+1}(\tau, \lambda) [z(1-z)]^{n+1/2} \times$$

$$\times \left\{ \ln [\sqrt{-y}z(1-z)] \bar{J}_{n+1/2}(\sigma) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sigma/2)^{2m}}{m!(n+3/2)_m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{1/2+n+j} \right\} dz,$$

при $\alpha = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, (5)

$\Psi_k(\tau, \lambda) = \left(\lambda^2 - \frac{d^2}{dt^2} \right)^k \tau(t)$, $t = x - 2\sqrt{-y}(1-2z)$, $\sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, $\beta = \alpha - 1/2$, $(a)_m = a(a+1)\dots(a+m-1)$ – символ Похгаммера, $\Gamma(\delta)$ – гамма-функция Эйлера [1], $J_\gamma(z)$ – функция Бесселя первого рода, т. е.

$$\bar{J}_\gamma(z) = \Gamma(\gamma+1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m! \Gamma(m+\gamma+1)}, \quad \gamma \neq -1, -2, -3, \dots$$

Теорема 1. Если $\tau(x) \in C^{2(n+1)}[0, 1]$, $\nu(x) \in C^2[0, 1]$ и $f(x, y) = (-y)^{1-\alpha} f_1(x, y)$, $f_1(x, y) \in C^1(\bar{D})$, то функция $u(x, y)$, определяемая формулой

$$u(x, y) = A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda) - \gamma_1 (-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \nu(t) [z(1-z)]^{-\beta} \bar{J}_{-\beta}(\sigma) dz +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{x-2\sqrt{-y}}^{x+2\sqrt{-y}} d\xi \int_{\xi}^{x+2\sqrt{-y}} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, -\frac{(\eta-\xi)^2}{16}\right) \times$$

$$\times R(\xi, \eta; x-2\sqrt{-y}, x+2\sqrt{-y}) d\eta, \quad (6)$$

является решением задачи (1), (2) при $\alpha \neq -n$, $\alpha \neq 1/2 - n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\alpha < 1$, где $A_{\alpha}^{-}(\tau, \lambda)$ – определяется по (3),

$$\gamma_1 = \Gamma(2-2\beta) / [(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)],$$

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \frac{(\eta - \xi)^{2\beta}}{(\eta - \xi_0)^\beta (\eta_0 - \xi)^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{(k!)^2} F(\beta, \beta + k, 1 + k; \theta),$$

$$\rho = \frac{\lambda^2}{4} (\eta_0 - \eta) (\xi - \xi_0), \quad \theta = [(\eta_0 - \eta) (\xi - \xi_0)] / [(\eta - \xi_0) (\eta_0 - \xi)].$$

Теорема 2. Если $\tau(x) \in C^{2(n+2)}[0, 1]$, $\nu(x) \in C^2[0, 1]$ и $f(x, y) = (-y)^{1-\alpha} f_1(x, y)$, $f_1(x, y) \in C^1(\bar{D})$, то функция $u(x, y)$, определяемая формулой (6), является решением задачи (1), (2) при $\alpha = 1/2 - n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $A_\alpha^-(\tau, \lambda)$ – определяется по (4).

Теорема 3. Если $\tau(x) \in C^{2(n+2)}[0, 1]$, $\nu(x) \in C^2[0, 1]$ и $f(x, y) = (-y)^{1-\alpha} f_1(x, y)$, $f_1(x, y) \in C^1(\bar{D})$, то функция $u(x, y)$, определяемая формулой (6), является решением задачи (1), (2) при $\alpha = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $A_\alpha^-(\tau, \lambda)$ – определяется по (5).

Отметим, что задача(1),(2) при $f(x, y) \equiv 0$ изучено в работе [2].

Литература

1. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. New York. 1953. 302 p.
2. Urinov A. K., Okboev A. B. Modified Cauchy problem for one degenerated hyperbolic equation of the second kind // Ukrainian Mathematical Journal. Springer. 2020. Vol. 72, no. 1. Pp. 114–135.

О СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА СЕТИ

Уртаева А. А.

Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия; urtaeva-96@mail.ru

В докладе дается точная оценка кратности собственных значений дифференциального уравнения четвертого порядка на сети с краевыми условиями

$$L\lambda u \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2} \left(p(x) \frac{d^2 u}{d\Gamma^2} \right) = \lambda \rho(x) u, \quad u|_{\partial\Gamma} = u'|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Оператор L_λ задается набором обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x) u_i'')' - r_i(x) u = 0, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma),$$

и набором условий согласования в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a) u_i''(a) - \vartheta_i(a) u'_{i\nu}(a) = 0, \quad i \in I(a), \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')'_\nu(a) - r(a) u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \quad (3)$$

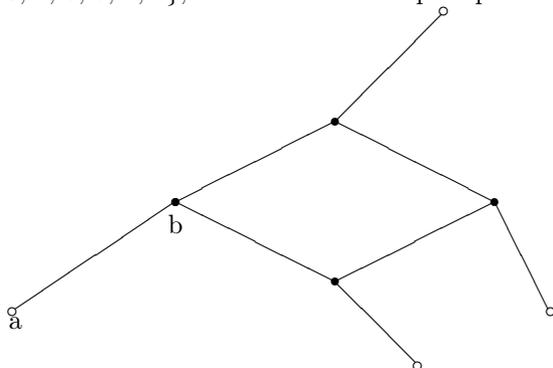
Здесь используются обозначения работ [1–3].

Изучение свойств решений четвертого порядка на сети является существенно более сложной, нежели аналогичная задача для уравнения Штурма–Лиувилля. Заметим, что оценки кратности собственных значений, зависят от топологии графа. В работе [2] были получены результаты:

Теорема. *Кратность любого собственного значения краевой задачи (1)–(3) не превосходит*

$$|\partial\Gamma| + \zeta(\Gamma) + \eta(\Gamma) - 1.$$

Пример. Рассмотрим граф с циклами Γ , состоящий из восьми ребер $\gamma_k, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, как показано на примере.



Предполагая, что ребра γ_k направлены в сторону от граничных вершин a_i ($i = \overline{1, 4}$) к внутренним вершинам, мы рассмотрим краевую задачу на Γ

$$u_k^{IV} - \lambda u_k = 0, \quad x \in \gamma_i,$$

$$u \in C(\Gamma) \cap C^4[\Gamma], \quad u_k''(b_l) = 0,$$

$$u_{k\nu}'''(b_l) + u_{2\nu}'''(b_l) + u_{3\nu}'''(b_l) = 0, \quad b_l \in J(\Gamma); u(a_i) = u'(a_i) = 0, \quad a_i \in \partial\Gamma.$$

Пусть все восемь ребер графа имеют единичную длину. Используя метрическую функцию $\mu = \mu(x)$, построим характеристический определитель

$$\Delta(\lambda) = -2048 \sin^4[\lambda] \sinh^4[\lambda] (8 \cosh[2\lambda] + 3 \sinh^2[2\lambda]), \\ (-23 + 12 \cos[2\lambda] + 3 \cos[4\lambda]).$$

Нули $\Delta(\lambda)$ являются собственными значениями. Мы имеем последовательности собственных значений:

$$\lambda_k^{(1)} = \left(\pi k - \frac{\pi}{2} + o(k^{-1})\right)^4; \quad \lambda_k^{(2)} = (\pi k)^4, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Литература

1. Диаб А. Т. Калдыбекова Б. К., Пенкин О. М. О кратности собственных значений в задаче Штурма–Лиувилля на графах // Матем. заметки. 2016. Т. 994, № 4. С. 489–501.

2. Кулаев Р. Ч., Уртаева А. А. О кратности собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка на графе // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 7. С. 882–889.
3. Кулаев Р. Ч. Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина для уравнения четвертого порядка на графе // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 3. С. 302–316.

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕГО
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ДРОБНОГО
ПОРЯДКА С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРЕ**

Усмонов Д. А.

*Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
ustonov-doniyor@inbox.ru*

В данной работе в прямоугольной области

$$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1; 0 < t < T\}$$

рассмотрим следующее вырождающееся уравнение четвертого порядка

$${}_C D_{0t}^{\delta, \gamma} u(x, t) + bu(x, t) + \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x, t) \right]_{xx} = f(x, t), \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – неизвестная функция,

$${}_C D_{0t}^{\delta, \gamma} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \int_0^t \frac{\bar{J}_{(1-\delta)/2}[\gamma(t-z)]}{(t-z)^{\delta-1}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2 \right) u(x, z) dz$$

– дробный дифференциальный оператор типа оператора Капуто с функцией Бесселя в ядре [1] от функции $u(x, t)$ по аргументу t , $\bar{J}_\nu(z)$ – функция Бесселя–Клиффорда, определяемая равенствам

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) (z/2)^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(\nu+1)_k},$$

$(z)_k$ – символ Похгаммера, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [2], $J_\nu(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν [3], а $\alpha, \beta, \gamma, \delta, b$ – заданные действительные числа, причем $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 1 < \delta < 2, b \geq 0, f(x, t)$ – заданная функция.

Задача A_{p1q1}^{p2q2} . *Найти функцию $u(x, t)$, обладающую следующими свойствами: 1) $u, u_t, u_x, x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}, \left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx} \right]_x \in C(\bar{\Omega})$;*

${}_C D_{0t}^{\delta, \gamma} u(x, t), \left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx} \right]_{xx} \in C(\Omega)$; 2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1); 3) выполняются следующие начальные и граничные условия:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x), x \in [0, 1];$$

$$p_1 u(0, t) = q_1 u(1, t), p_2 u_x(0, t) = q_2 u_x(1, t), \quad t \in [0, T];$$

$$q_2 x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x, t) \Big|_{x=0} = p_2 x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x, t) \Big|_{x=1}, \quad t \in [0, T];$$

$$q_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x, t) \right]_x \Big|_{x=0} = p_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta u_{xx}(x, t) \right]_x \Big|_{x=1}, \quad t \in [0, T],$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные функции, а p_1, p_2, q_1, q_2 – заданные действительные числа, причем $p_1^2 + q_1^2 \neq 0, p_2^2 + q_2^2 \neq 0$.

При формальном применении метода Фурье к задаче $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$ возникает следующая *спектральная задача*: найти значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv \equiv \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \right]'' = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$v(x), v'(x) \in C[0, 1]; \quad (3)$$

$$x^\alpha (1-x)^\beta v''(x), \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \right]' \in C[0, 1]; \quad (4)$$

$$p_1 v(0) = q_1 v(1), p_2 v'(0) = q_2 v'(1), \quad (5)$$

$$q_2 x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \Big|_{x=0} = p_2 x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \Big|_{x=1}, \quad (6)$$

$$q_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \right]' \Big|_{x=0} = p_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta v''(x) \right]' \Big|_{x=1}.$$

Доказано, что $p_1 \neq q_1, p_2 \neq q_2$ то задача (2)–(6) имеет счетное число собственных значений $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k < \dots, \lambda_k \rightarrow +\infty$, а соответствующие им собственные функции $v_1(x), v_2(x), \dots, v_k(x) \dots$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0, 1)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $p_1 \neq q_1, p_2 \neq q_2$, и функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям (3)–(6), а функции $M\varphi_1(x), M\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям (3), (5) и

$$x^{\alpha/2} (1-x)^{\beta/2} [M\varphi_j(x)]'' \in C(0, 1) \cap L_2(0, 1), \quad j = \overline{1, 2}; \quad (7)$$

функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям (3)–(6), а функция $Mf(x, t)$ удовлетворяет условиям (3), (5), (7) по аргументу x равномерно по t . Тогда решение задачи существует, единственно и определяется формулой

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \{ \varphi_{1k} \mathbb{E}_{\delta, 1, (-1/2)} [-\lambda_k t^\delta; \gamma t] + \varphi_{2k} t \mathbb{E}_{\delta, 2, 1/2} [-\lambda_k t^\delta; \gamma t] \} v_k(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\int_0^t (t-z)^{\delta-1} \mathbb{E}_{\delta,\delta,(\delta-1)/2} \left[-\lambda_k(t-z)^\delta; \gamma(t-z) \right] f_k(z) dz \right] v_k(x),$$

λ_k и $v_k(x)$, $k \in N$ – собственные значения и собственные функции задачи (3)–(6), φ_{1k} , φ_{2k} , $f_k(t)$ – коэффициенты Фурье функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f(x, t)$ по системе $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$, а $\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\theta}[x; y] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \bar{J}_{\alpha n/2 + \theta}(y)$ [1].

Литература

1. Уринов А., Усмонов Д. О задаче Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего интегро-дифференциальный оператор с функцией Бесселя в ядре // Бюллетень Института математики. 2023. Т. 6, № 1. С. 138–153.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 296 с.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Утебаев Д.^{1,a}, Тлеуов К. О.^{2,b}

¹ Каракалпакский государственный университет им. Бердаха

² Нукусский филиал Ташкентского университета информационных технологий, Нукус, Узбекистан; ^a dutebaev-56@mail.ru, ^b quwat80@mail.ru

В данной работе рассматривается первая начально-краевая задача для одномерного параболического уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (1, 2)$ по пространственной переменной

$$u_t - D_x^\alpha u = f, \quad x \in (0, 1), \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \vartheta, \quad x \in (0, 1). \quad (3)$$

Задача (1)–(3) сначала аппроксимируется по пространственной переменной методом конечных разностей, как в работах [1], [2], после этого полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности

$$\text{Im} \frac{du_h}{dt} + \text{Re} u_h = f_h, \quad t \in (0, T], \quad u_h(0) = u_{h,0}, \quad x_i \in \bar{\omega}_h,$$

решается векторной схемой метода конечных элементов четвертого порядка точности [3]:

$$\text{Im} y_t - \gamma \text{Re} \dot{y}_t + \text{Re} y^{(0.5)} = \phi_1, \quad \gamma \text{Im} \dot{y}_t + \theta \text{Re} y_t + \beta \text{Re} \dot{y}^{(0.5)} = \phi_2, \quad (4)$$

$$y^0 = u_0, \dot{y}^0 = \text{Im}^{-1}(f^0 - \text{Re } u_0), \quad (5)$$

где

$$\phi_1 = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_h(t) dt, \phi_2 = \frac{1}{\gamma\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_h(t) (s_1 \vartheta_2^{(1)} + s_2 \vartheta_2^{(2)}) dt, s_1 = 15\gamma - 35\theta/3,$$

$$s_2 = 140\gamma - 350\theta/3, \vartheta_1^{(1)} = 1/2, \vartheta_2^{(3)} = \tau\xi(1 - \xi)(\xi - 1/2), \xi = (t - t_n)/\tau.$$

Здесь $\text{Im} \equiv E$ – единичный оператор, Re – дробный разностный оператор аппроксимирующий D_x^α , β , γ , θ – некоторые числовые параметры, которые подчиняются условиям четвертого порядка аппроксимации

$$\theta + \beta = \gamma, \theta, \beta, \gamma = (\tau^2). \quad (6)$$

Доказаны устойчивость и сходимость разностной схемы (4), (5) и на их основе получены оценки точности при условии (6). С помощью вычислительного эксперимента проведено тестирование схем, а также проведен их сравнительный анализ. Проведенный вычислительный эксперимент иллюстрирует эффективность разностных схем, построенных на основе метода конечных разностей второго порядка точности по пространству и четвертого порядка точности по времени. Полученные результаты могут найти дальнейшее применение при исследовании других аналогичных начально-краевых задач.

Литература

1. *Баззаев А. К.* Об устойчивости и сходимости разностных схем, аппроксимирующих третью краевую задачу для обобщенного уравнения диффузии дробного порядка // Сиб. электр. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 738–752.
2. *Jin B., Lazarov R., Zhou Z.* Petrov-Galerkin finite element method for fractional convection-diffusion equations // SIAM J. Numer. Anal. 2016. Vol. 52, no. 5. Pp. 197–211.
3. *Утебаев Д., Москальков М. Н.* Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. Ташкент: Фан ва технология, 2012. 160 с.

МЕЗОФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СПЕКТРА МОЩНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОЙ СУСПЕНЗИИ

Учайкин В. В.

*Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
vuchaikin@gmail.com*

Взвешенные частицы в непрерывной турбулентной среде (воде, воздухе) являются удобным маркером для статистического описания ее свойств [1]. Представление состояния системы в виде дискретного набора случайных точек позволяет не только применить стандартные методы

статистического анализа точечных систем, развитые в гео- и астростатистике, но и, что еще важнее, осуществить математическое моделирование турбулентных состояний. В рамках концепции случайных точечных распределений находят естественные представления основные статистические свойства турбулентной среды – ее флуктуации и корреляции [2]. Воображаемые «жидкие точки» гидродинамических построений заменяются вполне реальными и доступными наблюдениям объектами. Траектории их движения, в ламинарном режиме заменяемые ломаными с фиксированной длиной отрезков, в турбулентном случае удобнее заменить случайными отрезками с асимптотически степенным распределением, отвечающим характеру турбулентных корреляций. Первичные идеи моделирования таких процессов, изложенные в книге [3], получили в настоящее время интенсивное развитие под аббревиатурой МСМС (Markov Chain Monte Carlo method) [4].

Главной характеристикой однородного (в статистическом смысле) турбулентного состояния является корреляционная функция пульсаций, Фурье-образ которой называется спектром мощности турбулентности $P(k)$. В [3] показано, что в рамках МСМС

$$P(k) = A \frac{p(k)}{1 - cp(k)},$$

где $p(k)$ – трансформанта Фурье переходной плотности Марковской цепи, c – вероятность продолжения цепи после очередного узла, A – нормировочная постоянная. Выбор в качестве переходной плотности 3-мерного закона $p_\alpha(r)$ Леви–Фельдгейма обеспечивает сочетание однородности турбулентности в больших масштабах с ее фрактальным проявлением в малых. Это свойство модели выражается термином мезофрактальность, введенным в статье [5].

В докладе рассказываются подробности моделирования и обсуждаются соотношения между мезофрактальным спектром и другими моделями спектра мощности турбулентности.

Литература

1. *Brandt L., Coletti F.* Particle-laden turbulence: progress and perspectives // Annual Review of Fluid Mechanics. 2022. Vol. 54, no. 1. Pp. 159–189.
2. *Фруш У.* Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова. М.: Фазис. 1998.
3. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* Chance and stability: Stable distributions and their applications. Netherlands: VSP, Utrecht, 1999.
4. *Chib S.* Markov chain Monte Carlo methods: computation and inference // Handbook of Econometrics. 2001. Vol. 5, no. 2001. Pp. 3569–3649.
5. *Uchaikin V. V.* The mesofractal Universe, driven by Rayleigh–Lévy walks // General Relativity and Gravitation. 2004. Vol. 36, no. 7. Pp. 1689–1716.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СТАТИСТИКЕ АФТЕРШОКОВ

Учайкин В. В.^а, Кожемякина Е. В.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
^а*vuchaikin@gmail.com*

Сильные землетрясения всегда сопровождаются многочисленными афтершоками – повторными толчками меньшей амплитуды, нерегулярно распределенными во времени и пространстве. Частота и магнитуда афтершоков со временем уменьшаются, а продолжительность проявления может длиться месяцами. Особенно велика вероятность сильных афтершоков в первые часы после главного толчка. Известно много случаев, когда поврежденные главным ударом здания рушились именно при повторных, менее сильных толчках. Афтершоки представляют существенную угрозу и при проведении спасательных работ.

Доклад посвящен статистической модели последовательности повторных толчков (афтершоков) после сильного землетрясения, реализуемой на основе ансамбля Марковских цепей, моделируемых методом Монте–Карло. В основу ее положены три основных закона, относящихся к распределению временных промежутков между афтершоками, энерговыделению и фактальным свойствам пространственного распределения толчков. Основное внимание уделяется временным характеристикам последовательности. Для математического описания используются нелокальные уравнения с дифференциальными уравнениями дробного порядка. Излагаются основные свойства дробно-пуассоновского процесса, выведено предельное распределение числа событий в таком процессе.

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

Федоров В. Е., Мамедова А. А.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
kar@csu.ru; abdrahmanova-a@mail.ru

Пусть \mathcal{Z} – банахово пространство, оператор $A : D_A \rightarrow \mathcal{Z}$ линейен и замкнут, снабдим его область определения $D_A \subset \mathcal{Z}$ нормой графика оператора A .

Рассмотрим уравнение

$$\int_b^c D^\alpha z(t) d\mu(\alpha) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

где D^α – дробная производная Римана–Лиувилля, $m - 1 < c \leq m$, $\mu \in BV((b, c]; \mathbb{C})$, c – точка вариации меры $d\mu(\alpha)$, интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса, $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{Z}$. В случае $\mu(\alpha) \equiv \alpha$ задача исследована в работе [1]. Решением начальной задачи

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{m-1-k}^c D^{\alpha-m+k} z(t) d\mu(\alpha) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

для уравнения (1) называется такая функция $z \in C((0, T]; D_A)$, что существуют

$$\int_{m-1-k}^c D^{\alpha-m+k} z(t) d\mu(\alpha) \in C([0, T]; \mathcal{Z}), \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$\int_b^c D^\alpha z(t) d\mu(\alpha) \in C((0, T]; \mathcal{Z}),$$

выполняется равенство (1) при $t \in (0, T]$ и условия (2).

Определим функцию $W(\lambda) := \int_b^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha)$. Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{A}_c^R(\theta_0, a_0)$, если

(i) существуют $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ и $a_0 \geq 0$, такие, что для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется включение $W(\lambda) \in \rho(A)$;

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая константа $K = K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$ $\|(W(\lambda)I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq K(\theta, a)|\lambda - a|^{-c}$.

Теорема. Пусть $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$, $m-1 < c \leq m \in \mathbb{N}$, $\mu \in BV((b, c]; \mathbb{C})$, c – точка вариации меры $d\mu(\alpha)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_c^R(\theta_0, a_0)$, $f \in C([0, T]; D_A) \cup C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$ $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2).

Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

Литература

1. Fedorov V. E., Du W.-S., Kostic M., Abdrakhmanova A. A. Analytic resolving families for equations with distributed Riemann–Liouville derivatives // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 5. Pp. 681.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОБРАТИМЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО ПО ВРЕМЕНИ

Федотов Е. Д.

Якутское отделение Регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований», Якутск, Россия; egorfedotov2011@gmail.ru

Рассматривается задача Коши для уравнения с обратимым оператором при старшей производной Капуто [1, 2] по времени

$$(L_0(D_x) + L'_0(D_x)) (\partial_{0t}^\alpha)^l u + \sum_{k=0}^{l-1} (L_{l-k}(D_x) + L'_{l-k}(D_x)) (\partial_{0t}^\alpha)^k u = f(t, x), \quad (1)$$

при $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\partial_{0t}^\alpha)^k u|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{0, \dots, l-1}, \quad (2)$$

где для главной части а также для младших членов

$$L(\partial_{0t}^\alpha, D_x) \equiv \sum_{k=0}^l L_{l-k}(D_x) (\partial_{0t}^\alpha)^k, \quad L'(\partial_{0t}^\alpha, D_x) \equiv \sum_{k=0}^l L'_{l-k}(D_x) (\partial_{0t}^\alpha)^k$$

выполнены следующие условия: $L(\eta, y)$ однороден относительно вектора $(\alpha_0, \alpha) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, то есть $L(c^{\alpha_0}\eta, c^\alpha y) = c L(\eta, y)$, также

$$|L'_{l-k}(iy)| \leq c(1 + \langle y \rangle)^{1-l\alpha_0-\epsilon}.$$

С помощью метода преобразования Фурье [3] получены условия для правой части уравнения (1) что, задача Коши (1), (2) однозначно разрешима в весовом пространстве Соболева.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003.
2. *Псыу А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
3. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы неразрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА–КАПУТО, ЗАДАННОЙ ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА

Филин Н. В.

*Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
filintv@csu.ru*

При $b < c$, $m - 1 < c \leq m \in \mathbb{N}$, для функции ограниченной вариации $\mu : (b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ (коротко, $\mu \in BV((b, c]; \mathbb{C})$) обозначим интегралы Римана–Стилтьеса $W(\lambda) := \int_b^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha)$, $W_k(\lambda) := \int_k^c \lambda^\alpha d\mu(\alpha)$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

Определим класс $\mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ как множество всех операторов $A \in \text{inCl}(\mathcal{Z})$ (т. е. линейных замкнутых операторов A , плотно определенных в банаховом пространстве \mathcal{Z} , действующих в \mathcal{Z}), удовлетворяющих следующим условиям:

1) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, что $W(\lambda) \in \rho(A)$ для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \neq a\}$;

2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ $\left\| (W(\lambda)I - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{|\lambda|K(\theta, a)}{|W(\lambda)||\lambda - a|}$.

Рассмотрим задачу Коши

$$D^k z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (1)$$

для уравнения

$$\int_b^c D^\alpha z(t) d\mu(\alpha) = Az(t) + B \left(t, \int_{b_1}^{c_1} D^\alpha z(t) d\mu_1(\alpha), \dots, \int_{b_n}^{c_n} D^\alpha z(t) d\mu_n(\alpha) \right), \quad (2)$$

где $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n < c$.

Теорема 1. Пусть $m - 1 < c \leq m \in \mathbb{N}$, $b < c$, $\mu \in BV((b, c]; \mathbb{C})$, c – точка вариации меры $d\mu(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$, $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n < c$, $b_l < c_l$, $\mu_l \in BV((b_l, c_l]; \mathbb{C})$, c_l – точка вариации меры $d\mu_l(\alpha)$, $l = 1, 2, \dots, n$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathbb{Z}^n; \mathbb{Z})$ липшицево. Тогда задача Коши (1), (2) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, T]$.

Работа выполнена в рамках проекта по гранту Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

Литература

1. Fedorov V. E., Filin N. V. A class of quasilinear equations with distributed Gerasimov–Caputo derivatives // Mathematics. 2023 Vol. 11, no. 11. P. 2472.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В КАДАСТРОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Фоменко Л. Ю.^а, Сафонова У. Н.^б, Грибкова Л. А.^с

Кубанский государственный технологический университет, Краснодар, Россия; ^аludmilafofomenko0802@gmail.com, ^бsafonova.ulyana20@mail.ru, ^сlarisa.gri2012@mail.ru

Математическое моделирование является важной частью кадастра недвижимости, так как благодаря ему значительно упрощаются геодезические работы и оно значительно экономит время.

Математическое моделирование сейчас очень актуально, так как без него значительно бы снизилось качество и эффективность всех кадастровых работ [2].

Сейчас не одна организация не может обойтись без применения информационно математических моделей, так как они упрощают работу самого предприятия на всех этапах кадастровых работ. И являются единым информационно-математическим комплексом для всего предприятия, позволяют эффективно управлять предприятием, получать актуальную и достоверную информацию без задержек [5].

Математическое моделирование включает в себя не только расчет площади, но и планирование геодезических работ, расчет ресурсов и времени, благоустройство территории и решение экономических задач. Целью математического моделирования является разработка и построение алгоритмов для кадастровых работ [2].

Также перед применением математической модели, проводится математическая обработка полученных данных и их анализ [6].

Классификация математических моделей в сфере недвижимости

Математические модели подразделяются на классы в зависимости от сложности и от вида поставленных задач. Они делятся на:

I. Межотраслевые модели, которые используются в организации использования земли и ресурсов;

II. Межхозяйственное землеустройство, применяющееся в устранении недостатков землепользований и в формировании оптимальных размеров участка;

III. Внутрихозяйственное землеустройство;

IV. Рабочее проектирование (улучшение угодий, устройство культурных пастбищ и т. д.) [4].

Измерение площадей

Измерение площади включает в себя два метода: геодезический, который проводится с помощью теодолитных ходов и спутниковый.

Самый простой способ расчета площади участка – это его разбиение на простые геометрические фигуры, формулы которых известны. Такой способ характерен для горизонтальной проекции участка, которая весьма актуальна для построения картографических планов и карт. Например она учитывает рельеф участка.

В других случаях используют площадь физической поверхности земли, которая является той же площадью, но ее главной отличительной чертой от горизонтальной проекции является учет неровности самого рельефа [3].

В заключении необходимо отметить, что математическое моделирование занимает чуть ли не главную роль в кадастровой деятельности, так как оно значительно повышает эффективность, использует множество экономико-математических методов и алгоритмы при разработке кадастровых работ [1].

Литература

1. *Непоклонов В. Б., Хабарова И. А., Хабаров Д. А., Аверьянова Е. А., Гиллок А. В., Абдугапирова И. Ф., Кюйбаш В. А.* Использование экономико-математических методов и моделей для землеустроительных целей // *International Agricultural Journal*. 2017. № 6. С. 30–31.
2. *Шаптала В. В.* Математические методы и модели в городском кадастре. Белгород: Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ЭБС АСВ, 2011. 71 с.
3. *Господинов В. Г., Цветков В. Я., Ознамец В. В., Сельманова Н. Н.* Моделирование при геодезическом обеспечении кадастра // *Прикладная геоинформатика*. 2018. № 1. С. 40–44.
4. *Папаскири Т. В.* Геоинформационные системы и технологии автоматизированного проектирования в землеустройстве. М.: Изд-во ГУЗ, 2003. 180 с.
5. *Грибкова И. С., Гура Д. А., Бровкова Я. В.* Разработка методики создания информационных систем для рационального управления земельно-имущественным комплексом // *Электронный сетевой политематический журнал «Научные труды КубГТУ»*. 2017. № 4. С. 221–232.

6. Гордеев В. А. Математическая обработка и анализ точности геодезических измерений. Краснодар: Кубанский государственный технологический университет, 2022. 178 с.

ОЦЕНКА СПЕЦИАЛЬНЫХ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Хайруллоев Ш. А.

*Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан
shamsullo@rambler.ru*

Рассматриваем кратную тригонометрическую сумму вида:

$$W(T) = \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 < P} \frac{a(\lambda_1)d(\lambda_1)\bar{a}(\lambda_2)\bar{d}(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-iT} \exp\left(-\left(\frac{H}{2} \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right), \quad (1)$$

где

$$P = \sqrt{\frac{5T}{2\pi}}, \quad T \geq T_0(\varepsilon) > 0, \quad 0 < \varepsilon < 0,01, \quad 0 < H < T^{\frac{1}{3}}, \quad X = T^{0,01\varepsilon},$$

$$a(\lambda) = \sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2} = \lambda \\ \nu_1, \nu_2 < X}} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}, \quad d(\lambda) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-\left(\frac{u}{h}\right)^2} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu} du, \quad 0 < h < h_1 < 1,$$

$$r(n) = \frac{1 - i\alpha}{2} \chi(n) + \frac{1 + i\alpha}{2} \bar{\chi}(n), \quad h(\nu) = \beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\bar{\chi}(\nu).$$

При исследовании нулей нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой, основным моментом является оценка кратных тригонометрических сумм (1). Для таких сумм А. А. Карацуба [1] получил следующую оценку

$$W(T) \ll h^2 T^{-\varepsilon}$$

при $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$.

В настоящей работе, применяя метод экспоненциальных пар [2], следуя работам [3–4], получена новая оценка специального кратного тригонометрического суммы (1), которая улучшает оценку А. А. Карацубы в случае, когда промежуток $(T, T + H)$ имеет более короткую длину.

Справедливо следующая

Теорема. Пусть (κ, λ) – произвольная экспоненциальная пара, ε – произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее $0,01$, $\mathcal{L} = \ln P$,

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \quad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathcal{L}}{(\kappa + 1) \ln T}.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa, \lambda) + \varepsilon + \sigma(\kappa)}$ справедлива оценка

$$W(T) \ll h^2 T^{-0,98\varepsilon}.$$

Отметим, что показатель

$$\theta(\kappa; \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2(\kappa + 1)}$$

в теореме также рассматривался в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2 + y^2 \leq R$ и при оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \leq N$, $x > 0$, $y > 0$. Наилучшую для $\theta(\kappa; \lambda)$ оценку сверху на данный момент получили J. Bourgain и N. Watt [5]. Они доказали, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa, \lambda \in \mathcal{P}} \theta(\kappa, \lambda) = \min_{\kappa, \lambda \in \mathcal{P}} \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2} \leq \frac{1515}{4816} = \frac{1}{3} - \frac{271}{3 \cdot 4816} \approx 0.314576,$$

где \mathcal{P} – множество всех экспоненциальных пар.

Из теоремы вытекает следующий

Следствие. Пусть ε произвольное малое фиксированное положительное число, не превосходящее 0,01. Тогда при $H = T^{\frac{1515}{4816} + \varepsilon}$ справедлива оценка:

$$W(T) \ll h^2 T^{-0,98\varepsilon}.$$

Литература

1. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т. 5, № 5. С. 3–14.
2. Graham S. W., Kolesnik G. Van Der Corput's method of exponential sums. Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney. 1991. 119 p.
3. Рахмонов З. Х, Хайруллоев Ш. А., Аминов А. С. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 4(72). С. 271–293.
4. Хайруллоев Ш. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих Эйлерова произведения // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2018. № 4(173). С. 7–25.
5. Bourgain J. and Watt N. Decoupling for perturbed cones and mean square of $|\zeta(0, 5 + it)|$ // <http://arxiv.org/abs/1505.04161v1> [math.NT], 15 May 2015.

ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Халилов К. С.

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
q_xalilov@mail.ru

В этой работе в конечной односвязной области Ω плоскости xOy , ограниченной при $y \geq 0$ прямыми $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$, а при $y \leq 0$ –

характеристиками $x + y = 0$, $x - y = 1$ уравнения колебания струны, рассмотрим парабола-гиперболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0y}^\alpha u, & (x, y) \in \Omega_1 = \Omega \cap (y > 0), \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in \Omega_2 = \Omega \cap (y < 0) \end{cases} \quad (1)$$

и исследуем для него нелокальные задачи с интегральным условием второго и третьего рода, здесь

$${}_C D_{0y}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t) dt$$

– дробный дифференциальный оператор Капуто порядка α ($0 < \alpha < 1$),

$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ – гамма-функция Эйлера.

Уравнение (1) в области Ω_1 принадлежит параболическому типу, в области Ω_2 – гиперболическому типу, а отрезок $\Omega_0 = \Omega \cap (y = 0)$ является линией изменения типа и характеристикой уравнения.

Для уравнение (1) в области Ω рассматривается

Задача 1. *Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:*

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega_1) \cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_2)$, ${}_C D_{0y}^\alpha u \in C(\Omega_1)$;
- 2) $u(x, y)$ – регулярное в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ решение уравнения (1);
- 3) $u(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$u(0, y) = \mu_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (2)$$

$$\int_0^1 u(x, y) dx = \int_0^y p(y, t) u(1, t) dt + \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (3)$$

$$u(x, -x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq (1/2); \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} {}_C D_{0y}^\alpha u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

где $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\psi(x)$, $p(y, t)$ – заданные функции, непрерывные в своих областях определения, причем $\mu_1(0) = \psi(0)$.

Задача 2. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям задачи 1, когда условие (3) заменено условием*

$$u(1, y) = \int_0^1 u(x, y) dx + \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (6)$$

Отметим, что условие (3) при $p(y, t) \equiv 0$ и $p(y, t) \neq 0$ соответственно называется интегральным условием первого и третьего рода, а (6) – интегральным условием второго рода. Задачи для уравнения $u_{xx} - u_y = 0$ с интегральным условием (3) при $p(y, t) \equiv 0$ и $p(y, t) = 1$ впервые изучены

в работах соответственно [1] и [2], а с интегральным условием типа (6) – в работе [3].

В настоящее время по постановке и исследованию разных краевых задач для дифференциальных уравнений, содержащих дробно интегро-дифференциальные операторы существенные научные результаты получены в работах [4–8]. Существует ряд статей, посвященных изучению задач с интегральным условием для уравнений в частных производных с дробными интегро-дифференциальными операторами. Например, в работе [7] в прямоугольной области, а в [8] в полуполосе рассмотрены задачи с интегральным условием для уравнения дробной диффузии.

Литература

1. Cannon J. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 21, no. 2. Pp. 155–160.
2. Голованчиков А. Б., Симонова И. Э., Симонов Б. В. Решение диффузионной задачи с интегральным условием // Фундамент. и прикл. матем. 2001. Т. 7, вып. 2. С. 339–349.
3. Атаев Г. А. Метод сеток для квазилинейных уравнений параболического типа с интегральным условием в классах обобщенных решений. Автореф. дисс. . . канд. физ.-мат. наук. Киев, 1995. 17 с.
4. Karimov E. T., Akhatov J. S. A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative // Electronic Journal of Differential Equations. 2014. Vol. 2014, no. 14. Pp. 1–6.
5. Yuldashev T. K., Abdullaev O. Kh. Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, no. 5. Pp. 1113–1123.
6. Islomov B. I., Akhmadov I. A. A nonlocal boundary value problem with the Frankl condition for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the fractional Gerasimov-Caputo operator // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 3. Pp. 755–761.
7. Лосанова Ф. М. Внутреннекраевая задача с интегральным условием для уравнения дробной диффузии // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 37, № 4. С. 24–29.
8. Лосанова Ф. М. Задача с интегральным условием для уравнения дробной диффузии с оператором Капуто // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 16, № 4. С. 38–44.

**УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ
ВТОРОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО
НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Хибиев А. Х.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; akkhibiev@gmail.com*

Рассмотрена начально-краевая задача для диффузионно-волнового уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha+1} u &= \mathcal{L}u + g(x, t), & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq T, & \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & u_t(x, 0) &= u_1(x), & \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= 0, & u(1, t) &= 0, & \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Применяя оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля порядка α , обозначаемый $D_{0t}^{-\alpha} u(t)$, к обеим сторонам первого уравнения, мы приходим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_{0t}^{-\alpha} \mathcal{L}u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

где $f(x, t) = D_{0t}^{-\alpha} g(x, t) + u_1(x)$. Исследовалась более общая форма этого уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_{0t}^{-\alpha, \lambda(t)} \mathcal{L}u + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

с такими же граничными условиями, что и во втором уравнении и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Нелинейная форма предыдущей обобщенной модели с запаздыванием имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_{0t}^{-\alpha, \lambda(t)} \mathcal{L}u + f(x, t, u(x, t), u(x, t-s)), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

где $s > 0$ – параметр времени запаздывания. Эта модель, подчиняется тем же граничным условиям, что и во втором уравнении, и начальным условиям

$$u(x, t) = u_0(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad -s \leq t \leq 0.$$

Для построения разностной схемы, аппроксимирующей эту модель, временная область $\bar{\omega}_\tau \in \mathbb{R}^2$ была дискретизирована с размерами шага $\tau = s/M_s$, где M_s – положительное целое число и $M = \lceil T/\tau \rceil$. Таким образом, равномерная временная сетка имеет вид $\bar{\omega}_\tau = \{t_j | t_j = j\tau, j =$

$-M_s, -M_s + 1, \dots, 0, 1, \dots, M\}$. Проведен анализ погрешности аппроксимации и построена разностная схема второго порядка для нелинейной модели дробного порядка с запаздыванием по времени:

$$\frac{3y_i^{j+1} - 4y_i^j + y_i^{j-1}}{2\tau} = \tilde{\Delta}_{0t_{j+1}}^{-\alpha, \lambda(t)} \Lambda y_i + f(x_i, t_{j+1}, 2y_i^j - y_i^{j-1}, y_i^{j+1-M_s}),$$

$$y_i^j = u_0(x_i, t_j), \quad 0 \leq i \leq N, \quad -M_s \leq j \leq 0,$$

$$u_0^j = 0, \quad u_1^j = 0, \quad 0 \leq j \leq M.$$

Применяя дискретное неравенство Гронуолла доказана теорема о сходимости. Демонстрируются численные результаты для линейной модели и нелинейной модели с запаздыванием и без.

Литература

1. *Pimenov V. G., Hendy A. S., De Staelen R. H.* On a class of non-linear delay distributed order fractional diffusion equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017. Vol. 318. Pp. 433–443.
2. *Hao Z., Fan K., Cao W., Sun Z.* A finite difference scheme for semilinear space-fractional diffusion equations with time delay // *Applied Mathematics and Computation*. 2016. Vol. 275. Pp. 238–254.
3. *Zhang Y., Wang Z.* Numerical simulation for time-fractional diffusion-wave equations with time delay // *Journal of Applied Mathematics and Computing*. 2023. Vol. 69, no. 1. Pp. 137–157.
4. *Ran M., He Y.* Linearized crank–nicolson method for solving the nonlinear fractional diffusion equation with multi-delay // *International Journal of Computer Mathematics*. 2018. Vol. 95, no. 12. Pp. 2458–2470.
5. *Zhang Q., Liu L., Zhang C.* Compact scheme for fractional diffusion-wave equation with spatial variable coefficient and delays // *Applicable Analysis*. 2022. Vol. 101, no. 6. Pp. 1911–1932.

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Хубиев К. У.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; khubiev_math@mail.ru*

Рассмотрим нагруженное [1] уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x_1, y) = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u(x_2, y) = 0, & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками AA_1, BB_1, A_1B_1 прямых $x = 0, x = r, y = T > 0$ соответственно при $y > 0$, характеристиками $AC : x + y = 0, BD : x - y = r$ уравнения (1) и отрезками AB прямой $y = 0$ и CD прямой $y = -x_2$ при $y < 0, x_1 \in [0, r], x_2 \in]0, r/2], \lambda_1, \lambda_2 = \text{const}$.

Через Ω_1 и Ω_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, J – интервал $0 < x < r$ прямой $y = 0$. Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_2) \cap C_x^2(\Omega_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, такую, что $u_y(x, 0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала J .

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(r, y) = \varphi_r(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, -x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq x_2, \quad (3)$$

$$u(x, -x_2) = \rho(x), \quad x_2 \leq x \leq r - x_2, \quad (4)$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_r(y)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$ – заданные функции, причем $\varphi_0(0) = \psi(0)$, $\psi(x_2) = \rho(x_2)$.

Область, в которой исследуется уравнение (1), зависит от нагруженного слагаемого в гиперболической части. Если $x_2 = r/2$, то Ω_2 будет совпадать с характеристическим треугольником, и задача (1)–(4) будет классическим аналогом задачи Трикоми для гипероло-параболического уравнения (1).

В работе [2] было выписано решение задачи Коши и аналогов задач Дарбу и Гурса для уравнения (1) при $y < 0$. В работах [3–5] исследованы краевые задачи для нагруженного уравнения гипероло-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности, то есть в уравнении (1) при $y < 0$ задавалось гиперболическое уравнение первого порядка с нагруженным слагаемым $\lambda_2 u(x_2, y)$.

Литература

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Атнаев А. Х. Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения // Вестник Карагандинского ун-та. Серия: Математика. 2017. № 2 (86). С. 8–13.
3. Хубиев К. У. Краевая задача для нагруженного уравнения гипероло-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 149. С. 113–117.
4. Хубиев К. У. Краевая задача для нагруженного гипероло-параболического уравнения с вырождением порядка // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2019. Т. 167. С. 112–116.
5. Хубиев К. У. Задача Бицадзе–Самарского для нагруженного гипероло-параболического уравнения с вырождением порядка в области его гиперболичности // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 198. С. 123–132.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ**

Хуштова Ф. Г.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; khushtova@yandex.ru*

В области $\Omega_T = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) - D_{0y}^\alpha u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где D_{0y}^α – дробная производная в смысле Римана–Лиувилля порядка $0 < \alpha \leq 1$ [1, с. 9], [2, с. 14].

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω_T назовем функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω_T , и такую, что $y^{1-\alpha}u, y^{1-\alpha}u_x \in C(\bar{\Omega}_T)$, $u_{xx}, D_{0y}^\alpha u \in C(\Omega_T)$, $\bar{\Omega}_T$ – замыкание области Ω_T .

Задача. *Найти регулярное в области Ω_T решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (2)$$

$$u_x(0, y) = hu(0, y) - \nu(y), \quad 0 < y < T, \quad (3)$$

где $\varphi(x)$ и $\nu(y)$ – заданные функции, $h = \text{const}$.

Далее $f(y) * g(y)$ – свёртка Лапласа, $\phi(-\rho, \mu; z)$ – функция Райта [3], $E_{\rho, \mu}(z)$ – функция типа Миттаг-Леффлера [4, с. 117], $\text{erfc}(z)$ – дополнительный интеграл вероятности [5, с. 622].

Примем обозначения $\beta = \alpha/2$,

$$G(x, \xi, y) = \frac{y^{\beta-1}}{2} [\phi(-\beta, \beta; -(x+\xi)y^{-\beta}) + \phi(-\beta, \beta; -|x-\xi|y^{-\beta})],$$

$$G_0(x, \xi, y) = y^{\beta-1} \phi(-\beta, \beta; -(x+\xi)y^{-\beta}), \quad E(y) = y^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-hy^\beta),$$

$$\tilde{G}(x, \xi, y) = G(x, \xi, y) - h G_0(x, \xi, y) * E(y).$$

Теорема 1. *Пусть $y^{1-\alpha}\nu(y) \in C[0, T]$, $\varphi(x) \in C[0, \infty)$ и выполняются условия*

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{1-\alpha}\nu(y) = \Gamma(\alpha) [h\varphi(0) - \varphi'(0)],$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) \exp\left(-\sigma x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \quad \sigma < (2-\alpha) 2^{-\frac{2}{2-\alpha}} (\alpha/T)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Тогда функция

$$u(x, y) = \int_0^y \tilde{G}(x, 0, y-\eta) \nu(\eta) d\eta + \int_0^\infty \tilde{G}(x, \xi, y) \varphi(\xi) d\xi$$

является решением задачи (1)–(3).

Теорема 2. Существует не более одного регулярного решения задачи (1)–(3), удовлетворяющего для некоторого $k > 0$ условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y^{1-\alpha} u(x, y) \exp\left(-kx^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0.$$

Частные случаи. Если в условии (3) $h = 0$, то для уравнения (1) получим решение второй краевой задачи в области Ω_T в виде

$$u(x, y) = \int_0^y G(x, 0, y - \eta) \nu(\eta) d\eta + \int_0^\infty G(x, \xi, y) \varphi(\xi) d\xi.$$

Отметим, что первая краевая задача для уравнения (1) в полубесконечной области была рассмотрена в работе [6].

В случае, когда уравнение (1) совпадает с уравнением Фурье, то есть $\alpha = 1$ ($\beta = 1/2$), функции $G(x, \xi, y)$, $G_0(x, \xi, y)$ и $E(y)$ примут вид [7]

$$G(x, \xi, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \left[\exp\left(-\frac{(x + \xi)^2}{4y}\right) + \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4y}\right) \right],$$

$$G_0(x, \xi, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\left(-\frac{(x + \xi)^2}{4y}\right), \quad E(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} - h \exp(h^2 y) \operatorname{erfc}(h\sqrt{y}).$$

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. С. 272.
2. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. С. 199.
3. *Wright E. M.* The generalized Bessel function of order greater than one // The Quarterly Journal of Mathematics. 1940. Vol. 11, no. 1. Pp. 36–48.
4. *Джрбашиян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 632 с.
6. *Гекжиева С. Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Известия КБНЦ РАН. 2002. Т. 8, № 1. С. 6–8.
7. *Хуштова Ф. Г.* Третья краевая задача в полуполосе для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 12. С. 1635–1643.

К ФОРМАЛИЗАЦИИ ПОСТРОЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Чернышев Г. В.

*Институт информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; HenryChern@yandex.ru*

Аналогично созданию свободной категории [1], порожденной графом, можно подобным образом построить категорию \mathcal{C}_T , порожденную деревом $T = (V, A, s, t)$, объектами которой являются вершины из множества V , а морфизмами (стрелками) от a к b , из множества A , являются пути от a к b . Тожественный морфизм на любом объекте — это просто тождественный путь при этом объекте. Композиция морфизмов \circ задается конкатенацией путей. Функции $s, t : A \rightarrow V$ являются функциями источника и цели (для стрелок), соответственно. Под путем в \mathcal{C}_T понимается любая последовательность стрелок, в которой цель одной стрелки является источником следующей.

Категория \mathcal{C}_T имеет универсальное свойство: для любых двух объектов $a, b \in \mathcal{C}_T$, имеется единственный, соединяющий их, путь (не содержащий возвратов), т.е. $|\mathcal{C}_T(a, b)| = 1$.

Будем считать, что в категории \mathcal{C}_T имеется отмеченный объект v_r , соответствующий корню в дереве T . Назовем морфизм с источником v_r и целью v_i , образующим морфизмом χ_{v_i} для v_i . Образующий морфизм для терминального объекта назовем терминальным. Тогда имеют место следующие утверждения.

Предложение 1. *Для любых $v_i, v_j \in \mathcal{C}_T$, следующие условия эквивалентны:*

1. $|\mathcal{C}_T(v_i, v_j)| = 1$;
2. $\chi_{v_i} = \chi_{v_m} \circ \mathcal{C}_T(v_m, v_i)$, $\chi_{v_j} = \chi_{v_m} \circ \mathcal{C}_T(v_m, v_j)$,
где образующий морфизм χ_{v_m} является наибольшим общим делителем образующих морфизмов χ_{v_i} и χ_{v_j} .

Предложение 2. *Если χ_m — наибольший общий делитель для произвольных образующих морфизмов χ_a и χ_b категории \mathcal{C}_T , то путь между a и b выражается формулой*

$$M_P(a, b) = (\chi_a \ominus \chi_m)^{-1} \circ (\chi_b \ominus \chi_m).$$

Предложение 3. *Множество терминальных образующих морфизмов категории \mathcal{C}_T однозначно определяет все морфизмы этой категории.*

Любая свободная категория \mathcal{C}_T соответствует одному конкретному дереву. Попытки определить категорию (всех возможных) деревьев, сталкиваются с известными проблемами. Для их преодоления предлагается следующий подход.

Для категории \mathcal{C}_T схемой назовем категорию \mathcal{S}_T , такую, что каждый терминальный образующий морфизм из \mathcal{C}_T изоморфен ровно одному терминальному образующему морфизму из \mathcal{S}_T .

Обобщенной иерархической структурой назовем дерево, наделенное дополнительными структурными объектами, позволяющими строить конечно представимые схемы для множества, возможно бесконечных, свободных категорий.

Идея построения схемы свободной категории \mathbb{S}_T , позволяющей описывать обобщенные иерархические структуры, связана с абстрагированием от исходного дерева привлечением средств конструирования (в этой категории), новых типов объектов (вершин, морфизмов, вложенных структур), возможно полиморфных, базирующихся на гомотопической теории типов [2]. Такая категория-схема позволит порождать свободные категории \mathbb{C}'_T , являющиеся ее экземплярами, с помощью функторов вида $F: \mathbb{S}_T \rightarrow \mathbb{C}'_T$.

Подобные схемы назовем информационными моделями (объектов, явлений, предметных областей, и т. п.).

На следующем рисунке представлен пример описания структуры схемы категории (для свободной категории с бесконечным числом объектов) [3], где курсивом выделены ключевые слова, а остальные имена обозначают понятия информационной модели. Это пример представления регулярной иерархической структуры, которая задает множество именованных объектов (вершина ОБЪЕКТЫ), каждый из которых (вершина ОБЪЕКТ) характеризуется множеством свойств (вершина СВОЙСТВА), и включает составные части (вершина ПОДОбЪЕКТЫ), устроенные так же, как и исходные объекты (путем указания *шаблон* \rightarrow *Корень*. ОБЪЕКТЫ).

Корень: структура

ОБЪЕКТЫ: *массив*

Объект: *структура*

имя: *текст, ключ*

СВОЙСТВА: *массив*

Свойство: *структура*

имя: *текст, ключ*

значение: *у-структура (текст | целое)*

ПОДОбЪЕКТЫ: *шаблон* \rightarrow *Корень*. ОБЪЕКТЫ

Литература

1. *Маклейн С.* Категории для работающего математика. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2004. 352 с.
2. *The univalent foundations program.* Homotopy type theory: univalent foundations of mathematics. Princeton, NJ: Institute for Advanced Study, 2013. 460 p.
3. *Чернышев Г. В.* К созданию информационных инструментальных средств поддержки представления знаний // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г. М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 8762–8772.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИИ СТЕПЕНЕЙ ЕДИНИЦЫ

Чуриков В. А.

Томский государственный университет, Томск, Россия; vachurikov@list.ru.

В дробном анализе на основе d -оператора, дифференцирования и интегрирования не являются однозначными операциями благодаря тому, что для каждого вещественного порядка s при операции интегро-дифференцирования появляется множество коэффициентов у производных и неопределенных интегралов, которые делают операции дифференцирования и интегрирования в общем случае многозначными. Этими коэффициентами являются комплексные числа, лежащие на комплексной плоскости и получаются как степени $1^{\mp s}$, где знак минус соответствует дифференцированию порядка s , а минус — интегрированию порядка s .

Если порядки интегро-дифференцирования s меняются, то их удобно расположить на вещественной декартовой оси. Такую ось будем называть *осью порядков*. Через каждую точку на оси порядков перпендикулярно ей будет проходить *комплексная плоскость* порядка $s - \zeta(s, x, y)$, на которой лежат все комплексные числа, удовлетворяющие равенству

$$s - \zeta(s, x, y) = 1^s.$$

Если значения s рациональные число, тогда $\zeta(s, x, y)$ будет иметь конечное число значений. Комплексную плоскость порядка s для рациональных порядков будем называть *рациональной плоскостью*. Если s иррациональное число, то в этом случае на соответствующей комплексной плоскости порядка s будет лежать бесконечное счетное множество точек, которые будут равномерно и плотно заполнять всю окружность радиуса 1 на данной комплексной плоскости. Комплексную плоскость порядка s для иррациональных порядков будем называть *иррациональной плоскостью*.

Окружность радиуса 1 на комплексной плоскости для значения s на оси порядков будем называть *окружностью решений порядка s* .

Рациональных плоскостей на оси порядков будет счетное множество, а иррациональных плоскостей множество мощности континуума. Это значит, что мощность множества всех точек $\zeta(s, x, y)$ для всех s есть мощность множества континуума на любом конечном отрезке на оси порядков.

Геометрически эти точки удовлетворяющие равенству $\zeta(s, x, y) = 1^s$, лежат на круговом цилиндре радиуса 1, осью которого является ось порядков. Такой цилиндр будем называть *цилиндром порядков*, а равенство $\zeta(s, x, y) = 1^s$ будем называть *уравнением степеней единицы*, а решениями этого уравнения будет функция $\zeta(s, x, y)$, которую назовем *функцией степеней единицы*.

Функция степеней единицы является показательной функцией с основанием 1, а множество решений уравнения степеней единицы на цилиндре порядков образуют множество точек, которые можно считать

равномерно, плотно и условно хаотично заполняющими цилиндр порядков. Точки на цилиндре порядков, не являющиеся решением уравнения степеней единицы, образуют сопряженное множество к множеству решений и образуют плотное множество мощности континуума, которое равномерно заполняет цилиндр порядков. Более того, в окружности радиуса 1 на комплексной плоскости для каждого иррационального порядка s точки, которые не являются решениями, образуют множество мощности континуума.

ГЕОИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА ПРОСТРАНСТВЕННОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТРЕХМЕРНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ

Шалая А. А.^{1,a}, Гура Д. А.^{1,2,b}, Дьяченко Р. А.^{1,c},
Косолапов П. А.^{1,d}

¹ *Кубанский государственный технологический университет*

² *Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, Россия*

^a *alinashalaya310303@mail.ru*, ^b *gda-kuban@mail.ru*, ^c *emessage@rambler.ru*,

^d *pawel.kosolapoff@gmail.com*

Геоинформационные системы (ГИС) являются важным инструментом для сбора, хранения, анализа и визуализации пространственных данных. ГИС играют важную роль в области планирования и развития территорий, мониторинге окружающей среды и во многих научных работах. Пространственный анализ – один из основных инструментов ГИС, который позволяет изучать и использовать пространственные данные для принятия решений и выполнения производственных задач. Так, например, в области трехмерного лазерного сканирования с помощью ГИС можно измерять расстояния, площади, объемы, а также определять координаты и высоты точек в пространстве [1].

Трехмерное лазерное сканирование представляет собой технологию, создающую точные и детальные 3D модели объектов. Преимущества трехмерного лазерного сканирования являются важным компонентом современных технологических исследований. ГИС предоставляют возможность создания высокоточных и точных трехмерных моделей поверхности земли и объектов на ней [2].

Наиболее распространенной областью применения лазерного сканирования является инженерное дело. С использованием трехмерного лазерного сканирования создаются точные 3D модели деталей и конструкций. Это помогает инженерам анализировать и оптимизировать проекты, а также контролировать качество изготовления моделей [3].

Пространственный анализ позволяет изучать и использовать пространственные данные с целью выявления закономерностей и принятия решений [4]. Методы ведения пространственного анализа используются для решения различных задач, таких как указание наиболее подходящих мест для новых объектов, оценка воздействия строительства на окружающую среду и т. д. [5].

ГИС является идеальным инструментом для проведения пространственного анализа на основе данных трехмерного лазерного сканиро-

вания благодаря своей способности собирать, хранить и анализировать пространственные данные [6].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Кубанского научного фонда в рамках научно-инновационного проекта № НИП-20.1/22.16.

Литература

1. Храмлиок А. К., Романова Т. А., Акопян Г. Т. Возможности, преимущества и недостатки наземного лазерного сканирования // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). 2019. № 2. С. 327–330.
2. Грибкова Л. А., Кононенко В. В., Дразецкий Д. А. Вm-технологии: преимущества, недостатки и возможности применения // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). 2021. № 4. С. 29–32.
3. Грибкова И. С., Питель Е. К. ГИС и современный опыт их применения // VIII Межд. научно-практическая конференция. 2013. С. 74–76.
4. Сужманюк А. С., Малый З. А., Дразецкий Д. А. Сканирующие технологии. Трехмерное лазерное сканирование // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). 2021. № 4. С. 183–187.
5. Рудик Е. А., Гура Д. А. Проведение топографической съемки с применением спутниковых систем и электронных тахеометров. Науки о земле на современном этапе // Материалы IV Международной научно-практической конференции. 2012. С. 118–120.
6. Грибкова И. С., Морозова Е. И. Перспективы применения ГИС для оценки современного состояния использования территорий // Электронный сетевой политематический журнал «Научные труды КубГТУ». 2017. № 11. С. 38–44.

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Шананин Н. А.

*Государственный университет управления, Москва, Россия;
nashanin@inbox.ru*

Пусть Ω – открытое множество в арифметическом пространстве \mathbb{R}^n . Из теоремы Ф. Джона (см. теорема 8.6.8 в [1]) следует, что равенство в точке $x^0 \in \Omega$ ростков двух решений $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ уравнения с постоянными коэффициентами $P(D)u = f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ влечет равенство их ростков во всех точках связной компоненты плоскости, порожденной сдвигами точки x^0 вдоль векторных полей ортогональных всем характеристическим ковекторам оператора $P(D)$ и содержащей точку x^0 . Ниже указан класс уравнений с комплексными вещественно аналитическими коэффициентами, решения которых обладают аналогичным свойством.

Старший символ линейного дифференциального оператора

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i^2 = -1, \quad (1)$$

определяет в каждой точке $x \in \Omega$ на кокасательном пространстве $T_x^*\Omega$ симметрическую m -линейную форму

$$\mathcal{F}_x(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m=1}^n \frac{\partial^m p_m}{\partial \xi_{j_1} \dots \partial \xi_{j_m}}(x, \xi) \eta_{j_1}^1 \dots \eta_{j_m}^m.$$

Предположим, что ядро $K_x(P) \subset T_x^*\Omega$ формы удовлетворяет условиям:

- 1) $\bigcup_{x \in \Omega} (x, K_x(P)) = \{(x, \xi) \mid p_m(x, \xi) = 0\}$;
- 2) коразмерность ядра $K_x(P)$ не зависит от точки $x \in \Omega$ и равна k .

В этом случае множество $\bigcup_{x \in \Omega} (x, K_x(P))$ образует подрасслоение $K(P)$ расслоения $T^*\Omega$ коразмерности k , которое в касательном расслоении $T\Omega$ индуцирует гладкое k -мерное подрасслоение:

$$L(P) = \{(x, \tau) \in T\Omega \mid x \in \Omega \text{ и } \xi(\tau) = 0 \forall \xi \in K_x(P)\}.$$

Через $\mathcal{L}(P)$ обозначим дифференциальную систему, порожденную $L(P)$, то есть подмодуль C^∞ – сечений подрасслоения $L(P) \subset T\Omega$ модуля C^∞ – сечений $T\Omega$ касательного расслоения $T\Omega$. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ порождает в C^∞ – модуле $T\Omega$ сечений касательного расслоения фильтрацию C^∞ –подмодулей \mathcal{H}^j , в которой первый элемент $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}(P)$, а последующие подмодули \mathcal{H}^{j+1} порождаются векторными полями из $\mathcal{L}(P)$ и коммутаторами векторных полей вида $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$. Дифференциальную систему \mathcal{L} называют неголономной, если найдется такое число r , что

$$\mathcal{L} = \mathcal{H}^1 \subsetneq \mathcal{H}^2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{H}^r = \mathcal{H}^{r+1} \subsetneq T\Omega.$$

Дополнительно к условиям (1) и (2) предположим, что:

- 3) дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ неголономна и подпространство $\mathcal{H}_x^r \subset T_x\Omega$ имеет размерность m , не зависящую от точки $x \in \Omega$, причем $k < m < n$.

В этом случае подмодуль \mathcal{H}^r является голономной дифференциальной системой и в силу теоремы Фробениуса через каждую точку $x^0 \in \Omega$ проходит максимальное связное интегральное подмногообразие $M_{\mathcal{H}^r, x^0}$.

Теорема 1. Пусть P – оператор вида (1) с аналитическими коэффициентами, удовлетворяющий условиям 1), 2) и 3), функции $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда из равенства ростков $u_{x^0}^1 \cong u_{x^0}^2$ в точке $x^0 \in \Omega$ следует $u_x^1 \cong u_x^2$ во всех точках x связной компоненты \mathcal{F}_{x^0} множества $M_{\mathcal{H}^r, x^0} \cap \{y \in \Omega \mid (Pu^1)_y \cong (Pu^2)_y\}$, содержащей x^0 .

Предположим теперь, что система $\mathcal{L}(P)$ является вполне неголономной, то есть выполнено условие:

$$3') \mathcal{L} = \mathcal{H}^1 \subsetneq \mathcal{H}^2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{H}^r = T\Omega.$$

Тогда решения уравнений $Pu = f$, оператор P в которых удовлетворяет условиям 1), 2) и 3'), однозначно определяются по ростку решения в точке в каждой связной компоненте множества Ω .

Теорема 2. Пусть P – оператор вида (1) с аналитическими коэффициентами, удовлетворяющий условиям 1), 2) и 3'), $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и функции $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ удовлетворяют уравнению $Pu = f$.

Тогда из равенства ростков $u_{x^0}^1 \cong u_{x^0}^2$ в точке $x^0 \in \Omega$ следует, что $u^1 = u^2$ во всех точках связной компоненты Ω_{x^0} множества Ω , содержащей x^0 .

В качестве примера уравнения, удовлетворяющего условиям 1), 2) и 3'), можно привести уравнение

$$(D_1^2 + (D_2 - x_1 D_3)^2 + \sum_{j=1}^3 a_j(x) D_j + a_0(x)) u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

в котором $a_j(x)$ – аналитические в \mathbb{R}^3 функции $j = 0, 1, 2, 3$ и $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Из последней теоремы следует, что любые два решения уравнения, равные в окрестности некоторой точки, равны во всем пространстве.

Доказательства утверждений теорем можно найти в статье [2].

Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов. Т. 1. М.: Мир, 1986. 464 с.
2. Шананин Н. А. О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами // Матем. заметки. 2022. Т. 111, № 6. С. 921–928.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В СМЕШАННОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ, КОГДА УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА БОЛЬШЕ ЕДИНИЦЫ

Шерматова Х. М.

*Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
hilola-1978@mail.ru*

В этом сообщении ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \right) (Lu) = 0 \quad (1)$$

в треугольной области G плоскости xOy , где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in G_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in G_i \quad (i = 2, 3, 4), \end{cases}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $\gamma = b/a$, $1 < \gamma < +\infty$, а $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3$, здесь G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $B_0(1, 1)$, $A_0(0, 1)$; G_2, G_3 и G_4 – треугольники с вершинами в точках $A, B, C(1/2, -1/2)$; $A, D(-1, 1), A_0$ и $B, E(2, 1), B_0$ соответственно; $J_1,$

J_2 и J_3 – открытые отрезки с вершинами в точках A, B ; A, A_0 и B, B_0 соответственно.

Эта работа является продолжением работы [1]. В работе [1] поставлен один класс краевых задач для уравнения (1) при произвольных постоянных коэффициентах $a, b, c \in R$ и исследован случай 1° ($a \neq 0, b = 0$). В работах [2, 3] исследован случай 2° ($a = 0, b \neq 0$), а в этой работе ставится задача для случая 7° при $1 < \gamma < +\infty$. Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача. Требуется найти функцию $u(x, y)$, которая: 1) непрерывна в замкнутой области \overline{G} и в области $G \setminus J_1 \setminus J_2 \setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны в G вплоть до части границы области G , указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G \setminus J_1 \setminus J_2 \setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} u|_{AC} &= \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2, & \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AC} &= \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{BC} &= \psi_3(x), \quad 1/2 \leq x \leq 1, & u|_{DF_1} &= \psi_4(x), \quad -1 \leq x \leq -1/2, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AD} &= \psi_5(x), \quad -1 \leq x \leq 0, & u|_{A_0D} &= f_1(x), \quad -1 \leq x \leq -0, \\ u|_{B_0E} &= f_2(x), \quad 1 \leq x \leq 2, & u|_{EF_2} &= \psi_6(x), \quad 3/2 \leq x \leq 2, \\ & & \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{BE} &= \psi_7(x), \quad 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

и 4) следующим условиям склеивания:

$$\begin{aligned} u(x, +0) &= u(x, -0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_y(x, +0) &= u_y(x, -0) = \nu_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_{yy}(x, +0) &= u_{yy}(x, -0) = \mu_1(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(+0, y) &= u(-0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u_x(+0, y) &= u_x(-0, y) = \nu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u_{xx}(+0, y) &= u_{xx}(-0, y) = \mu_2(y), \quad 0 < y \leq 1, \\ u(1+0, y) &= u(1-0, y) = \tau_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u_x(1+0, y) &= u_x(1-0, y) = \nu_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u_{xx}(1+0, y) &= u_{xx}(1-0, y) = \mu_3(y), \quad 0 < y \leq 1. \end{aligned}$$

Здесь ψ_i ($i = \overline{1, 7}$), f_j ($j = \overline{1, 2}$) – заданные достаточно гладкие функции, а τ_i, ν_i, μ_i ($i = \overline{1, 2, 3}$) – неизвестные пока достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямой $x + y = 0$ или $x - y = 1$, $F_1(-1/2, 1/2)$, $F_2(3/2, 1/2)$.

Теорема. Если $\psi_1 \in C^3 [0, 1/2]$, $\psi_2 \in C^2 [0, 1/2]$, $\psi_3 \in C^2 [1/2, 1]$, $\psi_4 \in C^3 [-1, -1/2]$, $\psi_5 \in C^2 [-1, 0]$, $\psi_6 \in C^3 [3/2, 2]$, $\psi_7 \in C^2 [1, 2]$, $f_1 \in C^3 [-1, 0]$, $f_2 \in C^3 [1, 2]$, причем выполняются условия согласования $f_1(-1) = \psi_4(-1)$, $\psi_5(0) = \psi_2(0)$, $\psi_3(1) = \psi_7(1)$, $f_2(2) = \psi_6(2)$, $\psi'_2(1/2) = -\psi'_3(1/2)$, то задача допускает единственное решение.

Теорема доказывается методом построения решения. Здесь мы даем лишь идею доказательства этой теоремы. Для этого уравнение (1) переписем в виде уравнения второго порядка с правой неизвестной частью. Пользуясь краевыми условиями, находится эта неизвестная часть. С помощью краевых условий и условий склеивания получаются несколько соотношений для неизвестных функций (следов решения задачи). Решая эту систему, находим эти следы, тем самым и решение задачи.

Литература

1. *Мамажонов М., Шерматова Х. М.* О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа // Научный вестник Наманганского государственного университета. 2022. № 2. С. 41–51.
2. *Мамажонов М., Шерматова Х. М.* Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2022. Т. 25, № 3 (91). С. 93–103.
3. *Matajonov M., Shermatova H. M.* On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines // Journal of applied and industrial mathematics. 2022. Vol. 16, no. 3. Pp. 481–489.

КРИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Шитикова М. В.

*Национальный исследовательский Московский государственный
строительный университет, Москва
Воронежский государственный технический университет, Воронеж,
Россия; mvs@vgasu.vrn.ru*

Как в России, так и за рубежом, за последние сорок лет появилось много работ, касающихся проблем дробного исчисления, в которых не только предлагаются новые модели вязкоупругих сред с дробными производными и интегралами, но также решаются конкретные задачи прикладного характера [1–3]. Дробное исчисление в последние годы также с успехом используется в строительной механике, термоупругости, биомеханике, теории разрушения, гидромеханике. Весьма бурно развиваются также численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений дробного порядка. Однако, среди них можно увидеть и публикации, в которых использование дробных производных приводит к

искажению физического смысла рассматриваемой задачи, например, к нарушению законов термодинамики или различной размерности слагаемых, входящих в дифференциальные уравнения дробного порядка.

Так, в обзорной статье [2] отмечалось, что некоторые исследователи вводят в уравнениях движения в описание силы инерции производные дробного порядка по времени от перемещения вместо традиционной производной второго порядка наряду с описанием сил сопротивления внешней среды при помощи дробных производных. Было показано, что поведение корней характеристических уравнений при такой постановке лишено физического смысла. К тому же совершенно непонятно, каким образом можно экспериментально определить порядок дробной производной для силы инерции, то есть провести калибровку параметра дробности для инженерных расчетов.

С нашими представлениями о подобных задачах с «дробной силой инерции» согласуется критика, приведенная в [4–5] при анализе задачи о свободном падении тела в атмосфере на основе дробно-дифференциального аналога уравнения Ньютона. Отмечается проблема размерности коэффициента при силе инерции, так как она не совпадает с размерностью массы, что заставляет искать новые формулы для импульса, кинетической энергии и связанных с ними динамических переменных. Другими словами, была показана несостоятельность попытки построить дробный аналог механики Ньютона путем введения дробной скорости и дробного импульса.

Таким образом, при решении прикладных задач следует особо обращать внимание на параметры, входящие в рассматриваемые уравнения дробного порядка, и размерности слагаемых, чтобы избежать искажения физического смысла задачи.

Литература

1. *Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.* Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // *Applied Mechanics Reviews*. 1997. Vol. 50, no. 1. Pp. 15–67.
2. *Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.* Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results // *Applied Mechanics Reviews*. 2010. Vol. 63, no. 1. Pp. 1–52.
3. *Шитикова М. В.* Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2022. № 1. С. 3–40.
4. *Учайкин В. В.* Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2019. Т. 27. Вып. 1. С. 5–40.
5. *Учайкин В. В.* О дробно-дифференциальном уравнении Лиувилля как уравнении динамики открытой системы // *Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика*. 2014. № 25. С. 58–67.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОЕКТИРОВАНИИ И СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Щенявская Л. А.^а, Олейникова Л. А.^б

*Кубанский государственный технологический университет, Краснодар,
Россия; ^а lyudmela2311@mail.ru, ^б oleynikova.lily@gmail.com*

В настоящее время информационные технологии (ИТ) развиваются и внедряются в различные отрасли. В научной литературе все чаще упоминается об использовании ИТ в целях повышения качества образования [1], организации управления экономикой, управления технологическими процессами, математической обработки и анализе данных в геодезии [2], разработки различной документации [3]. Несомненно, все отрасли нуждаются в развитии и без применения информационных технологий будет сложно добиться желаемого результата.

Необходимо отметить как начала развиваться сфера строительства благодаря внедрению современных ИТ, позволяющих изменять характеристики эксплуатации объектов недвижимости в лучшую сторону. Такой технологией является информационное моделирование зданий [4], благодаря которому решаются как экономические, так и технологические задачи рабочего проекта.

ВІМ (Building Information Modeling) – информационное моделирование зданий, в процессе которого есть возможность получить определенную модель и обработанную информацию будущего здания на каждом этапе его строительства [5]. Использование компаниями технологии ВІМ позволяет им получать высокое качество выполненных работ, ведь данная технология позволяет заранее попробовать, оценить и проанализировать риски различных решений до начала строительных работ, так как модель является виртуальным прототипом выполняемых задач [4].

Благодаря переходу на современные технологические решения появляется возможность повышения производительности и качества строительства, при этом появляется возможность экономии бюджета за счет отказа от привлечения посторонних специалистов для аутсорсинга [6].

Литература

1. *Гура А. Ю.* Роль интерактивных методов обучения в процессе преподавания дисциплины «Геодезия» // Астраханский вестник экологического образования. 2023. Т. 1, № 3(75). С. 146–151.
2. *Гордеев В. А.* Математическая обработка и анализ точности геодезических измерений. Краснодар: Кубанский государственный технологический университет, 2022. 178 с.
3. *Вербицкий М. В.* Перспективы использования экспертных систем при разработке градостроительной документации: Девелопмент и инновации в строительстве: Сборник статей Международного научно-практического конгресса. Краснодар: ООО «ОМЕГА САЙНС», 2018. С. 48–51.
4. *Грибкова И. С.* Обзор программного обеспечения для использования ВІМ моделей // Электронный сетевой политехнический журнал «Научные труды КубГТУ». 2018. № 2. С. 211–221.

5. Гура Т. А. Использование BIM технологий в строительстве и проектировании // Электронный сетевой политематический журнал «Научные труды КубГТУ»: 2018. № 2. С. 272–284.
6. Гура Т. А. Проектирование генерального плана в bim: экологические, инженерно-экономические, правовые и управленческие аспекты развития строительства и транспортной инфраструктуры // Сборник статей Международной научно-практической конференции. Краснодар: Кубанский государственный технологический университет. 2017. С. 65–68.

БИХЕВИОРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ВОЗРАСТНОЙ АККУМУЛЯЦИИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К РЕКОНСТРУКЦИИ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ НАСЕЛЕНИЯ

Эдиев Д. М.

*Северо-Кавказская государственная академия, Черкесск, Россия; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
International institute for applied systems analysis, Laxenburg, Austria
ediev@ncsa.ru*

Традиционные подходы к возрастной аккумуляции [1] ограничены методами сглаживания, что может быть проблематично в случаях, когда возрастная структура населения одновременно проявляет как возрастную аккумуляцию, так и реальную информативную изменчивость по возрасту. Предлагается альтернативный подход моделирования механизма возрастной аккумуляции на основе обобщения и модификации ранее предложенной модели [2], в которой склонность к округлению возраста зависит от расстояния до округленного возраста и силы возрастной аккумуляции в этом возрасте:

$$N_x = N_x^* + \sum_y (k_x p_y^x N_y^* - k_y p_x^y N_x^*), \quad (1)$$

где N_x – наблюдаемая численность населения в возрасте x лет, N_x^* – (истинное) значение численности населения, которое наблюдалось бы в отсутствие возрастной аккумуляции, k_x – сила аккумуляции в «круглом» возрасте x лет, и $p_y^x = f_X(x - y)$ – параметры, определяющие структуру аккумуляции возрастов (X обозначает тип «круглых» возрастов, в которых происходит аккумуляция, к которому относится возраст x); произведение $k_x p_y^x$ дает долю людей возраста y , заявивших возраст x . Предлагается использовать масштабирующее соглашение: $\sum_y p_y^x = 1$.

Общая структура модели позволяет, в частности, изучать случаи с нетипичной двадцатиричной аккумуляцией возрастов, характерной для горских народов Кавказа [3].

Для заданного набора параметров k и p система линейных уравнений (1) может быть решена в векторно-матричной форме для градуирования возрастной структуры населения:

$$N = (E + G)N^* \Rightarrow N^* = (E + G)^{-1}N,$$

$$\text{где } G = \begin{bmatrix} -\sum_y k_y p_0^y & k_0 p_1^0 & k_0 p_2^0 & \dots & k_0 p_X^0 \\ k_1 p_0^1 & -\sum_y k_y p_1^y & k_1 p_2^1 & \dots & k_1 p_X^1 \\ k_2 p_0^2 & k_2 p_1^2 & -\sum_y k_y p_2^y & \dots & k_2 p_X^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_X p_0^X & k_X p_1^X & k_X p_2^X & \dots & -\sum_y k_y p_X^y \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_X \end{bmatrix},$$

$N^* = (N_0^*, N_1^*, N_2^*, \dots, N_X^*)^T$, E – единичная матрица.

Для нахождения параметров склонности к округлению возраста в модели используется процедура оптимизации, которая максимизирует плавность градуированной возрастной структуры N^* :

$$L = \|N^* - A\| = (N^* - A)^T (N^* - A) \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $A = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_X)^T$ – эталонное население с плавной и без аккумуляции возрастной структурой. В качестве эталона A используется сглаживающая сплайн-функция, примененная к исходному населению N .

Модель апробирована в сравнении с традиционными альтернативами на обширном эмпирическом материале. Для решения задачи оптимизации (2) предложен алгоритм на основе аппарата обобщенной обратной матрицы, который является более простым и устойчивым по сравнению с ранее предложенным методом оптимизации. В эмпирическом тестировании метод демонстрирует лучшую эффективность как в удалении аккумуляции, так и в сохранении информативной изменчивости населения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 18-01-00289 «Математические модели и методы устранения искажений показателей смертности и продолжительности жизни престарелого населения».

Литература

1. Shryock H. S., Siegel J. S. The methods and materials of demography. Washington D.C.: United States Bureau of the Census, 1973. 888 p.
2. Эдиев Д. М. Демографические потери депортированных народов СССР. Ставрополь: Изд-во СтГАУ «АГРУС», 2003. 336 с.
3. Эдиев Д. М. Возрастная аккумуляция как источник данных о традиционных системах счисления народов Кавказа: Народы Кавказа в XVIII–XXI вв.: история, политика, культура. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮНЦ РАН, 2022. С. 120–126.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С РАЗЛИЧНЫМИ НАЧАЛАМИ

Энеева Л. М.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; eneeva72@list.ru*

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^\alpha \partial_{1x}^\alpha u(x) - q(x)u(x) = f(x) \quad (0 < \alpha < 1), \quad (1)$$

где D_{0x}^α и ∂_{1x}^α — дробные производные порядка α в смысле Римана–Лиувилля с началом в точке $x = 0$, и в смысле Герасимова–Капуто с началом в точке $x = 1$, соответственно [1]; $q(x)$ и $f(x)$ — заданные функции; $x \in]0, 1[$.

Использование понятия эффективной скорости изменения параметров при моделировании различных физических систем приводит к уравнениям, содержащим композицию производных дробного порядка с различными началами [2, 3]. В частности, уравнения вида (1) возникают при моделировании диссипативных колебательных систем. Вопросы теории уравнения (1) рассматривались в [4, 5] (см. также библиографию этих работ).

В данной работе рассматривается задача: *найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(1) = a, \quad \int_0^1 \omega(x)u(x) dx = b, \quad (2)$$

где $\omega(x) \in L[0, 1]$, $\omega(x) \not\equiv 0$.

Найдены условия, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1), (2), доказано неравенство Ляпунова. Также, показано, что нарушение одного из найденных условий приводит к неединственности решения исследуемой задачи.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Рехвиашвили С. Ш.* К определению физического смысла дробного интегродифференцирования // *Нелинейный мир*. 2007. Т. 5, № 24. С. 194–197.
3. *Рехвиашвили С. Ш.* Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // *Письма в ЖТФ*. 2004. Т. 30, № 2. С. 33–37.
4. *Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S.* Ordinary differential equation with left and right fractional derivatives and modeling of oscillatory systems // *Mathematics*. 2020. No. 8(12) P. 2122.
5. *Энеева Л. М.* Решение смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2022. Т. 40, № 3. С. 64–71.

РАЗРАБОТКА МОДУЛЯ ПРЕДОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕТОДОМ ПОИСКА В ШИРИНУ ДЛЯ СИСТЕМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ КОЖНЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ НА ОСНОВЕ МУЛЬТИАГЕНТНОЙ НЕЙРОКОГНИТИВНОЙ АРХИТЕКТУРЫ

Энес А. З.^a, Хажметов М. В.^b, Бжихатлов К. Ч.^c,
Канкулов С. А.^d

Кабардино-Балкарский научный центр РАН, Нальчик, Россия
^aahmedenes@mail.ru, ^bmurathazhmetov@mail.ru, ^chaosit13@mail.ru,
^dskankulov@mail.ru

Редактор мультиагентной нейрокогнитивной архитектуры представляет собой программный комплекс автоматизированного проектирования интеллектуальных систем принятия решений. Мультиагентные нейрокогнитивные архитектуры представляют абстрактную модель самоорганизации мозга, предполагающая автоматическую интерпретацию объектов с использованием интеллектуальных агентов. Для реализации распознавания объектов необходима некоторая предварительная обработка кадра, которая позволит передать описание кадра в редактор. Для этого применяется сегментация изображения, то есть разделение исходного изображения на составляющие его области. Задача сегментации заключается в изменении представления изображения, для дальнейшей обработки в мультиагентной архитектуре [1, 2].

Цель исследования – разработка модуля сегментации изображения для редактора мультиагентной нейрокогнитивной архитектуры и оценка его применимости для распознавания кожных заболеваний.

Задачи исследования:

- разработать программную реализацию сегментации изображения для редактора мультиагентных нейрокогнитивных архитектур;
- реализовать возможность обработки агентами сигнатур, полученных от модуля распознавания;
- экспериментально проверить возможность описания полученных сигнатур с использованием мультиагентной нейрокогнитивной архитектуры.

Алгоритм обработки изображения в мультиагентной нейрокогнитивной архитектуре. Использование системы концептуальных агентов, порождаемых по требованию в ситуативно-обусловленном контексте, позволяет после соответствующего обучения распознавать входные события и строить их описание на основе мультиагентного представления некоторого факта об объектах реальной среды. В частности, в результате обработки сигнатуры появляется набор событий: «точка 1 принадлежит линии 1», «линия 1 принадлежит области 1» «область 1 состоит из 10 линий», «линия 1 соприкасается с линией 2 в точке 1 под углом 45» и т. д. [3, 4].

Рассмотренный выше набор событий, описывающий захваченное с камеры изображение передается на следующие слои мультиагентной архитектуры. При этом каждый кадр отправляется на слой, который содержит агентов-объектов, каждый из которых имеет набор мультиагент-

ных контрактов с множеством событий. Если по набору входящих сообщений агент-объект может идентифицировать себя — он отправляет информацию об этом своим контрактам, иначе мультиагентная фабрика создает нового агента, отвечающего за нераспознанные элементы на изображении. Подобный подход, наряду с динамически изменяющимися коэффициентами корреляции мультиагентных контрактов, позволит связывать между собой визуальные образы и агенты, отвечающие за репрезентацию обнаруженного объекта в мультиагентной архитектуре.

Экспериментальная оценка модуля сегментации. Описанный алгоритм реализован на языке программирования C++. Для отправки сигнатур в мультиагентную систему принятия решений использовался протокол TCP/IP. Сегментация выполняется в цветовом пространстве RGB. Затем, после того как границы областей определены, границы накладываются на исходное изображение. Вокруг каждой области строятся кривые линий. Для тестирования системы предварительной обработки в программу было загружено изображение кожного заболевания (Кольцевидная эритема).

После генерации полного агент-ориентированного описания объектов на изображении мультиагентная нейрокогнитивная архитектура выдает сведения об имеющихся в ее представлении и присутствующих на изображении объектах и их пространственных отношениях.

Литература

1. *DeSouza G. N., Kak A. C.* Vision for mobile robot navigation: A survey // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2002. Vol. 24, no. 2. Pp. 237–267.
2. *Davison A. J., Reid I. D., Molton N. D., Stasse O.* MonoSLAM: Real-time single camera SLAM // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2007. Vol. 29, no. 6. Pp. 1052–1067.
3. *Torralba A., Murphy K. P., Freeman W. T., Rubin M. A.* Context-based vision system for place and object recognition // Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. 2003. Pp. 273–280.
4. *Se S., Lowe D., Little J.* Mobile robot localization and mapping with uncertainty using scale-invariant visual landmarks // International Journal of Robotics Research. 2002. Vol. 21, no. 8. Pp. 735–758.

**К ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ
РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В МЛАДШИХ
ЧЛЕНАХ**

Эфендиев Б. И.

*Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия; beslan_ efendiev@mail.ru*

В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) - q(x) \int_0^{\beta} D_{0x}^{\alpha} [p(x)u(x)] d\mu(\alpha) = f(x), \quad 0 < \beta < 1, \quad (1)$$

где D_{0x}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля порядка α [1]; $p(x)$, $q(x)$, $\mu(\alpha)$, $f(x)$ – заданные функции, $u(x)$ – искомая функция.

Регулярным решением уравнения (1) в интервале $]0, l[$ назовем функцию $u(x)$, принадлежащую классу $C[0, l] \cap C^2]0, l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x \in]0, l[$.

В данной работе для уравнения (1) исследуются начальная и краевые задачи.

Литература

1. *Нахушев А. М.* О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Доклады АН СССР. 1988. Т. 300. С. 796–799.

**ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО
ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И С ОПЕРАТОРОМ
БЕССЕЛЯ**

Юлбарсов Х. А.

*Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
yulbarsovxojiakbar1@gmail.com*

Дифференциальные уравнения с дробными производными естественным образом возникают в ряде областей науки, таких как физика, инженерия, биофизика, явления кровотока, аэродинамика, электронно-аналитическая химия, биология, теория управления и т. д. Более подробную информацию о таких уравнениях можно найти в работах [1–4].

Псевдопараболические уравнения с дробными производными возникают при описании процессов фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде, фильтрации жидкости в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещины, переноса почвенной влаги в зоне с учетом ее движения против потенциала влажности [4–7]. В связи с этим

возникает необходимость исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными и разработки методов их решения.

В данной работе изучается первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с дробными производными Капуто.

1. Определение дробных производных и интегралов. Введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего исследования.

Определение 1. Дробным дифференциальным оператором Капуто D_t^β порядка β , $0 < \beta \leq 1$ для дифференцируемой функции f называется оператор, определенный выражением [3, 4]:

$$D_t^\beta [f(x)](t) = I[f'(t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t f'(t) (t-\tau)^{-\beta} d\tau, & 0 < \beta < 1, \\ f'(t), & \beta = 1, \end{cases}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция.

Определение 2. Дробным интегральным оператором Римана–Лиувилля $D_{0t}^{-\beta}$ порядка β , $0 < \beta \leq 1$ для интегрируемой функции f называется оператор, определенный выражением [3, 4]:

$$D_{0t}^\beta f(t) = I^\beta [f(t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t f(t) (t-\tau)^{\beta-1} d\tau, & 0 < \beta < 1, \\ \int_0^t f(\tau) d\tau, & \beta = 1, \end{cases}$$

Определение 3. Двухпараметрическая функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ определяемая формулой [3]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

называется функцией Миттаг-Леффлера.

2. Постановка задачи и основной результат. В области

$$\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$$

рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^\beta u - D_t^\beta B_p^x u - B_p^x u = 0, \tag{1}$$

$$0 < \beta \leq 1, p = \alpha - 1/2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\beta} u_x(x, t) = u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция, $B_p^x \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{\partial}{\partial x}$ – оператор Бесселя.

Здесь D_t^β – дробная производная Капуто порядка β ($0 < \beta \leq 1$).

Определение 4. Классическим решением задачи (1)–(3) в Ω_T назовем функцию $u = u(x, t)$ из класса $D_t^\beta u(x, t) \in C(\Omega_T)$, $D_t^\beta B_p^x u(x, t) \in C(\Omega_T)$, $B_p^x u(x, t) \in C(\Omega_T)$, которая удовлетворяет уравнению (9) при всех $u(x, t)$, начальному условию (2) при всех $x \in [0, 1]$, и краевым условиям (3) при всех $t \in [0, T]$.

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$, $\varphi'''(x) \in L_1(0, 1)$, и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение. Это решение представимо в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_\alpha \left(\frac{\sigma_n^2}{1 + \sigma_n^2} t^\alpha \right) x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x),$$

$$\text{где } \varphi_n = \frac{2}{J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)} \int_0^1 \varphi(x) x^{1/2+\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x) dx.$$

Литература

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J. Teory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204, 2006.
2. Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: John Wiley, 1993.
3. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego, New York, London: Academic Press, 1999.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. Джарбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966. 672 с.
6. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2003. 272 с.
7. Учайкин В. В. Методы дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

**DIRECT AND INVERSE PROBLEMS
FOR A PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION
WITH THE NONLINEAR LOADS**

Abdullayev O.

Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan; obidjon.mth@gmail.com

This work devoted to direct and inverse problems for parabolic-hyperbolic equation fractional order involves non-linear loaded terms. The fractional part of considered equation will be defined through the Riemann–Liouville time fractional derivative D_{0t}^α of order $0 < \alpha < 1$.

We consider the equation

$$f(x, t) = \begin{cases} u_{xx} - D_{0t}^\alpha u + p_1(x, t, z_1(x)), & \text{at } t > 0, \\ u_{xx} - u_{tt} + p_2(x, t, z_2(x)), & \text{at } t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $z_i(x) = \lim_{(-1)^{i-1}t \rightarrow +0} D_{0t}^{(2-j)(\alpha-1)} u(x, t)$, D_{at}^α is Riemann–Liouville differential operator of fractional order α , ($0 < \alpha < 1$) [1, 2], and $p_i(x, t, z)$ ($i = 1, 2$) (non-linear loaded parts of equation (1)),

$$f(x, t) = \begin{cases} f_1(x, t), & \text{for } (x, t) \in \Omega_1, \\ f_2(x, t), & \text{for } (x, t) \in \Omega_2, \end{cases}$$

are given functions, and that $f_i(x, t) \in C(\Omega_i)$ ($i = 1, 2$), $t^{1-\alpha} p_1(x, t, z) \in C(\bar{\Omega}_1 \times R)$, $p_2(x, t, z) \in C(\bar{\Omega}_2 \times R)$.

Let Ω is domain bounded with segments:

$$A_1 A_2 = \{(x, t) : x = l, 0 < t < h\}, \quad B_1 B_2 = \{(x, t) : x = 0, 0 < t < h\},$$

$B_2 A_2 = \{(x, y) : t = h, 0 < x < l\}$ at $t > 0$ and by characteristics $B_1 C : x + t = 0$, $A_1 C : x - t = l$ of equation (1), at $t < 0$.

We enter designations $\Omega_1 = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{t < 0\}$ and $I = \{(x, t) : t = 0, 0 < x < l\}$.

Direct Problem. To find a function $u(x, t)$ for equation (1) in domain $\Omega \setminus I$, with the following properties:

1. $u(x, t) \in W_1$, where $W_1 = \{u : D_{0t}^{\alpha-1} u \in C(\bar{\Omega}_1), u \in C(\bar{\Omega}_2) \cap C^2(\Omega_2), u_{xx} \in C(\Omega_1), u_t \in C(\Omega_2 \cup I), D_{0t}^\alpha u \in C(\Omega_1 \cup I)\}$,
2. $u(x, t)$ satisfies boundary conditions

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq h, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u(\Theta(x)) &= a_1(x) u_y(x, -0) + a_2(x) u_x(x, -0) + \\ &+ a_3(x) u(x, -0) + a_4(x), \quad 0 < x < l, \end{aligned} \quad (3)$$

and matching gluing conditions:

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{1-\alpha} u(x, t) = \mu u(x, -0), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{1-\alpha} (t^{1-\alpha} u(x, t))_t = \lambda u_t(x, -0) + r(x, u(x, -0)), \quad 0 < x < l, \quad (5)$$

where $\Theta(x) = \Theta\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right)$, $\mu, \lambda = \text{const} \neq 0$ and $r(x, z)$, $a_i(x)$, $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2$) are given functions, besides

$$t^{1-\alpha}\varphi_1(t), t^{1-\alpha}\varphi_2(t) \in C[0, h], \quad a_1(x), a_2(x) \in C[0, l] \cap C^1(0, l),$$

$$a_3(x), a_4(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l), \quad r(x, z) \in C([0, l] \times R) \cap C^1((0, l) \times R).$$

We assume, that

$$f(x, t) = \begin{cases} f(x)g_1(t), & \text{for } (x, t) \in \Omega_1, \\ f(x)g_2(t), & \text{for } (x, t) \in \Omega_2, \end{cases}$$

where $g_i(t)$ ($j = 1, 2$) are given functions.

Inverse Problem. To find a pair of functions $\{u(x, t), f(x)\}$ for equation (1) in $\Omega \setminus I$, with the following properties:

1. $f(x) \in C(0, l) \cap L_1(0, l)$;
2. $u(x, t) \in W_2$ satisfies boundary (2), (3) and gluing conditions (4), (5), moreover following additional condition

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial n} \Big|_{y=x} = \psi_1(x), \quad 0 < x \leq \frac{l}{2}; \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} \Big|_{y=x-l} = \psi_2(x), \quad \frac{l}{2} \leq x < l;$$

where $W_2 = W_1 \cap W_0$, $W_0 = \{u : u \in C^1(\overline{\Omega}_2 \setminus \overline{I})\}$, $\psi_j(x)$ ($j = 1, 2$), are given functions, besides

$$\psi_1(x) \in C\left[0, \frac{l}{2}\right] \cap C^1\left(0, \frac{l}{2}\right), \quad \psi_2(x) \in C\left[\frac{l}{2}, l\right] \cap C^1\left[\frac{l}{2}, l\right).$$

Under certain conditions on the given functions, constants μ and l , the unique solvability of the formulated problems are proved. Unique solvability are proved by the method of integral equations using the principle of compressed mappings.

References

1. Podlubny I. Fractional differential equations. Mathematics in Sciences and Engineering. San Diego: Academic Press, 1999. 198 p.
2. Samko S. G., Kilbas A. A. and Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. Yverdon: Gordon and Breach, 1993.

MATH MODELING FIBER-OPTIC MICROTRANSDUCER OF ROTATION ANGLE

Aksyonov A. M.^a, Murashkina T. I.^b, Kukushkin A. N.^c

Penza state university, Penza, Russia

^asandroaksyonov@gmail.com, ^btimurashkina@mail.ru, ^ckukushkin.97@mail.ru

Scientists distinguish several types of oral and maxillofacial pathologies (OMP) caused by abnormalities of bone structures, muscular and cartilage tissues, and oncological diseases [1]. Such anomalies may be caused by lesions

of the temporo-mandibular joints, diseases and injuries, or genetic lesions of the facial nerve. The nature of some diseases causing maxillofacial pathologies is still unknown.

The task is to increase the reliability of OMP determination by introducing diagnostic systems based on modern safe measuring instruments, in particular fiber-optic ones, into medical practice [2, 3].

The article considers the sequence of mathematical modeling of a fiber-optic reflective angle transducer for diagnostic systems of maxillofacial pathologies. The conversion function of the measuring transducer is derived. The input parameter is the angle of rotation of the reflecting plate α in the form of a half-cylinder, and the output parameter is the intensity of the light flux, determined by the area $S'(\alpha)$ through which this flux is transported

$$S'(\alpha) = \frac{2R_s(x)d_c}{8}(\pi - \phi - \sin(\phi)), \quad (1)$$

where d_c – core diameter of the optical fiber and ϕ is defined by the expression

$$\phi = 2 \arcsin \left(2 \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi R \alpha}{180}\right)^2 + \left(\frac{d_c}{2}\right)^2}}{d_c} \sin \left(\arctan \left(\frac{90 d_c}{\pi R \alpha} \right) - \arctan \left(\frac{d_c}{\pi R} \right) \right) \right). \quad (2)$$

Here R – radius of curvature of the reflecting plate.

R_s is determined by the expression

$$2R_s = d_c - \frac{(2x \cot(\psi) - d_c) \sin(4\psi)}{2 \cot(\psi) \cos(\theta_{NA} - 2\psi) \cos(\theta_{NA} - 6\psi)}, \quad (3)$$

where $\psi = \arcsin \left(\frac{d_c}{2R} \right)$.

Based on the analytical expression of the conversion function, its graph is plotted. In conclusion, it's noted that the conversion function is close to linear.

References

1. *Guitar O. S., Mitin N. E., Ustyugova A. E., Sorokina M. A.* Etiological factors contributing to defects and deformations of the maxillofacial region // Models, systems, networks in economics, technology, nature and society. 2015. No. 4. Pp. 91–97.
2. *Badeeva E. A., Murashkina T. I., Serebryakov D. I., Vasilyev Y. A., Khasan-shina N. A., Slavkin I. E.* Fiber-optic diagnostic system of maxillofacial anomalies based on pressure sensors // Materials of V International Conference “Modern neurocybernetic technologies in rehabilitation and development of human cognitive abilities”. 2020. Pp. 90–95.
3. *Kukushkin A. N., Murashkina T. I., Badeeva E. A., Serebryakov D. I., Vasiliev Yu. A.* Modernized fiber-optic tilt sensor for determination of maxillofacial pathologies // Proceedings of XIX International Scientific and Practical Conference “Innovation, information and communication technologies”. 2022. Pp. 208–212.

**APPLICATION OF THE FRACTIONAL POWER SERIES TO SOLVING
SOME FRACTIONAL EMDEN–FOWLER TYPE EQUATIONS**

Antonov N. A.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; antonovna@my.msu.ru

Fractional differential equations have already proved to be valuable tools to the modelling of many physical phenomena [1–4]. There are many techniques for solving fractional differential equations, in particular, RFPS method (residual fractional power series), which allows us to obtain solutions to initial value problems for Emden–Fowler type equations in the form of fractional power series [5]. These equations have many applications in the fields of radioactivity cooling and in the mean-field treatment of a phase transition in critical adsorption, kinetics of combustion or reactants concentration in chemical reactor and isothermal gas spheres and thermionic currents [6, 7].

Definition 1 ([4]). For $\mu \in \mathbb{R}$ the space C_μ is the space of functions f given on the half-axis $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ and represented in the form $f = x^p f_1$ for some $p > \mu$, where the function f_1 is continuous on \mathbb{R}_+ :

$$C_\mu = \{f : f = x^p f_1, \quad f_1 \in C(\mathbb{R}_+), \quad \text{for some } p > \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Similarly, the space C_μ^n is the space of functions f given on the half-axis \mathbb{R}_+ , such that $f^{(n)} \in C_\mu$.

Definition 2. For given $x_0 \geq 0$ the α order Caputo fractional derivative of function $f \in C_{-1}^n$, such that $f^{(n)}|_{x=x_0} = 0$, where $\alpha \in [n, n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$, is defined by

$${}_{x_0}^C D_x^\alpha f \equiv \frac{1}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \int_{x_0}^x (x - t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) dt$$

or, respectively,

$${}_{x_0}^C D_x^n f \equiv f^{(n)}(x).$$

Definition 3 ([8]). For given $\alpha \geq 0$ the fractional power series (FPS) around the center $x_0 \in \mathbb{R}$ is a functional series of the following form:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^{n\alpha}, \quad x \geq x_0.$$

Let $\alpha \in (1/2, 1]$, and $D_x^\alpha \equiv {}_0^C D_x^\alpha$. We consider the following initial value problem (IVP):

$$D_x^{2\alpha} u + \frac{a}{x^\alpha} D_x^\alpha u + s(x)g(u) = h(x), \quad x > 0, \quad u(0) = \hat{u}_0, \quad D_x^\alpha u|_{x=0} = 0, \quad (1)$$

where

$$s(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}, \quad h(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} h_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}, \quad g(u) \equiv \sum_{k=0}^K a_k u^k, \quad K \in \mathbb{N}.$$

Using FPS the solution to IVP (1) can be written as

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \quad \left(U_N(x) \equiv \sum_{n=0}^N u_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \right). \quad (2)$$

Theorem. *If the solution to IVP (1) is sought in the form of series (2), then the following equalities hold: $u_0 = \hat{u}_0$, $u_1 = 0$ and*

$$\begin{aligned} & u_N \left(1 + \frac{a\Gamma(1+(N-2)\alpha)}{\Gamma(1+(N-1)\alpha)} \right) = \\ & = h_{N-2} - D_x^{(N-2)\alpha} \left(\sum_{n=0}^N s_n \frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \sum_{k=0}^K a_k U_N^k(x) \right) \Big|_{x=0}, \quad N \geq 2. \end{aligned}$$

Corollary 1. *If $s(x) \equiv s \in \mathbb{R}$, $h(x) \equiv 0$ and $g(u) \equiv u$, then the solution to problem (1) is given in the form of the following series*

$$u(x) = \hat{u}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n s^n \hat{u}_0 \left(\prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(1+(2k-1)\alpha)}{\Gamma(1+(2k-1)\alpha) + a\Gamma(1+2(k-1)\alpha)} \right) \frac{x^{2n\alpha}}{\Gamma(1+2n\alpha)},$$

which converges absolutely and uniformly for $x \geq 0$.

Corollary 2. *If $s(x) \equiv x^\alpha$ and*

$$h(x) \equiv \Gamma(1+2\alpha) + \frac{a\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} + x^\alpha (\hat{u}_0 + x^{2\alpha})^k, \quad g(u) \equiv u^k,$$

where $k \in \mathbb{N}$, then IVP (1) has a solution $u(x) = \hat{u}_0 + x^{2\alpha}$.

References

1. Podlubny I. Fractional differential equations // Math. in Sci. and Engin. 1999. Vol. 198.
2. Das S. Functional fractional calculus. Berlin, 2011.
3. Uchaikin V. V. Method of fractional derivatives. Ulyanovsk, 2008. (Russian)
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam, 2006.
5. Syam M. I. Analytical solution of the fractional initial Emden–Fowler equation using the fractional residual power series method // Int. J. of Appl. and Comput. Math. 2018. Vol. 4 (106). Pp. 1–8.
6. Wang H. H., Hu Y. Solutions of fractional Emden–Fowler equations by homotopy analysis method // J. of Adv. in Math. 2017. Vol. 13 (1). Pp. 1–6.
7. Chandrasekhar S. Introduction to the study of stellar structure. New York, 1967.
8. El-Ajou A., Abu Arqub O., Al Zhour Z. et. al New results on fractional power series: theories and applications // Entropy. 2013. Vol. 15. Pp. 5305–5323.

9. *Rebenda J., Šmarda Z.* A numerical approach for solving of fractional Emden–Fowler type equations // Intern. Conf. of Numer. Anal. and Appl. Math. (ICNAAM–2017). AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 1978.

SOME SYSTEMS OF PDE ASSOCIATED WITH THE MULTIPLE CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

Arzikulov Z. O.

*Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Uzbekistan
zafarbekarzikulov1984@gmail.com*

Introduce a following confluent hypergeometric functions:

$$\Phi_2^{(n)}[\mathbf{b}; \mathbf{c}; \mathbf{x}] = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b_1)_{k_1} \dots (b_n)_{k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \dots k_n!},$$

$$\Psi_2^{(n)}[a; \mathbf{c}; \mathbf{x}] = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(a)_{|\mathbf{k}|} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}{(c_1)_{k_1} \dots (c_n)_{k_n} k_1! \dots k_n!},$$

$$\Psi_D^{(n)}[a, b_1, \dots, b_{n-1}; \mathbf{c}; \mathbf{x}] = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(a)_{|\mathbf{k}|} (b_1)_{k_1} \dots (b_{n-1})_{k_{n-1}} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \dots k_n!},$$

$$\Xi_1^{(n)}[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}; \mathbf{c}; \mathbf{x}] =$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} \dots (a_n)_{k_n} (b_1)_{k_1} \dots (b_{n-1})_{k_{n-1}} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \dots k_n!}$$

$$\Phi_3^{(n)}[b_1, \dots, b_{n-1}; \mathbf{c}; \mathbf{x}] = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b_1)_{k_1} \dots (b_{n-1})_{k_{n-1}} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \dots k_n!}$$

$$\Psi_{1,r}^{(n)}[a, b_1, \dots, b_r; \mathbf{c}; \mathbf{x}] = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(a)_{|\mathbf{k}|} (b_1)_{k_1} \dots (b_r)_{k_r} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}{(c_1)_{k_1} \dots (c_n)_{k_n} k_1! \dots k_n!},$$

$$0 \leq r \leq n - 1;$$

$$\Xi_{1,r}^{(n)}[\mathbf{a}, b_1, \dots, b_r; \mathbf{c}; \mathbf{x}] =$$

$$= \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} \dots (a_n)_{k_n} (b_1)_{k_1} \dots (b_r)_{k_r} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}{(c)_{|\mathbf{k}|} k_1! \dots k_n!}, \quad 0 \leq r \leq n - 1;$$

where

$$\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n), \quad \mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n), \quad \mathbf{c} := (c_1, \dots, c_n), \quad \mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n);$$

$$\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n); \quad |\mathbf{k}| := k_1 + \dots + k_n, \quad k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0.$$

These confluent hypergeometric functions satisfy the following systems of partial differential equations:

$$\left. x_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + (c_k - x_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - au = 0, \quad k = \overline{1, n} \right\} u \equiv \Psi_2^{(n)};$$

$$\left. \begin{aligned} x_k (1 - x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \\ + [c - (a_k + b_k + 1) x_k] \frac{\partial u}{\partial x_k} - a_k b_k u = 0, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_n} + (c - x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} - a_n u = 0; \end{aligned} \right\} u \equiv \Xi_1^{(n)}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + (c - x_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} - a_k u = 0, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_n} + c \frac{\partial u}{\partial x_n} - u = 0; \end{aligned} \right\} u \equiv \Phi_3^{(n)}$$

$$\left. \begin{aligned} x_k (1 - x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - x_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + \\ + [c_k - (a + b_k + 1) x_k] \frac{\partial u}{\partial x_k} \\ - b_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - ab_k u = 0, \quad k = \overline{1, r}, \\ x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \sum_{j=1}^{n-1} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + (c_n - x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} - au = 0, \quad k = \overline{r+1, n}; \end{aligned} \right\} u \equiv \Psi_{1,r}^{(n)}$$

$$\left. \begin{aligned}
& x_k (1 - x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \\
& + [c - (a_k + b_k + 1) x_k] \frac{\partial u}{\partial x_k} - a_k b_k u = 0, \quad k = \overline{1, r}, \\
& \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + (c - x_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} - a_k u = 0, \quad k = \overline{r+1, n};
\end{aligned} \right\} u \equiv \Xi_{1,r}^{(n)}$$

$$\left. \begin{aligned}
& x_k (1 - x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \\
& + [c - (a_k + b_k + 1) x_k] \frac{\partial u}{\partial x_k} - a_k b_k u = 0, \quad k = \overline{1, r}, \\
& \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + c \frac{\partial u}{\partial x_k} - u = 0, \quad k = \overline{r+1, n}.
\end{aligned} \right\} u \equiv \Xi_{2,r}^{(n)}$$

Using these obtained PDE systems, we write in explicit forms self-similar and fundamental solutions of the second order multidimensional partial differential equations with singular coefficients.

NON-LOCAL AND INVERSE PROBLEMS FOR THE RAYLEIGH–STOKES EQUATION

Ashurov R. R.

*V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of
Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

Our report is based on joint work [1], [2] and [3] with our colleagues: S.R. Umarov (New Haven University, USA), A. Mukhiddinova (Tashkent University of Information Technologies) and N. Vaisova (Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Urganch).

In this talk we consider the following Rayleigh–Stokes problem for a generalized second-grade fluid with a time-fractional derivative model:

$$\partial_t u(x, t) - (1 + \gamma \partial_t^\alpha) \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega,$$

where $1/\gamma > 0$ is the fluid density, a fixed constant, φ and f are given functions, $\partial_t = \partial/\partial t$, and ∂_t^α is the Riemann–Liouville fractional derivative

of the order $\alpha \in (0, 1)$ defined by:

$$\partial_t^\alpha h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \omega_{1-\alpha}(t-s)h(s)ds, \quad \omega_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Here $\Gamma(\sigma)$ is Euler's gamma function. Based on physical considerations, usually this problem is considered in the domain $\Omega \subset R^N$, $N = 1, 2, 3$, with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$.

The main results of this talk is the following:

1) We will solve the Rayleigh–Stokes problem by the Fourier method. A formal formula for the solution in the form of a Fourier series was given in the papers of previous authors, but the convergence of these series was not investigated.

2) We will pay special attention to the backward, since in previous papers the authors considered only the case $N \leq 3$. And this is connected with the method used in these works: if the dimension of the space is less than four, then for the eigenvalues λ_k of the Laplace operator with the Dirichlet condition, the series $\sum_k \lambda_k^{-2}$ converges.

3) In this talk we consider the Rayleigh–Stokes problem with a non-local time condition:

$$u(x, T) = \beta u(x, 0) + \varphi(x),$$

where β is an arbitrary real number. Note, if $\beta = 0$, then we have the backward problem.

If $\beta = 1$, then we get the following condition

$$u(x, T) = u(x, 0) + \varphi(x).$$

It turns out that this non-local problem is well-posed. In other words, a solution to the non-local problem exists and is unique. Moreover, the solution depends continuously on the function $\varphi(x)$ in the non-local condition.

4) The question naturally arises: starting from what value of β does the problem worsen? We will give a comprehensive answer to this question. It turns out that the critical values of the parameter β lie on the half-interval $[0, 1)$. If $\beta \notin [0, 1)$, then the problem is well-posed according to Hadamard: there is a unique solution and it depends continuously on the data of the problem; if $\beta \in (0, 1)$ (the case $\beta = 0$ is the backward problem), then the well-posedness of the problem depends on the location of the eigenvalues of the Laplace operator. For this case, necessary and sufficient conditions are found that guarantee the existence of a solution, but the solution will not be unique.

5) The Rayleigh–Stokes problem involves the fractional derivative ∂_t^α , which describes the behavior of a viscoelastic flow. However, this parameter is often unknown and difficult to measure directly. Therefore, it is undoubtedly interesting to study the inverse problem to determine this physical quantity. We prove that the additional condition $\|u(x, t_0)\|_{L_2(\Omega)}^2 = d_0$ for sufficiently large t_0 uniquely determines the parameter α .

6) Another very important problem studied in this work is to find out the dependence of the behavior of the solution of the initial-boundary value problem on the order of the fractional derivative. In this work, an interesting fact was discovered: if we consider the norm of the solution $\|u(x, t_0)\|_{L_2(\Omega)}$ as a function of the parameter α , then this is a decreasing function. In other words, the norm acquires its maximum value when the order of the fractional derivative is close to zero, and its minimum value – when this parameter is close to one.

References

1. *Ashurov R., Vaisova N.* Backward and non-local problems for the Rayleigh–Stokes equation // *Fractal Fract.* 2022. Vol. 6, no. 10, 587. Pp. 1–18.
2. *Ashurov R., Umarov S., Mukhiddinova A.* Non-local problems for the Rayleigh–Stokes equation // *Fractal Fract.* Vol. 7, no. 6, 490. 2023. Pp. 1–16.
3. *Ashurov R., Mukhiddinova A.* Inverse problem of determining the order of the fractional derivative in the Rayleigh–Stokes equation // *Fractional Calculus and Applied Analysis.* 2023. Vol. 26. Pp. 1691–1708.

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE FRACTIONAL DERIVATIVE ORDER IN THE MIXED-TYPE EQUATIONS

Ashurov R. R.^{1,a}, Murzambetova M. B.^{2,b}

¹ *V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

² *Nukus State pedagogical Institute named after Ajiniyaz, Nukus, Uzbekistan*
^a *ashurovr@gmail.com*, ^b *mehri_8282@mail.ru*

Let $\rho \in (0, 1)$ be a fixed number and A be an arbitrary positive self-adjoint operator defined in some separable Hilbert space H with the domain of definition $D(A)$.

Caputo fractional derivative of order $\rho \in (0, 1)$ of the function $h(t)$ defined on R_+ has the form (see, eg, [1], p. 14)

$$D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \rho)} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{(t - \xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0.$$

Consider the following mixed-type equation

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + Au(t) = 0, & 0 < t \leq t_2, \\ u'(t) - Au(t) = 0, & -t_1 \leq t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

with gluing condition

$$u(+0) = u(-0) \quad (2)$$

and conditions

$$u(t_2) = \psi \quad (3)$$

$$U(\rho) = \|u(t_0)\|^2 = u_0, \quad -t_1 < t_0 < 0, \quad (4)$$

where $u_0 \in H$, $\psi \in H$ are given vectors and $\rho \in [\rho_0, 1]$, $0 < \rho_0 < 1$.

Problem (1)–(4) is called the inverse problem to determining the function $u(t)$ and the order of the fractional derivative ρ .

Definition. A solution to the inverse problem is a pair $\{u(t), \rho\}$ such that $\rho \in (\rho_0, 1)$ and $u(t)$ and ρ together satisfy the conditions

1. $u \in C(H)$;
2. $D_t^\rho u(t) \in C((0, t_2]; H)$; $u'(t) \in C([-t_1, 0]; H)$;
3. $Au(t) \in C([-t_1, 0] \cup (0, t_2]; H)$;

and satisfying all the conditions (2)–(4).

Lemma. Let $\rho_0 \in (0, 1)$. There exists a number $T_0 = T_0(\rho_0) > 0$, such that for all $t_2 \geq T_0$, and for arbitrary $\psi \in D(A)$ function $U(\rho)$ increases monotonically with respect to $\rho \in [\rho_0; 1]$.

It is easy to see that the following main result on the considering problem is an immediate consequence of this lemma.

Theorem. Let $\rho_0 \in (0, 1)$ and let number T_0 be from Lemma. Then for all $t_2 \geq T_0$ the solution of the inverse problem $\{u(t), \rho\}$, $\rho \in [\rho_0, 1]$, exists and is unique if and only if

$$U(\rho_0) \leq u_0 \leq U(1).$$

References

1. Pskhu A. V. Fractional partial differential equations. M.: Nauka, 2005. 199 p.

FORWARD AND INVERSE PROBLEMS FOR FRACTIONAL TELEGRAPH EQUATION

Ashurov R. R.^a, Saparbayev R. A.^b

*V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of
Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

^a *ashurovr@gmail.com.*, ^b *rajapboy1202gmail.com.*

This study investigates the inverse problem of determining the right-hand side of a telegraph equation given in a Hilbert space. The main equation under consideration has the form $D_t^{2\rho} u(t) + 2\alpha D_t^\rho u(t) + Au(t) = f(t)$, where $0 < t \leq T$, $\frac{1}{2} < \rho < 1$ and D_t^ρ is the Caputo derivative. The equation contains a self-adjoint positive operator A . Let A be an arbitrary positive self-adjoint operator defined in some separable Hilbert space H with the domain of definition $D(A)$. Denote the inner product in H by (\cdot, \cdot) and the norm by $\|\cdot\|$. Let further the inverse operator A^{-1} be compact. Then it is well known, that A has a complete orthonormal system of eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues λ_k with a unique limit point at $+\infty$. We assume that the eigenvalues do not decrease as their number increases, i.e. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$.

Let τ be an arbitrary real number. We introduce the power of operator A , acting in H according to the rule

$$A^\tau h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau h_k v_k,$$

here and everywhere below, by h_k we will denote the Fourier coefficients of a vector $h \in H$: $h_k = (h, v_k)$.

Obviously, the domain of definition of this operator has the form

$$D(A^\tau) = \{h \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |h_k|^2 < \infty\}.$$

It is immediate from this definition that $D(A^\tau) \subseteq D(A^\sigma)$ for any $\tau \geq \sigma$.

On the set $D(A^\tau)$, we define the inner product

$$(h, g)_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} h_k \bar{g}_k = (A^\tau h, A^\tau g)$$

Let $\rho \in (\frac{1}{2}, 1)$ be a fixed number. Consider the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} D_t^{2\rho} u(t) + 2\alpha D_t^\rho u(t) + Au(t) = f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = \varphi, \quad u_t(0) = \psi, \end{cases} \quad (1)$$

where $f(t)$ and φ and ψ are known elements of H . These problems are also called the forward problems.

Definition 1. If the function $u(t)$ with the properties $D_t^{2\rho} u(t)$, $D_t^\rho u(t)$, $Au(t) \in C((0, T]; H)$ and $u(t)$, $u_t(t) \in C([0, T]; H)$ satisfies condition (1), then it is called **the strong solution** of the forward problem.

Theorem 1. Let $\alpha > 0$, $\varphi, \psi \in H$. Further, let $\epsilon \in (0, 1)$ be any fixed number and $f(t) \in C([0, T]; D(A^\epsilon))$. Then, the forward problem has a unique strong solution.

To solve the inverse problem, we use the following additional condition

$$u(t_0) = \Phi, \quad 0 < t_0 \leq T, \quad (2)$$

in which the unknown element $f \in H$, does not depend on t and φ, ψ and $\Phi \in H$ are given elements.

Definition 2. A pair of functions $\{u(t), f\}$ with the properties $D_t^{2\rho} u(t)$, $D_t^\rho u(t)$, $Au(t) \in C((0, T]; H)$ and $u_t(t), u(t) \in C([0, T]; H)$, $f \in H$ and satisfying conditions (1), (2) is called the solution of the inverse problem.

Theorem 2. Let $\alpha > 0$, $\varphi, \psi \in H$ and $\Phi \in D(A)$. Then the inverse problem (1), (2) has a unique solution $\{u(t), f\}$.

Note that in the works [1], [2] the telegraph equation (1) was studied, in which $(D^\rho)^2$ was taken instead of $D^{2\rho}$; in particular, in work [2] the authors obtained statements similar to theorems 1–2.

References

1. Cascaval R., Eckstein E., Frota C., Goldstein A. Fractional telegraph equations // J. Math. Anal. Appl. 2002 Vol. 276, no. 1. Pp. 145–159.

2. Ashurov R. R., Saparbayev R. A. Fractional telegraph equation with the Caputo derivative // Fractal Fract. 2023. Vol. 7, no. 6. P. 483.
3. Ashurov R. R., Saparbayev R. A. Time-dependent identification problem for a fractional telegraph equation with the Caputo derivative. doi.org/10.48550/arXiv.2308.16189

TRAJECTORY OF MOVEMENT OF A JUMPING BRACHIATING ROBOT

Bodrenko A.

“Interactive Systems” Ltd., Volgograd, Russia; bodrenko@mail.ru

The methods of movement of a jumping brachiating robot were patented in [1]. We consider a mobile robot implementing vertical jumping in order to catch the holder by actuating the gripper (at the special moment of time) for brachiating purposes. We will calculate the velocity of the center of mass of the mobile robot implementing vertical jumping at the moment of beginning of the free flight phase.

Jumping brachiating mobile robot, which is a wheeled robot, comprises: a mobile platform having an omnidirectional mobile mechanism; an onboard computer with an information storage device; a Wi-Fi network node equipment connected to the onboard computer; an electric battery; two video cameras; a gripper; a wrist on which the gripper is installed; a robot arm on which the gripper is installed.

The electric battery provides electric power to the mobile robot on which this electric battery is installed. Each video camera is capable of getting and transferring the images to the onboard computer of the mobile robot, on which this video camera is installed, for image processing at 1000 fps for 1024×1024 pixels. The onboard computer is capable of real-time image processing of the input images received from the two video cameras (at 1000 fps for 1024×1024 pixels, for each video camera). The real-time image processing is done by using software for computer vision systems, Linux-based real-time operating system, software for parallel computing, and software allowing applications to run on real-time operating systems. Thus, the onboard computer and the two video cameras connected to it form a real-time vision system.

Localization of this mobile robot is conducted continuously through the dead reckoning by using sensor fusion and analyzing information received from the video cameras and proprioceptive sensors of this robot.

The calculated trajectory of movement, in the free flight phase, of the center of mass of the mobile robot during vertical jumping is obtained from the following equation system:

$$y' = v, \quad v' = -g - (K/m) \cdot v \cdot |v|, \quad (1)$$

where: $y = y(t)$ is the calculated coordinate of the center of mass of the mobile robot at the moment of time t during vertical jumping; $v = v(t)$ is the velocity of the center of mass of the mobile robot at the moment of

time t ; m is the mass of the mobile robot; K is the air resistance coefficient determined by the properties of the environment, the shape of the mobile robot, and corresponding to the square of the velocity of the mobile robot; g is the acceleration of gravity. Wherein the air resistance coefficient K for this mobile robot is calculated approximately, for example, by using the video recordings of vertical jumping of this mobile robot, and with specified initial velocity not exceeding the value of 15 m/s.

For the equation system (1), the following conditions are considered:

$$y(T) = A, \quad y(L) = B, \quad v(L) = C, \quad (2)$$

where: T is the calculated moment of beginning of jumping; L is the calculated moment of closing the gripper in order to catch the holder (the calculated moment of time when the gripper of the mobile robot is actuated); A is the coordinate of the center of mass of the mobile robot at the moment of time T ; B is the coordinate of the center of mass of the mobile robot at the moment of time L ; C is the velocity of the center of mass of the mobile robot at the moment of time L . Note that the values A, B, C are given and L is obtained from (1) using (2).

We solve (1) with conditions (2) and obtain

$$L = T + (m/(K \cdot g))^{1/2} \cdot \arccos(\exp((K/m) \cdot (A - C_2))) - C_1/g,$$

where

$$C_1 = ((m \cdot g)/K)^{1/2} \cdot \arctg((K/(m \cdot g))^{1/2} \cdot C),$$

$$C_2 = B - (m/K) \cdot \ln(\cos(\arctg((K/(m \cdot g))^{1/2} \cdot C))).$$

Thus the calculated trajectory of movement, in the free flight phase, of the center of mass of the mobile robot during vertical jumping has the following form:

$$y(t) = (m/K) \cdot \ln(\cos((K/(m \cdot g))^{1/2} \cdot ((L - t) \cdot g + C_1))) + C_2,$$

$$v(t) = ((m \cdot g)/K)^{1/2} \cdot \operatorname{tg}((K/(m \cdot g))^{1/2} \cdot ((L - t) \cdot g + C_1)).$$

Therefore the velocity of the center of mass of the mobile robot implementing vertical jumping at the moment of beginning of the free flight phase has the following form

$$v(T) = ((m \cdot g)/K)^{1/2} \cdot \operatorname{tg}((K/(m \cdot g))^{1/2} \cdot ((L - T) \cdot g + C_1)).$$

References

1. *Bodrenko A.* Method for movement of mobile robot in warehouse: Patent RU 2748441 C2 // The Official Bulletin "Inventions. Utility Models": Patents of the Russian Federation for inventions (ISSN 2313-7436). 2021. Vol. 15.

**TO SOLVING OF MULTIDIMENSIONAL FULLY NONLINEAR
PARABOLIC EQUATIONS AND FORWARD-BACKWARD SDEs**

Chubatov A.

Sirius University of Science and Technology, Sochi, Russia; chaa@inbox.ru

The option pricing and portfolio investment optimization problems on markets with friction in continuous time can be reduced to the Cauchy problem for a multidimensional fully nonlinear parabolic PDE

$$u_t + \Psi(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0, \quad u(T, x) = h(x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

An original work by Pardoux and Peng [1] described connections between quasilinear PDEs and the backward stochastic differential equations (BSDEs). The connections between the BSDE theory and fully nonlinear PDEs and systems of such equations was described in [2, 3]. We consider a model based on forward-backward SDE (FBSDE) theory for equation of type (1).

For simplicity we consider a version of equation (1)

$$u_t + \Phi(x, \nabla^2 u) = 0, \quad u(T, x) = h(x), \quad (2)$$

and assume that $\Phi(x, r)$ is C^2 -smooth in all arguments $x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$.

Set $u^1 = u \in \mathbb{R}, u^2 = \nabla u \in \mathbb{R}^n, r = \nabla^2 u^1 = \nabla u^2$ and derive an equation

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} + \nabla_r \Phi(x, \nabla u^2) \nabla^2 u^2 + \nabla_x \Phi = 0, \quad u^2(T, x) = \nabla h(x). \quad (3)$$

We can rewrite the system (2), (3) as an equation for a function $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$u_t^j + \frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{A} \nabla^2 u^j \tilde{A}^* + \tilde{\gamma}^j(x, \nabla u^2) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

where $\frac{1}{2} [\tilde{A} \tilde{A}^*](x, r) = \nabla_r \Phi(x, r), \tilde{\gamma}^1(x, r) = \Phi(x, r) - \nabla_r \Phi(x, r)r, \tilde{\gamma}^2(x, r) = \nabla_x \Phi(x, r)$.

We can associate with (4) an SDE

$$d\xi(\theta) = \tilde{A}(\xi(\theta), \nabla u^2(\theta, \xi(\theta))) dw(\theta), \quad \xi(t) = x. \quad (5)$$

Applying the Ito formula to the processes $u^1(\theta, \xi(\theta)) \in \mathbb{R}, u^2(\theta, \xi(\theta)) \in \mathbb{R}^n$ and assuming that $\xi(\theta) \in \mathbb{R}^n$ satisfies (5) we get

$$du^1(\theta, \xi(\theta)) = \left[u_\theta^1 + \frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{A} \nabla^2 u^1 \tilde{A}^* \right] (\theta, \xi(\theta)) d\theta + \langle \nabla u^1(\theta, \xi(\theta)), \tilde{A} dw(\theta) \rangle, \quad (6)$$

$$du^2(\theta, \xi(\theta)) = \left[u_\theta^2 + \frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{A} \nabla^2 u^2 \tilde{A}^* \right] (\theta, \xi(\theta)) d\theta + \nabla u^2(\theta, \xi(\theta)) \tilde{A} dw(\theta), \quad (7)$$

Set $y^1(\theta) = u^1(\theta, \xi(\theta)) \in \mathbb{R}, y^2(\theta) = u^2(\theta, \xi(\theta)) \in \mathbb{R}^n$ and

$$z^1(\theta) = \tilde{A}^* (\xi(\theta), \nabla u^2(\theta, \xi(\theta))) \nabla u^1(\theta, \xi(\theta)) \in \mathbb{R}^n,$$

$$z^2(\theta) = \nabla u^2(\theta, \xi(\theta)) \tilde{A}(\xi(\theta), \nabla u^2(\theta, \xi(\theta))) \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n.$$

In addition let $A(x, z^2) = \tilde{A}(x, \nabla u^2)$, where $z^2 = \nabla u^2 \tilde{A}(x, \nabla u^2)$. Then $\gamma^j(x, z^2) = \tilde{\gamma}^j(x, z^2 A^{-1}(x, z^2))$.

Thus, we can rewrite the system (5)–(7) setting $y(t) = (y^1(t), y^2(t)) \in \mathbb{R}^{1+n}$,

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t)), z(t) = \begin{pmatrix} z^1(t) & 0 \\ 0 & z^2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+n} \otimes \mathbb{R}^{2n} \text{ in the form}$$

$$d\xi(\theta) = A(\xi(\theta), z^2(\theta))d\omega(\theta), \quad \xi(t) = x, \quad (8)$$

$$dy(\theta) = -\gamma(\xi(\theta), z^2(\theta))d\theta + z(\theta)d\hat{w}(\theta), \quad y(T) = (h(\xi(T)), \nabla h(\xi(T))), \quad (9)$$

where $\hat{w}(t) = (w(t), w(t)) \in \mathbb{R}^{2n}$.

As a result we have obtained a strongly coupled FBSDEs.

Theorem. *Let the function Φ be such that coefficients A in (8) and γ in (9) satisfied the conditions of existence and uniqueness theorem of an FBSDE solution. Then $u(t, x) = y^1(t)$ is a viscosity solution of (2).*

It was shown [4] that one can develop an effective algorithm to obtain a numerical solution of the Cauchy problem of type (1) combining the approach from [2] and neural network technique.

For numerical computations we apply the approach by Raissi [5] to construct a numerical solution of (8),(9) and as a result to get a numerical solution of (2).

Acknowledgements. I express my gratitude to professor Ya. I. Belopolskaya.

Supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, (Agreement 075-10-2021-093, Project FMF-RND-2122).

References

1. *Pardoux E., Peng S.* Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations // Lecture Notes in CIS. Vol. 176. 1992. Pp. 200–217.
2. *Cheridito P., Soner H. M., Touzi N., Victoir N.* Second order backward stochastic differential equations and fully non-linear parabolic PDEs // Comm. Pure Appl. Math. Vol. 60, no. 7. 2007. Pp. 1081–1110.
3. *Belopolskaya Ya. I., Woyczynski W. A.* SDEs, FBSDEs and fully nonlinear parabolic systems // Rendiconti del Seminario Matematico Univ. Politec. Torino. Vol. 71, no. 2. 2013. Pp. 209–217.
4. *Pham H., Warin X., Germain M.* Neural networks-based backward scheme for fully nonlinear PDEs // SN Partial Differ. Eq. Appl. 2.16. 2021. Pp. 1–27.
5. *Raissi M.* Forward-backward stochastic neural networks: Deep learning of high-dimensional partial differential equations. 2018. Arxiv.org/abs/1804.07010.2.

**NAVIER–STOKES–VOIGT SYSTEM GOVERNING
DENSITY-DEPENDENT FLOWS WITH VACUUM**

de Oliveira H. B.^{1,a}, Khompysh Kh.^{2,b}, Shakir A. G.^{2,c}

¹*FCT – University of Algarve, Faro, Portugal*

²*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

^a*holivei@ualg.pt*, ^b*konat_k@mail.ru*, ^c*ajdossakir@gmail.com*

Let us consider the following initial-boundary value problem for the Navier–Stokes–Voigt system that governs density-dependent flows (nonhomogeneous flows) of incompressible fluids with elastic properties,

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ in } Q_T, \tag{1}$$

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \rho f - \nabla p + \mu \Delta u + \kappa \Delta u_t \text{ in } Q_T, \tag{2}$$

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad \rho \geq 0 \text{ in } Q_T, \tag{3}$$

$$\rho u = \rho_0 u_0, \quad \rho = \rho_0 \text{ in } \{0\} \times \Omega, \tag{4}$$

$$u = 0 \text{ on } \Gamma_T. \tag{5}$$

Here, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded domain, $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $0 < T < \infty$ is a cylinder with lateral $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega$. The unknowns of the problem are u , ρ and p , while f , u_0 and ρ_0 are given data. For now, we consider a general space dimension $d \geq 2$, though the real-world applications correspond to the cases $d = 2, 3$. In these cases, u denotes the velocity field, ρ accounts for the density, p is the pressure, f stands for the external forces field, while μ and κ are positive constants to the dynamic viscosity and to the relaxation time. We are interested in the case of the initial data u_0 and ρ_0 satisfying

$$\operatorname{div} u_0 = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$0 \leq \rho_0 \leq M < \infty \quad \text{in } \Omega,$$

for some positive constant M . The case when $0 < m \leq \rho \leq M < \infty$ was considered in [1].

In this talk, we prove the existence and uniqueness of strong solution above posed problem (1)–(5).

This research work has been funded by Grant number AP19676624 the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (MES RK), Kazakhstan.

References

1. *Antontsev S. N., de Oliveira H. B., Khompysh Kh.* The classical Kelvin–Voigt problem for nonhomogeneous and incompressible fluids: existence, uniqueness and regularity // *Nonlinearity*. 2021. Vol. 34. Pp. 3083–3111.

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS FOR MIXED-TYPE EQUATIONS IN BOUNDED AND UNBOUNDED DOMAINS

Dzhamalov S. Z.^a, Mambetsapaev K. A.^b

Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

^a *siroj63@mail.ru*, ^b *mr.kurbaniyaz@gmail.com*

As is known, A. V. Bitsadze's work shows that the Dirichlet problem for a mixed type equation is ill-posed. The question naturally arises: is it possible to replace the conditions of the Dirichlet problem with other conditions covering the entire boundary, which ensure the correctness of the problem? For the first time, such boundary value problems (nonlocal boundary value problems) for a mixed type equation were proposed and studied in the works of A. V. Bitsadze and F. I. Frankl when studying a gas-dynamic problem. Mixed type problems of the first kind of second order in limited domains that are close in formulation to the problems under study are available in the works of T. Sh. Kalmenov, K. B. Sabitov, B. N. Tsybikov and S. Z. Dzhamalov, and for mixed type equations of the second kind of the second order in the works of A. N. Terekhov, S. N. Glazatov, G. Karatoprakliev, M. G. Karatopraklieva and S. Z. Dzhamalov. And the problem for multidimensional mixed type equations of higher order were studied in the work of S. Z. Dzhamalov, S. G. Pyatkov. In these works, for mixed type equations of both the first and second kind, problems on the unique solvability of certain nonlocal boundary value problems in bounded domains were posed and studied. In the process of studying nonlocal problems, a close relationship between problems with nonlocal boundary conditions and inverse problems was revealed. The general approach to solving inverse problems for partial differential equations was formulated by A. N. Tikhonov and developed in the works of A. N. Tikhonov, M. M. Lavrentiev, V. G. Romanov, S. I. Kabanikhin, and other authors. Note that in the works of K. B. Sabitov and his students, inverse problems with local and nonlocal conditions for model equations of mixed type by determining the right-hand side in the plane were studied using spectral analysis methods. Further, direct and inverse problems in bounded domains were studied in the works of S. Z. Dzhamalov, R. R. Ashurov and for multidimensional mixed type equations of both the first and second kind of the second and high orders were studied in the works of S. Z. Dzhamalov, S. G. Pyatkov.

Currently, we are studying in unlimited domains the questions of unique solvability and smoothness of some direct problems and the Hadamard correctness of linear and nonlinear inverse problems with nonlocal and integral boundary conditions in a certain class of integrable functions by methods of functional analysis [1-5].

References

1. *Dzhamalov S. Z.* Nonlocal boundary value and inverse problems for equations of mixed type: Monograph. Tashkent. 2021. P. 176.

2. *Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R., Turakulov Kh. Sh.* The Linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, no. 15. Pp. 3606–3615.
3. *Dzhamalov S. Z., Turakulov Kh. Sh., Sultanov M. S.* On a nonlocal boundary value problem for a three-dimensional Tricomi equation in a prismatic unbounded domain // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 11. Pp. 3104–3111.
4. *Dzhamalov S. Z., Sipatdinova B. K.* On a semi-nonlocal boundary value problem for a three-dimensional mixed-type equation of the second kind in an unbounded parallelepiped // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 2. Pp. 1137–1144.
5. *Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R., Kozhanov A. I.* On a linear inverse problem for the three-dimensional Chaplygin equation with semi-nonlocal boundary conditions in a prismatic unbounded domain // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 274, no. 2. Pp. 186–201.

**INVESTIGATION OF A KERNEL IN A NONLOCAL PROBLEM
FOR THE TIME-FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION**

Durdiev D. K.^a, Rahmonov A. A.^b

Institute of Mathematics AS RUz, Tashkent, Uzbekistan

^a*d.durdiev@mathinst.uz*, ^b*araxmonov@mail.ru*

Let Ω be a bounded domain in \mathbf{R}^d with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the following fractional-diffusion equation in $Q_0^T := \{(x, t) : x \in \Omega, 0 < t < T\}$:

$$(\partial_t^\alpha u)(x, t) + Au(x, t) = \int_0^t k(t-s)u(x, s)ds + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_0^T, \quad (1)$$

with the Gerasimov–Caputo time fractional derivative ∂_t^α of order $0 < \alpha < 1$, defined by [1]

$$(\partial_t^\alpha y)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} y'(\tau) d\tau, \quad y \in W^{1,1}(0, T),$$

and $\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function and the operator A is a symmetric uniformly elliptic operator defined on $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

We supplement the equation (1) with the non-local initial condition

$$u(x, T) - \beta u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

the boundary condition

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (3)$$

We investigate the following inverse problem:

Inverse problem. Find $k \in L^1(0, T)$ to satisfy (1)–(3) and the additional measurement

$$\mathcal{L}[u] := \int_{\Omega} \phi(x)u(x, t)dx = h(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

where $\phi(x), h(t)$ are given functions.

We make the following assumptions.

(C1) $\varphi \in D(A^\gamma), f \in C([0, T]; \mathcal{D}(A^\gamma)), f_t \in L^1(0, T; L^2(\Omega)), \beta \notin [0, 1];$

(C2) $h(T) - \beta h(0) = \mathcal{L}[\varphi], \partial_t^\alpha h(0) + \mathcal{L}[Au](0) = \mathcal{L}[f](0);$

(C3) $\partial_t^\alpha h \in C^1[0, T]$ satisfies the following inequality:

$$|h(t)| \geq \frac{1}{h_0} > 0, \quad \text{for all } t \in [0, T],$$

where h_0 is a positive constant;

(C4) $\varepsilon \in (0, 1)$ and $\gamma > \max\{\varepsilon, 1 - \varepsilon\};$

(C5) $\phi \in H_0^2(\Omega).$

Theorem 1. Under hypotheses (C1)–(C5), there exists a solution $k \in L^1(0, T)$ of the inverse problem (1)–(4) for sufficiently small $T > 0$.

Theorem 2. Let $T > 0$. According to hypotheses (C1)–(C5), if the inverse problem (1)–(4) has two solutions $k_i \in L^1(0, T)$ ($i = 1, 2$), then $k_1 = k_2$.

References

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 524 p.

ABOUT AN ANOLOGI OF FRANKL PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH STRONG DEGENERATION

Farmonov Sh. R.

Ferghana State University, Ferghana, Uzbekistan; farmonovsh@gmail.com

Let Ω – be finite simple-connected domain of the plane xOy , bounded by arcs

$$AB = \left\{ (x, y) : x^{(2-m)/2} + y^{(2-m)/2} = 1, x > 0, y > 0 \right\},$$

$$AB^* = \left\{ (x, y) : x^{(2-m)/2} + (-y)^{(2-m)/2} = 1, x > 0, y < 0 \right\}$$

and by segments $\overline{BB^*} = \{(x, y) : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$, and

$\Omega_0 = \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$,

$\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y) : x + y > 0, x > 0, y < 0\}$,

$\Omega_2 = \Omega \cap \{(x, y) : x + y < 0, x > 0, y < 0\}$, where $A(1, 0), B(0, 1), B^*(0, -1)$, $1 \leq m < 2$.

In the domain Ω consider the equation

$$L[u] \equiv x^m u_{xx} + \text{sign } y \cdot |y|^m u_{yy} + \alpha \cdot x^{m-1} u_x + \text{sign } y \cdot \alpha \cdot |y|^{m-1} u_y = 0, \quad (1)$$

where $m - 1 < \alpha = \text{const} < m/2$.

Problem A. To find the function $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, satisfying the following conditions:

- 1) it is a regular solution of (1) in the domain Ω_0 ;
- 2) it is a generalized solution of (1) from the class $R_2[1]$ in the domains Ω_1 and Ω_2 ;
- 3) gluing conditions are valid

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha u_y(x, y) = - \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y(x, y), \quad 0 < x < 1; \quad (2)$$

- 4) satisfies boundary conditions

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{AB};$$

$$u(0, y) + u(0, -y) = f(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, y) - \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, -y) = g(y), \quad (0, y) \in OB, \quad (4)$$

where $\varphi(x, y)$, $f(t)$, $g(t)$ – are the given functions, and $u(0, -1) = f(1) - \varphi(0, 1)$.

We note that (1) in the domain Ω_0 belongs to the elliptic type, and in the domains Ω_1 and Ω_2 – to the hyperbolic type, Moreover, the segment $AO = \{(x, 0) : y = 0, 0 < x < 1\}$ a line, where a type is changed.

Uniqueness of solution of given problem is proved by the integral energy method, and existence – by integral equation method.

References

1. *Urinov A. K., Farmonov S. R.* An analog of the Frankl problem for a second-kind mixed-type equation // J. of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 194, no. 5. Pp. 573–583.

OPTIMAL PROBLEM OF CONTROL WITH THE HIGH COEFFICIENT OF THE SECOND ORDER PARABOLIC EQUATION WITH AN UNSTABLE SOLUTION

Guliyev H.^a, Askerov I.^b

Baku State University, Baku, Azerbaijan

^ahamletguliyev51@gmail.com, ^bidrakasgerov@gmail.com

Let the controlled process in $Q = \Omega \times (0, T)$ is described by the parabolic type equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - u^3 = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

within the initial and boundary conditions

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

The following additional condition also holds:

$$u|_{\Sigma} = 0, \quad (3)$$

here Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^n ($n \leq 3$) with a smooth boundary Γ ; $T > 0$ is a given positive number; $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ is the lateral surface of the cylinder Q ; $f(x, t) \in L^2(Q)$, $\phi(x) \in L^2(\Omega)$ are given functions.

As class of admissible controls we take

$$V = \left\{ v(x) : v(x) \in W_2^1(\Omega), \nu_0 \leq v(x) \leq \mu_0, \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right| \leq \mu_i, i = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (4)$$

where $\nu_0, \mu_0, \mu_i, i = 1, 2, \dots, n$ are given positive numbers.

If $v \in V$, $u \in L_6(Q)$ then from (1)–(3) we obtain that problem (1)–(3) has a unique solution $u = u(x, t)$ from the class

$$U = \left\{ u : u \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)) \right\},$$

satisfying $u(x, 0) = \phi(x)$ and integral identity

$$\begin{aligned} \int_Q \left[-u \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right] dx dt - \int_Q u^3 \eta dx dt = \\ = \int_Q f \eta dx dt + \int_{\Omega} \phi(x) \eta(x, 0) dx \end{aligned}$$

for $\eta(x, t) \in C^1(\bar{Q})$, $\eta(x, T) = 0$ [1]. Such $\{v, u\}$ is called an admissible pair. Suppose that the set of admissible pairs is not empty i.e. $\{v, u\} \neq \emptyset$.

Consider the problem of minimization of the functional

$$J(v, u) = \frac{1}{6} \|u - u_d\|_{L_6(Q)}^6 + \frac{N}{2} \|v\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \quad (5)$$

on the set of admissible pairs. Here $u_d \in L_6(Q)$ is a given function and $N > 0$ is a given positive number. In the work the following theorem on existence of the optimal pair in the considered problem is proved.

Theorem 1. *Under the conditions imposed on the data of problem (1)–(5) there exists an optimal pair $\{\tilde{v}, \tilde{u}\}$ i.e.*

$$J(\tilde{v}, \tilde{u}) = \inf_{\{v, u\}} J(v, u)$$

where $\{v, u\}$ are admissible pairs.

Using this theorem, the next theorem is proved to show the convergence of the adopted penalty method.

Theorem 2. *Let for each $\epsilon > 0$ the pair $\{\tilde{v}_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon\}$ is a solution to the problem $J_\epsilon^a(\tilde{v}_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon) = \inf J_\epsilon^a(v, u)$. Then at $\epsilon \rightarrow 0$*

$$\tilde{v}_\epsilon \rightarrow \tilde{v} \quad \text{strong in } W_2^1(\Omega),$$

$$\tilde{u}_\epsilon \rightarrow \tilde{u} \quad \text{strong in } L_6(\Omega),$$

here $\{\tilde{v}, \tilde{u}\}$ is any optimal pair and

$$\begin{aligned} J_\epsilon^a(v, u) = & \frac{1}{6} \|u - u_d\|_{L_6(Q)}^6 + \frac{N}{2} \|v\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \\ & + \frac{1}{2\epsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - u^3 - f \right\|_{L_2(Q)}^2 + \\ & + \frac{1}{2} \|u - \tilde{u}\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|v - \tilde{v}\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Then the following necessary optimality condition is derived in the form of variational inequality [2].

Theorem 3. *Let $\{\tilde{v}, \tilde{u}\}$ be an optimal pair. Then there exists a triplet $\{\tilde{v}, \tilde{u}, \psi\}$ satisfying the relations*

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{v}(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \right) - \tilde{u}^3 = f(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

$$\tilde{u}(x, 0) = u_0(x), \quad \tilde{u}|_{\Sigma} = 0,$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{v}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) - 3\tilde{u}^2 \psi = (\tilde{u} - u_d)^5,$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad \psi|_{\Sigma} = 0, \quad \tilde{u} \in U, \quad \psi \in W_2^{2,1;6/5}(Q)$$

and integral identity

$$\int_{\Omega} (N\tilde{v} + \int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} dt)(v - \tilde{v}) dx + N \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \frac{\partial (v - \tilde{v})}{\partial x_i} dx \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

References

1. *Ladyzhenskaya O. A.* Boundary value problems of mathematical physics. M.: Nauka, 1973. 407 p.
2. *Lions J. L.* Control by the singular distributed systems. M.: Mir, 1987. 367 p.

REGULARIZATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEMS OF EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Juraev D. A.

*University of Economics and Pedagogy, Karshi, Uzbekistan
Anand International College of Engineering, Jaipur, India
juraevdavron12@gmail.com, davronzhuraev12@gmail.com*

In this paper, we consider the problem of recovering solutions for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a multidimensional bounded domain from their values on a part of the boundary of this domain, i.e., the Cauchy problem. An approximate solution to this problem is constructed based on the Carleman matrix method. Many scientific and applied problems, studied at the world level, in many cases are reduced to the study of ill-posed boundary value problems for partial differential equations. Applied research on conditional correctness and construction of an approximate solution for given values on a part of the boundary of the region, for equations of elliptical type, are especially important in hydrodynamics, geophysics and electrodynamics. The study of a family of regularizing solutions to ill-posed problems served as an impetus for the beginning of studies of the well-posedness class when narrowed to a compact set. The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in various spaces is considered in works [1]–[14]. The problem of reconstructing the solution for matrix factorization of the Helmholtz equation, is one of the topical problems in the theory of differential equations.

Let \mathbb{R}^m ($m = 2k$, $k \geq 1$) be a m -dimensional real Euclidean space. $G_\rho \subset \mathbb{R}^m$ be a bounded simply-connected domain, the boundary of which consists of the surface of the cone ∂G_ρ , and a smooth piece of the surface S , lying in the cone G_ρ , i.e., $\partial G_\rho = S \cup T$, $T = \partial G_\rho \setminus S$.

We consider a system of differential equations in the region G_ρ

$$D(\partial_x)U(x) = 0, \tag{1}$$

where $D(\partial_x)$ is the matrix of first-order differential operators.

Definition. Suppose $U(y) \in A(G_\rho)$ and

$$U(y)|_S = f(y), \quad y \in S. \tag{2}$$

Here $f(y)$ a given continuous vector-function on S . It is required to restore the vector function $U(y)$ in the domain G_ρ , based on it's values $f(y)$ on S .

Theorem. Let $U(y) \in A(G_\rho)$ on the part of the plane $y_m = 0$ satisfy condition $|U(y)| \leq M$.

Then the following estimates is true

$$|U(x) - U_{\sigma(\delta)}(x)| \leq C_\rho(\lambda, x)\sigma^k M^{1-(\frac{\sigma}{\alpha})^\rho} \delta^{(\frac{\sigma}{\alpha})^\rho}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G_\rho.$$

$$|\partial_{x_j}U(x) - \partial_{x_j}U_{\sigma(\delta)}(x)| \leq C_\rho(\lambda, x)\sigma^k M^{1-(\frac{\sigma}{\alpha})^\rho} \delta^{(\frac{\sigma}{\alpha})^\rho}, \quad \sigma > 1, \quad x \in G_\rho,$$

$$j = 1, \dots, m.$$

Due to the limited number of pages in the article, a detailed proof of the theorem will be considered in other works of the author.

Thus, functionals $U_{\sigma(\delta)}(x)$ and $\partial_{x_j} U_{\sigma(\delta)}(x)$ determines the regularization of the solution of problem (1), (2).

References

1. *Juraev D. A.* The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in \mathbb{R}^3 // Journal of Universal Mathematics. 2018. Vol. 1, no. 3. Pp. 312–319.
2. *Juraev D. A.* On the solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a multidimensional spatial domain // Global and Stochastic Analysis. 2022. Vol. 9, no. 2. Pp. 1–17.
3. *Juraev D. A.* The solution of the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a multidimensional bounded domain // Palestine Journal of Mathematics. 2022. Vol. 11, no. 3. Pp. 604–613.
4. *Juraev D. A., Shokri A., Marian D.* Solution of the ill-posed Cauchy problem for systems of elliptic type of the first order // Fractal and Fractional. 2022. Vol. 6, no. 3. Pp. 1–11.
5. *Juraev D. A., Shokri A., Marian D.* On an approximate solution of the Cauchy problem for systems of equations of elliptic type of the first order // Entropy. 2022. Vol. 24, no. 7. Pp. 11–18.
6. *Juraev D. A., Shokri A., Marian D.* On the approximate solution of the Cauchy problem in a multidimensional unbounded domain // Fractal and Fractional. 2022. Vol. 6, no. 7. Pp. 1–14.
7. *Juraev D. A., Shokri A., Marian D.* Regularized solution of the Cauchy problem in an unbounded domain // Symm. 2022. Vol. 14, no. 8. Pp. 1–16.
8. *Juraev D. A., Cavalcanti M. M.* Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in the space \mathbb{R}^m // Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica. 2022. Vol. 41, no. 3. Pp. 1–12.
9. *Juraev D. A.* The Cauchy problem for matrix factorization of the Helmholtz equation in a multidimensional unbounded domain // Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica. 2023. Vol. 41, no. 3. Pp. 1–18.
10. *Juraev D. A., Ibrahimov V., Agarwal P.* Regularization of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation on a two-dimensional bounded domain // Palestine Journal of Mathematics. 2023. Vol. 12, no. 1. Pp. 381–403.
11. *Juraev D. A.* Fundamental solution for the Helmholtz equation // Engineering Applications. 2023. Vol. 2, no. 2. Pp. 164–175.
12. *Juraev D. A., Jalalov M. J., Ibrahimov V. R.* On the formulation of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Engineering Applications. 2023. Vol. 2, no. 2. Pp. 176–189.
13. *Juraev D. A., Agarwal P., Shokri A., Elsayed E. E., Bulnes J. D.* On the solution of the ill-posed Cauchy problem for elliptic systems of the first order // Stochastic Modelling & Computational Sciences. 2023. Vol. 3, no. 1. Pp. 1–21.

14. *Juraev D. A., Noeiaghdam S., Agarwal P.* On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation // Turkish World Mathematical Society. Journal of Applied and Engineering Mathematics. 2023. Vol. 13, no. 4. Pp. 1311–1326.

BIVARIATE MITTAG-LEFFLER TYPE FUNCTIONS AS A KEY PART OF SOLUTIONS TO FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Karimov E.

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; erkinjon@gmail.com

It is well-known that many special functions appear in solutions for differential equations. For instance, hypergeometric functions are key part of solutions for singular elliptic equations and many other degenerate partial differential equations. In fractional calculus, so called Mittag-Leffler type functions play crucial role. Multivariable analogs of such functions are also important and they are linked with multi-term fractional differential equations. In this regard, we note that a general solution of the differential equation involving Caputo–Dzherbashyan derivative with the Mittag-Leffler function in a right-hand side was represented via bivariate Mittag-Leffler type function [1].

In some recent investigations, solutions of certain Cauchy problems were represented via infinite series of Mittag-Leffler type functions [2], [3]. Namely, in [2], the solution to the Cauchy problem for differential equation with the regularized Prabhakar fractional derivative

$${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y(t) - \lambda y(t) = f(t), \quad y^k(0) = a_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1$$

was represented as

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k t^k}{k!} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} a_k \frac{((1+i)\gamma)_j}{j!} \frac{\lambda^{(i+1)} \delta^j t^{\alpha j + (i+1)\beta + k}}{\Gamma(\alpha j + (i+1)\beta + k + 1)} + \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((1+i)\gamma)_j}{j!} \frac{\lambda^i \delta^j (t-z)^{\alpha j + (i+1)\beta - 1}}{\Gamma(\alpha j + (i+1)\beta)} f_n(z) dz.$$

Here ${}^{PC}D_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y(t) = {}^PI_{0t}^{\alpha, m-\beta, -\gamma, \delta} \frac{d^m}{dt^m} y(t)$ represents regularized Prabhakar fractional derivative and

$${}^PI_{0t}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}y(t) = \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma} [\delta(t-\xi)^{\alpha}] y(\xi) d\xi, \quad t > 0,$$

represents Prabhakar fractional integral. We note that above-given definitions are valid for $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$ such that $\text{Re}(\alpha) > 0$ and $m - 1 < \text{Re}(\beta) < m$, $m \in \mathbf{N}$.

In [4], we re-wrote this solution via bivariate Mittag-Leffler type function E_2 :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^{\beta+k} \Gamma(\gamma) E_2 \left(\begin{matrix} \gamma, \gamma, 1; 1, 0 \\ \beta + k + 1, \beta, \alpha; \gamma, \gamma, 1, 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \lambda t^\beta \\ \delta t^\alpha \end{matrix} \right) + \Gamma(\gamma) \int_0^t (t-z)^{\beta-1} E_2 \left(\begin{matrix} \gamma, \gamma, 1; 1, 0 \\ \beta, \beta, \alpha; \gamma, \gamma, 1, 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \lambda(t-z)^\beta \\ \delta(t-z)^\alpha \end{matrix} \right) f(z) dz.$$

Here $E_2(\cdot)$ is the Mittag-Leffler type function in two variables represented as

$$E_2 \left(\begin{matrix} \gamma_1, \alpha_1, \beta_1; \gamma_2, \alpha_2 \\ \delta_1, \alpha_3, \beta_2; \delta_2, \alpha_4; \delta_3, \beta_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 i + \beta_1 j} (\gamma_2)_{\alpha_2 i}}{\Gamma(\delta_1 + \alpha_3 i + \beta_2 j) \Gamma(\delta_2 + \alpha_4 i) \Gamma(\delta_3 + \beta_3 j)} \frac{x^i}{\Gamma(\delta_2 + \alpha_4 i)} \frac{y^j}{\Gamma(\delta_3 + \beta_3 j)}.$$

Moreover, solution to the same Cauchy problem we found using successive approximations method [5]. For further usage we have proved the following statement:

Lemma. [5] *If $(\alpha_3 > \alpha_4, \alpha_3 > 0, \beta_2 > \beta_3, \beta_2 > 0)$, the following Euler-type integral representations holds true:*

$$E_2 \left(\begin{matrix} \gamma_1, \alpha_1, \beta_1; \gamma_2, \alpha_2 \\ \delta_1, \alpha_3, \beta_2; \delta_2, \alpha_4; \delta_3, \beta_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) = \frac{1}{\Gamma(\gamma_1)} \frac{1}{\Gamma(\gamma_2)} \times \int_0^1 \int_0^\infty \xi^{\frac{\delta_1}{2}-1} \cdot \eta^{\gamma_1-1} \cdot (1-\xi)^{\frac{\delta_1}{2}-1} \cdot e^{-\eta} e_{\alpha_3, -\alpha_4}^{\frac{\delta_1}{2}, \delta_2} (x \eta^{\alpha_1} \xi^{\alpha_3}) \times e_{\beta_2, -\beta_3}^{\frac{\delta_1}{2}, \delta_3} (y \eta^{\beta_1} (1-\xi)^{\beta_2}) d\xi d\eta.$$

Here $e_{\alpha, \beta}^{\mu, \delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu) \Gamma(\delta - \beta k)}$, $\alpha > \beta, \alpha > 0$, is the Wright-type function [6].

References

1. Karimov E., Kerbal S., Al-Salti N. An inverse source non-local problem for a mixed type equation with a Caputo fractional differential operator // East Asian Journal of Applied Mathematics. 2017. Vol. 7, no. 2. Pp. 417–438.
2. Rani N., Fernandez A. Solving Prabhakar differential equations using Miku-sinski's operational calculus // Computational and Applied Mathematics. 2022. Vol. 41, no. 107. Pp. 15.
3. Deif S. A., Capelas de Oliveira E. A system of Cauchy fractional differential equations and new properties of Mittag-Leffler functions with matrix argument // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2022. Vol. 406. Pp. 113977.

4. *Karimov E. T., Hasanov A.* On a boundary-value problem in a bounded domain for a time-fractional diffusion equation with the Prabhakar fractional derivative // Bulletin of the Karaganda University. Math. series, Vol. 111, no. 3. Pp. 39–46.
5. *Karimov E., Tokmagambetov N., Toshpulatov M.* On a mixed equation involving Prabhakar fractional order integral-differential operator. M. Ruzhansky, K. Van Bockstal (eds.), Extended Abstracts 2021/2022, Research Perspectives Ghent Analysis and PDE Center 2, chapter 25.
6. *Pskhu A. V.* Partial differential equations of fractional order. M.: Nauka, 2005. 199 p.

**BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH WANTZELL–NEUMANN
CONDITION FOR A SUBDIFFUSION EQUATION INVOLVING
HILFER–PRABHAKAR FRACTIONAL DERIVATIVE**

Karimov E. T.^a, Turdiev Kh. N.^b

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
^a *erkinjon@gmail.com,* ^b *xurshidjon2801@gmail.com*

In a rectangular domain $\Omega = \{(t, x) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ we consider the following time-fractional diffusion equation:

$${}^{PH}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta; \mu} u(t, x) - u_{xx}(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

where $f(t, x)$ is a given function and

$${}^{PH}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta; \mu} y(x) = E_{0t}^{\alpha, \mu(n-\beta), -\gamma\mu, \delta} \left[\frac{d^n}{dt^n} E_{0t}^{\alpha, (1-\mu)(n-\beta), -\gamma(1-\mu), \delta} y(x) \right],$$

$n = [\text{Re } \beta] + 1 \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ represents Hilfer–Prabhakar fractional derivative of order β [1], while

$$E_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta} y(x) = \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^{\gamma} (\delta(t-s)^{\alpha}) y(s) ds, \quad t > 0$$

stands for the Prabhakar fractional integral of order β and $E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}$ is the Prabhakar function [2]. In this work we suppose that $0 < \beta \leq 1$.

We are interested to find a solution of equal (1) in the domain Ω , satisfying an initial condition

$${}^{PR}D_{0t}^{\alpha, \beta + \mu(1-\beta) - 1, \gamma(1-\gamma), \delta} u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

and boundary condition

$$u(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

together with so-called Wentzell–Neumann condition

$$u_x(t, 0) + \rho u_{xx}(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \rho > 0. \quad (4)$$

Here ${}^{PR}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ can be obtained from ${}^{PR}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu}$ at $\mu = 0$ [1].

We note that Hilfer–Prabhakar fractional derivative was main target of works [1, 3]. Direct and inverse problems for diffusion equations involving non-classical condition were studied in [4, 5]. The similar to problem (1)–(4), in the case was discussed in [6].

The main tool of the present investigation is the method of separation of variables, which leads to spectral problem with nonlocal condition involving spectral parameter [7]. In time-variable we obtain the Cauchy problem

$${}^{PH}D_{0t}^{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu} y(t) - \lambda y(t) = f(t), \quad {}^{PR}D_{0t}^{\alpha, \beta + \mu(1-\beta) - 1, \gamma(1-\gamma), \delta} y(0) = \varphi_0,$$

solution of which has a form

$$y(t) = \Gamma(\gamma) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_2 \left(\begin{array}{c} \gamma, \gamma, 1; 1, 0 \\ \beta, \beta, \alpha; \gamma, \gamma; 1, 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \lambda(t-s)^\beta \\ \delta(t-s)^\alpha \end{array} \right) f(s) ds + \\ + t^{\beta + \mu(1-\beta) - 1} \varphi_0 \Gamma(\gamma - \gamma\mu) E_2 \left(\begin{array}{c} \gamma - \gamma\mu, \gamma, 1; 1, 0 \\ \beta + \mu(1-\beta), \beta, \alpha; \gamma - \gamma\mu, \gamma; 1, 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} -\lambda t^\beta \\ \delta t^\alpha \end{array} \right),$$

where

$$E_2 \left(\begin{array}{c} \gamma_1, \alpha_1, \beta_1; \gamma_2, \gamma_3 \\ \delta_1, \alpha_3, \beta_2; \delta_2, \alpha_4; \delta_3, \beta_3 \end{array} \middle| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \\ = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma_1 + \alpha_1 i + \beta_1 j) \Gamma(\gamma_2 + \alpha_2 i)}{\Gamma(\gamma_1) \Gamma(\gamma_2) \Gamma(\delta_1 + \alpha_3 i + \beta_2 j)} \cdot \frac{x^i}{\Gamma(\delta_2 + \alpha_4 i)} \cdot \frac{y^j}{\Gamma(\delta_3 + \beta_3 i)}$$

is the bivariate Mittag-Leffler function [8]. In [8] the solution to the similar Cauchy problem involving Caputo-Prabhakar fractional derivative was obtained in terms of $E_2(\cdot)$.

Further, using the integral representation, given in [9], we can prove the uniform convergence of infinite series corresponding to the solution of (1)–(4).

References

1. Fernandez A., Rani N., Tomovski Z. An operational calculus approach to Hilfer–Prabhakar fractional derivatives // Banach J. Math. Anal. 2023. Pp. 17–33.
2. Prabhakar, T. R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. 1971. Vol. 19. Pp. 7–15.
3. Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Ž. Hilfer–Prabhakar derivatives and some applications // Appl. Math. Comput. 2014. Vol. 242. Pp. 576–589.

4. *Ismailov M. I., Kanca F.* An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions // *Math. Methods Appl. Sci.* 2011. Vol. 34. Pp. 692–702.
5. *Ismailov M. I., Tekin I., Erkovan S.* An inverse problem for finding the lowest term of a heat equation with Wentzell–Neumann boundary condition // *Inverse Problems in Sci. and Eng.* 2019. Vol. 27, no. 11. Pp. 1608–1634.
6. *Karimov E. T., Turdiev Kh. N.* Direct and inverse source problems for sub-diffusion equation involving generalized Hilfer derivative with a non-classical boundary condition // *Bull. Inst. Math.* 2022. Vol. 5, no. 5. Pp. 53–59.
7. *Marchenkov D. B.* The basis property in the space $L_p(0,1)$ of a system of eigenfunctions corresponding to a problem with a spectral parameter in the boundary condition // *Differ. Equ.* 2006. Vol. 42, no. 6. Pp. 847–849.
8. *Karimov E. T., Hasanov A.* On a boundary-value problem in a bounded domain for a time-fractional diffusion equation with the Prabhakar fractional derivative // *Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series.* 2023. Vol.111, no. 3. Pp. 39–46.
9. *Karimov E., Tokmagambetov N., Toshpulatov M.* On a mixed equation involving Prabhakar fractional order integral-differential operator. M. Ruzhansky, K. Van Bockstal (eds.). *Extended Abstracts 2021/2022, Research Perspectives Ghent Analysis and PDE Center*, chapter 25.

**NONLOCAL PROBLEMS FOR PSEUDO-PARABOLIC EQUATION
WITH $p(u(x,t))$ -LAPLACE OPERATOR**

Khompysh Kh.

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan; konat_k@mail.ru

Let us consider the following initial-boundary value problem for the pseudoparabolic equation perturbed by p -Laplacian with the variable exponent

$$u_t - \gamma \Delta u_t - \beta \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(l(u)) - 2} \nabla u \right) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

which is supplemented with the initial and boundary conditions

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T, \quad (3)$$

where Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, with a smooth boundary $\partial\Omega$, and $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$, $f(x, t)$ and $u_0(x)$ are given functions, and γ and β are given constants such that

$$\beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

The exponents of nonlinearity $p(l(u))$ is a given function with the values in the interval $[p^-, p^+]$, with the constants p^- and p^+ such that $1 < p^- < p^+ < \infty$. The argument of $p(\cdot)$, $l(\cdot)$ is the functional depending on the solution u , i.e.

$$p[u] \equiv p(l(u)), \quad l(u) = \int_{\Omega} |u(x, t)|^{\alpha} dx : L^{\infty}(0, T; L^{\alpha}(\Omega)) \mapsto \mathbb{R}.$$

In this work, we study the unique solvability of the initial-boundary nonlocal problem (1)–(3). Moreover, we establish the convergence of solutions of pseudoparabolic system (1)–(3) to solutions of nonlocal problem for parabolic system.

This work was supported by the Grant no. AP19676624.

AN INVERSE PROBLEM FOR INTEGRO-DEIFFERENTIAL PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Khompyskh Kh.^a, Shazyndayeva M. K.^b

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
konat_k@mail.ru^a, moldir.trz@gmail.com^b

Let Ω be a bounded domain in R^d , $d \geq 1$, with a smooth boundary and $Q_T := \Omega \times [0, T]$ is a bounded cylinder $0 < T < \infty$. In this work, we consider the following inverse problem for the integro-differential pseudoparabolic equation

$$u_t - \alpha \Delta u - \beta \Delta u_t - \int_0^t K(t - \tau) \Delta u(x, \tau) d\tau = f(x)g(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

which supplemented with the initial condition

$$u(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

the boundary condition

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

and with the final overdetermination condition

$$u(x, T) = \phi(x) \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

The studying of inverse problem consists of finding of the functions $u(x, t)$ and a coefficient of right-hand side $f(x)$ from the system (1)–(4) under the given constants α, β and the given functions $\phi(x), g(x, t)$ and $K(t)$. In this talk, we study the questions of existence, uniqueness and the stability of a strong generalized solution of (1)–(4).

This research work has been funded by Grant number AP19676624 the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (MES RK), Kazakhstan.

**GENERALIZED SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE
DEGENERATING HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND KIND**

Komilova N. J.

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; nigora.komilova@bk.ru

Consider the following degenerating hyperbolic equation of second kind with two lines of change of the type

$$y^m U_{xx} - x^n U_{yy} = 0 \quad (-1 < m < n \leq 0) \quad (1)$$

in a finite simply connected domain D , bounded by characteristics $AB : \xi = 0$, $BC : \eta = 1$ and $AB : y = 0$ of equation (1) for $x \geq 0$ and $y \geq 0$, where

$$\left. \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\} = \frac{2}{2+n} x^{(2+n)/2} \mp \frac{2}{2+m} y^{(2+m)/2}. \quad (2)$$

It is known that the solution of equation (1) with the following initial data

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

has the form [1]

$$\begin{aligned} u(x, y) = & 2(1+2p)\gamma_1 x^{n/4} \int_0^1 [z(1-z)]^p \frac{t^q F(p-q, p+q-1; p; \theta)}{(1-\theta)^{1-p}} \tau(t) dz + \\ & + \gamma_1 x^{n/4} \int_0^1 [z(1-z)]^p (1-2z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{t^q F(p-q, p+q-1; p; \theta)}{(1-\theta)^{1-p}} \tau(t) \right] dz - \\ & + \frac{[2(1-2p)]^{1-2p}}{(1-2q)^q} \gamma_2 x^{n/4} y \int_0^1 [z(1-z)]^{-p} t^q F(q, 1-q; 1-p; \theta) \nu(t) dz, \quad (4) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} q &= \frac{n}{2(n+2)}, \quad p = \frac{m}{2(m+2)}, \quad -1 < 2p < 2q \leq 0; \\ \gamma_1 &= \frac{\Gamma(1+2p)}{2^{1-q}\Gamma^2(1+p)}, \quad \gamma_2 = [2(1-2p)]^{2p} 2^{q-1} \frac{\Gamma(1-2p)}{\Gamma^2(1-p)}; \\ t &= \frac{2}{2-n} x^{(2-n)/2} + \frac{2}{2-m} y^{(2-m)/2} (2z-1); \\ \theta &= \frac{2(2-n)}{(2-m)^2 t} x^{(n-2)/2} y^{2-m} z(1-z). \end{aligned}$$

The formula (4) is obtained in another way using the properties of the Kampé de Fériet series in [2].

Definition 1. If $\tau'(x)$ and $\nu(x)$ are continuous functions for $0 < x < 1$, then an expression of the form (4) is called a generalized solution of equation (1) in the domain D .

We consider following class of the generalized solutions of the Cauchy problem (1) and (3).

Definition 2. By a generalized solution of the class $R_2(p, q)$ of the equation (1), we mean a generalized solution (4), where the function $\tau(x)$ is representable in the form

$$\tau(x) = x^{-q} \int_0^x (x-s)^{-2p} s^q F\left(q, 1-q; 1-p; -\frac{(x-s)^2}{4xs}\right) T(s) ds, \quad (5)$$

where $\nu(x)$ and $T(x)$ are continuous and integrable functions in $(0, 1)$.

Substituting (5) in (4), we obtain (for details, see [3])

$$U(\xi, \eta) = \left(\frac{\eta + \xi}{2}\right)^{-q} \int_0^\xi (\eta-t)^{-p} (\xi-t)^{-p} t^q F(q, 1-q; 1-p; \sigma) T(t) dt + \\ + \left(\frac{\eta + \xi}{2}\right)^{-q} \int_\xi^\eta (\eta-t)^{-p} (t-\xi)^{-p} t^q F(q, 1-q; 1-p; \sigma) N(t) dt, \quad (6)$$

where ξ and η are defined in (2),

$$U(\xi, \eta) = u \left([(2+n)(\eta + \xi)/4]^{2/(n+2)}, [(2+m)(\eta - \xi)/4]^{2/(m+2)} \right),$$

$$N(t) = \frac{1}{2 \cos \pi \beta} T(t) - \gamma \nu(t), \quad (7)$$

$$\gamma = [2(1-2p)]^{2p-1} \frac{\Gamma(2-2p)}{\Gamma^2(1-p)}, \quad \sigma = \frac{(\eta-t)(t-\xi)}{2t(\eta+\xi)}.$$

By the definition of the class $R_2(p, q)$, it follows from (7) that the function $N(t)$ is continuous $N(t) \in C(0, 1)$ and integrable in $(0, 1)$. Since $-p > 0$, it is easy to see from the formula (6) that $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ and $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ exist and are continuous in \bar{D} .

References

1. *Makarov I. A.* Cauchy problem for an equation with two lines of degeneracy of the second kind // *Math. Phys. Kuybishev*, 1976. 3–7 (In Russian).
2. *Ergashev T. G., Komilova N. J.* The Kampé de Fériet series and regular solution of the Cauchy problem for degenerating hyperbolic equation of the second kind // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022. Vol. 43, no. 11. Pp. 3112–3124.
3. *Ergashev T. G., Komilova N. J.* Generalized solution of the Cauchy problem for hypergeometric equation with two lines of degeneracy of the second kind // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021. Vol. 42, no. 15. Pp. 3616–3625.

**CLASSICAL SOLUTION OF THE INITIAL-VALUE PROBLEM
FOR A SEMILINEAR WAVE EQUATION WITH A DIRAC POTENTIAL**

Korzyuk V.I.^{1,2,a}, Rudzko J.V.^{1,b}

¹*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*

²*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

^a*korzyuk@bsu.by*, ^b*janycz@yahoo.com*

In the domain $Q = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ of two independent variables $(t, x) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$, for the nonlinear wave equation of the form

$$\square u(t, x) - \Theta(t, x)\delta_{(t_0, x_0)}[u](t, x) = f(t, x, u(t, x)), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

we consider the initial-value problem with the initial conditions

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

where $\square = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ is the d'Alembert operator ($a > 0$ for definiteness), (t_0, x_0) is a point from the set Q , $\delta_{(t_0, x_0)}$ is the Dirac delta distribution concentrated at the point (t_0, x_0) (i.e., $\delta_{(t_0, x_0)}[u](t, x) = u(t_0, x_0)$), Θ is a function given on the set \overline{Q} , f is a function given on the set $\overline{Q} \times \mathbb{R}$, and φ and ψ are some real-valued functions defined on the real axis.

Equations of the form (1) with an ordinary differential operator instead of the d'Alembert operator were called as loaded in the paper [1]. In the articles [2, 3], equations of the form (1) were called "equations with loaded summands". Following [4], to refine the rather general concepts of "loaded equations" and "equations with loaded summands", we will use the specific term "equation with a Dirac potential" for Eq. (1).

Previously, in the case of an unloaded equation, i.e., $\Theta \equiv 0$, we considered the problem (1), (2) in the works [5–8]. In the linear case, i.e., $f(t, x, z) = f(t, x)$, the problem (1), (2) was studied in the articles [9, 10].

In the present report, using the results of the works [5–9] and Banach's fixed point theorem, we prove the following theorem.

Theorem. *Let the smoothness conditions*

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}),$$

$$\Theta \in C(\overline{Q}), \quad \left(\overline{Q} \ni (t, x) \mapsto \int_0^t \Theta(\tau, x \pm a(t - \tau)) d\tau \in \mathbb{R} \right) \in C(\overline{Q}),$$

the Lipschitz condition

$$|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq L(t, x)|z_1 - z_2|,$$

where $L \in L^2_{loc}(\overline{Q})$, and the smallness condition of the quantity t_0

$$\iint_{\Delta(t_0, x_0)} |L(\tau, \xi) + \Theta(\tau, \xi)| d\tau d\xi < 2a,$$

where

$$\Delta(t_P, x_P) = \{(t, x) : 0 \leq t \leq t_P \wedge |x - x_P| \leq a|t - t_P|\}, \quad (t_P, x_P) \in Q,$$

be satisfied. The Cauchy problem (1), (2) has a unique solution u in the class $C^2(\bar{Q})$.

In the future, it is planned to generalize the results obtained in the present report to various initial-boundary value problems.

References

1. *Nakhushev A. M.* Loaded equations and their applications // Differential Equations. 1983. Vol. 19, no. 1. Pp. 74–81.
2. *Sabitov K. B.* Initial-boundary problem for parabolic-hyperbolic equation with loaded summands // Russian Math. 2015. Vol. 59, no. 6. Pp. 23–33.
3. *Sabitova Yu. K.* Dirichlet problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation with loaded summands // Russian Math. 2018. Vol. 62, no. 9. Pp. 35–51.
4. *Baranovskaya S. N., Yurchuk N. I.* Cauchy problem for the Euler–Poisson–Darboux equation with a Dirac potential concentrated at finitely many given points // Differential Equations. 2020. Vol. 56, no. 1. Pp. 93–97.
5. *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* Classical and mild solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Math. 2023. Vol. 43. Pp. 48–63.
6. *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* Classical solution of the initial-value problem for a one-dimensional quasilinear wave equation // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. 2023. Vol. 67, no. 1. Pp. 14–19.
7. *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential // Differential Equations. 2022. Vol. 58, no. 2. Pp. 175–186.
8. *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential in a curvilinear quadrant // Differential Equations. 2023. Vol. 59, no. 8. Pp. 1075–1089.
9. *Baranovskaya S. N., Novikov E. N., Yurchuk N. I.* Directional derivative problem for the telegraph equation with a Dirac potential // Differential Equations. 2018. Vol. 54, no. 9. Pp. 1147–1155.
10. *Moiseev E. I., Yurchuk N. I.* Classical and generalized solutions of problems for the telegraph equation with a Dirac potential // Differential Equations. 2015. Vol. 51, no. 10. Pp. 1330–1337.

**ON SOME NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS
FOR SECOND ORDER ELLIPTIC SYSTEMS**

Koshanov B.^{1,a}, Bakytbek M.^{2,b}

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling*

²*Kazakh Academy of Transport and Communication named after M. Tynyshbayev,
Almaty, Kazakhstan; ^akoshanov@math.kz, ^b87759002818@mail.ru*

We consider an elliptical system

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

with constant coefficients $a_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times l}$.

Its solution is understood as l – vector function $u = (u_1, \dots, u_l)$ from class C^2 in the area under consideration, satisfying identical to equation (1). The ellipticity condition is that $\det a_{22} \neq 0$ and the characteristic polynomial

$$\chi(z) = \det P(z), \quad P(z) = a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2,$$

of degree $2l$ have no real roots.

Let ν_1, \dots, ν_m be all distinct roots of the polynomial χ , lying in the upper half-plane $\text{Im } z > 0$, which we also call the eigenvalues of the matrix polynomial $P(z)$.

Lemma 1. *There are matrices $b, J \in \mathbb{C}^{l \times l}$, such that*

$$\det \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \bar{b}J \end{pmatrix} \neq 0, \quad \sigma(J) = \{\nu_1, \dots, \nu_m\},$$

$$a_{11}b + (a_{12} + a_{21})bJ + a_{22}bJ^2 = 0.$$

The 1st order canonical system is closely related to the elliptic system (1)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad J = \text{diag } (J_1, \dots, J_m) \in \mathbb{C}^{l \times l}, \quad J_i \in \mathbb{C}^{l_i \times l_i}, \quad \sigma(J_i) = \{\nu_i\}$$

which, in particular, for $J = i$ corresponds to the Cauchy–Riemann system.

For equation (1) in the half-plane $D = \{y > 0\}$, consider the boundary value problem

$$(pu_x + qu_y + p_0u)|_{\mathbb{R}} = g. \quad (2)$$

We search the solution u in the class $C_{(\lambda)}^{1,\mu}(D; F)$, $0 < \lambda < 1$.

The right side g is selected from the class $C_{\lambda-\sigma}^{\mu}(D; F)$, $l \times l$ – the matrix coefficients p, q and p_0 are assumed to be piecewise continuous on \mathbb{R} with possible discontinuities at points $\tau \in F$. More precisely, there exists a $\varepsilon > 0$, such that

$$p, q \in C_{(\varepsilon)}^{\mu+\varepsilon}(G; a, b), \quad p_0 \in C_{\varepsilon-\sigma}^{\mu+\varepsilon}(G; a, b)$$

for any interval $G = (a, b)$, into which the complement $\mathbb{R} \setminus F_0$ is divided.

Theorem 1. Problem (1), (2) in class $\{u \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}, u(\infty) = 0\}$, $0 < \lambda < 1$, is equivalent to finding analytic vector functions in this class $\psi(z)$ by boundary condition

$$\operatorname{Re} (G\psi' + G_0\psi) \Big|_{\mathbb{R}} = g$$

with matrix coefficients $G = pb + qbJ$, $G_0 = p_0b$.

The connection between the solutions of these problems is carried out by the Bitsadze formula [1]

$$u = \operatorname{Re} bE\psi,$$

where the operation E is given block by block by the equality

$$(E\psi)_i = E_i\psi_i = \sum_{k=0}^{l_i-1} \frac{y^k}{k!} (J_i - \nu_i)^k \psi_i^{(k)}(x + \nu_i y), \quad z = x + iy, \quad i = 1, \dots, m.$$

Let us consider the case when the coefficients p, q in (2) are constant, and $p_0 = 0$, i.e. the problem

$$(pu_x + qu_y) \Big|_{\mathbb{R}} = g, \quad p, q \in \mathbb{R}^{l \times l}. \quad (3)$$

In this case, the matrix $G = pb + qbJ \in \mathbb{C}^{l \times l}$ and the statements of Theorem 1 can be significantly supplemented.

Theorem 2. a) If $\det G = 0$, then homogeneous problem (1), (3) in the class $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, $0 < \lambda < 1$, has an infinite number of linearly independent solutions. For example, if $G\eta = 0$ for some nonzero $\eta \in \mathbb{C}^l$, then the solutions to the homogeneous problem are the functions $u = \operatorname{Re} b(E\psi_0)\eta$ for any scalar analytic function $\psi_0 \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}$.

b) If $\det G \neq 0$, then the condition

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) dt = 0$$

is necessary and sufficient for the solvability of an inhomogeneous problem in the class $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, $0 < \lambda < 1$. Under the additional assumption $u(\infty) = 0$ its solution is unique and is given by the formula

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} b[t - z]^{-1} G^{-1} f(t) dt, \quad f(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt.$$

We introduce the concept of the conjugate function v to the solution u of equation (1). It is determined by the line integral

$$v(z) = v(z_0) + \int_{z_0}^z (a_{21}u_x + a_{22}u_y) dx - (a_{11}u_x + a_{12}u_y) dy.$$

For v we get the representation

$$v = \operatorname{Re} c\phi, \quad c = a_{21}b + a_{22}bJ.$$

Together with $u(z)$ this function also belongs to the class $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, $0 < \lambda < 1$.
 If we put

$$\begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ \bar{b}_2 & \bar{c}_2 \end{pmatrix}$$

for its inverse matrix, we can write the formula

$$\phi = 2(b_2u + c_2v).$$

From (2) we can go to the integrated boundary value problem

$$(pu + qv)|_{\mathbb{R}} = f$$

in class $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$, $0 < \lambda < 1$, where p_1, q_1 are again denoted by p, q .

As a simple example, consider for system (1) the boundary value problem

$$u(x, 0) + u(-x, 0) = f(x), \quad v(x, 0) + v(-x, 0) = g(x), \quad (4)$$

where f, g are given even l – vector functions.

Theorem 3. *Problem (1), (4) in class $u + iv \in C_{(\lambda)}^{\mu}(D, F)$, $0 < \lambda < 1$, is uniquely solvable and its solution is given by the formula*

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} b[t - z]^{-1} h(t) dt, \quad h = b_2 f + c_2 g,$$

where matrices b_2, c_2 appear when solving.

In [2], the Fredholm solvability of boundary value problems for elliptic systems was studied. In [3], the Fredholm solvability of boundary value problems for high-order elliptic equations was studied and the index formula for the problem was calculated.

The authors were supported by the grant no. AP19678182 of the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan.

References

1. *Bitsadze A. V.* On the uniqueness of the solution to the Dirichlet problem for elliptic partial differential equations // *Uspehi mat. nauk.* 1948. Vol. 3, no. 6. Pp. 153–154.
2. *Soldatov A. P.* Method of function theory in boundary value problems on the plane, I. Smooth case // *Izv. AN SSSR (ser.matem.)* 1991. Vol. 55, no. 5. Pp. 1070–1100.
3. *Koshanov B. D., Soldatov A. P.* Boundary value problem with normal derivatives for an elliptic equation in the plane // *Differential equations.* 2016. Vol. 52, no. 12. Pp. 1666–1681.

**BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FRACTIONAL DIFFUSION
EQUATION WITH A FRACTIONAL LOAD**

Kosmakova M., Izhanova K.

*Karaganda Buketov university, Karaganda, Kazakhstan;
svetlanamir578@gmail.com*

In a domain $G = \{(x, y, t) \mid -\infty < x, y < +\infty, t > 0\}$ find a solution to the equation

$${}_{RL}D_{0t}^{\alpha}u = u_{xx} + u_{yy} + \lambda \left\{ {}_{RL}D_{0t}^{\beta}u \right\} \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0} + f(x, y, t), \quad (1)$$

where ${}_{RL}D_{0t}^{\sigma}f(t)$ is a Riemann–Liouville derivative of the order σ , $0 < \sigma < 1$, and $0 < \beta \leq \alpha < 1$.

The solution of equation (1) must satisfy the initial condition:

$$\lim_{t \rightarrow 0} {}_{RL}D_{0t}^{\alpha-1}u = \varphi(x, y). \quad (2)$$

Let us denote

$$\mu(t) = \left\{ {}_{RL}D_{0t}^{\beta}u \right\} \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0}. \quad (3)$$

Then a solution of Problem (1)–(2) can be represented as [1, p. 174]:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha, 2}(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta + \\ &+ \lambda \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\tau) \Gamma_{\alpha, 2}(x - \xi, y - \eta, t - \tau) d\xi d\eta d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \tau) \Gamma_{\alpha, 2}(x - \xi, y - \eta, t - \tau) d\xi d\eta d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

where [1, p. 152]

$$\Gamma_{\alpha, 2}(x, y, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} f_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t^{\alpha/2}}, 1; 0 \right),$$

$$f_{\frac{\alpha}{2}}(z, \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{2}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \int_1^{+\infty} \phi(-\alpha/2; \sigma; -z\tau) (\tau^2 - 1)^{\mu/2-1} d\tau, & \mu > 0, \\ \phi(-\alpha/2; \sigma; -z), & \mu = 0, \end{cases}$$

$$\phi(-a, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(b - ak)}$$

is the Wright function.

Let's introduce the following functions:

$$\varphi_1(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \Gamma_{\alpha,2}(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta, \quad (5)$$

$$f_1(x, y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \tau) \Gamma_{\alpha,2}(x - \xi, y - \eta, t - \tau) d\xi d\eta d\tau. \quad (6)$$

Applying the Riemann–Liouville fractional differentiation operator of an order β to equality (4), substituting $x - 1 = t$ and $y - 1 = t$ and taking into account notations (3), (5), (6) we get an integral equation

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha - \beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t - \tau)^{\beta - \alpha + 1}} d\tau = f_2(t) + \varphi_2(t). \quad (7)$$

Here $0 < \beta - \alpha + 1 < 1$ and the functions $f_2(t)$ and $\varphi_2(t)$ are defined by formulas

$$f_2(t) = {}_{RL}D_{0t}^{\beta} f_1(x, y, t) \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0},$$

$$\varphi_2(t) = {}_{RL}D_{0t}^{\beta} \varphi_1(x, y, t) \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0}.$$

Solving integral equation (7), for example, [2], using the Laplace transform we obtain the solution to Problem (1)–(2), taking into account representation (4):

$$u(x, y, t) = \lambda \left(\psi(t) * \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) (t) +$$

$$+ \lambda^2 \left(\psi(t) * (t^{2\alpha-\beta-1} \mathcal{E}_{\alpha-\beta, 2\alpha-\beta}(\lambda t^{\alpha-\beta})) \right) (t) + \varphi_1(x, y, t) + f_1(x, y, t). \quad (8)$$

Theorem. *Function (8) is a solution to Problem (1)–(2), where the functions $\varphi_1(x, y, t)$ and $f_1(x, y, t)$ are defined by formulas (5), (6), respectively. $\mathcal{E}_{\alpha,b}(z)$ is a Mittag-Leffler function and*

$$\psi(t) = {}_{RL}D_{0t}^{\beta} (\varphi_1(x, y, t) + f_1(x, y, t)) \Big|_{x-1=t, y-1=t, t>0}.$$

Remark. In [3] the problem was studied for the one-dimensional case in the spatial variable.

Research was supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 09259780, 2021–2023).

References

1. *Pskhu A.V.* The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order // *Izv. RAN. Ser. Mat.* 2009. Vol. 73, no. 2. Pp. 141–182.
2. *Korn G.A., Korn T.M.* Handbook of mathematics for scientists and engineers. M.: Fizmatlit, 1973. (In Russian)

3. *Pskhu A.V., Ramazanov M.I., Kosmakova M.T.* Boundary value problem for a loaded fractional diffusion equation // *Turkish Journal of Mathematics*. 2023. Vol. 47, no. 5. Pp. 1585–1594.

**DECOMPOSITION ON THE ROOT VECTOR SERIES
OF THE NON-SELFADJOINT OPERATORS. THE CONVERGENCE
EXPONENT LESS OR EQUAL TO THE ORDER OF SUMMATION**

Kukushkin M. V.

*High School of Economics, Moscow, Russia
Institute of Applied Mathematics and Automation RAS, Nalchik, Russia
kukushkinmv@rambler.ru*

The first our aim is to clarify the results [1] obtained by Lidskii V. B. devoted to the decomposition on the root vector system of a non-selfadjoint compact operator. We use a technique of the entire function theory and introduce a so-called Schatten-von Neumann class of the convergence exponent. Considering strictly accretive operators satisfying special conditions formulated in terms of the norm, we construct a sequence of contours of the power type on the contrary to the results by Lidskii V. B., where a sequence of contours of the exponential type was used. This approach allows us to obtain a decomposition on the root vector series of the non-selfadjoint operators with the s -number asymptotics more subtle than one of the power type.

Finally, we produce applications to differential equations in the abstract Hilbert space. In particular, the existence and uniqueness theorems for fractional order evolution equations, with respect to the time variable, containing a differential operator with a fractional derivative in final terms are covered by the invented abstract method. In this regard such operators as the Riemann–Liouville fractional differential operator, the Kipriyanov operator, the Riesz potential, the difference operator, and other operators generated by strongly continuous semigroups of contractions can be involved [1].

References

1. *Lidskii V. B.* Summability of series in terms of the principal vectors of non-selfadjoint operators // *Tr. Mosk. Mat. Obs.* 1962. Vol. 11. Pp. 3–35.
2. *Kukushkin M. V.* Abstract fractional calculus for m -accretive operators // *International Journal of Applied Mathematics*. 2021. Vol. 34, no. 1.

**STOCHASTIC VIBRATIONS OF A STRING WITH MOVING
BOUNDARIES**

Litvinov V. L., Litvinova K. V.

Lomonosov Moscow State University, Moscow

The widespread use in technology of mechanical objects with moving boundaries necessitates the development of methods for their calculation. The paper considers stochastic vibrations of a string with moving boundaries. The case of a difference kernel makes it possible to reduce the problem

of analyzing a system of stochastic integro-differential equations to studying a system of stochastic differential equations. To estimate the expansion coefficients, it is proposed to use statistical numerical methods. The differential equation, boundary and initial conditions describing the vibrations of the string have the form [1]

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - 2vV_{\xi\tau}(\xi, \tau) - (1 - v^2)V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - d \int_{\xi}^{\xi+v\tau} K(-d(\xi - \eta))V_{\xi\xi}\left(\eta, \frac{1}{v}(\xi - \eta) + \tau\right) d\eta = F(\xi, \tau); \quad (1)$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V(1, \tau) = 0; \quad V(\xi, 0) = V_1(\xi); \quad V_{\tau}(\xi, 0) = 0. \quad (2)$$

Theorem. *The solution to problem (1), (2) can be given as a string*

$$V((\xi, \tau)) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\tau) \sin(\omega_n \xi).$$

The system of integro-differential equations is transformed into a system of random differential equations.

References

1. *Litvinov V. L.* Mathematical modeling of biogeochemical cycles in coastal systems of the South of Russia // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020. Vol. 26, no. 2. Pp. 188–199.

AN INSTANTANEOUS BLOW-UP OF SOLUTIONS OF CAUCHY PROBLEMS FOR SOBOLEV-TYPE NONLINEAR EQUATIONS ON THE HEISENBERG GROUP

Mamanazarov A. O.

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan; mamanazarovaz1992@gmail.com

In the present work, we consider the Cauchy problems of some nonlinear Sobolev-type equations on the Heisenberg group and study the instantaneous blow-up phenomenon of solutions to the considered problems.

We consider the following Cauchy problems for Sobolev-type nonlinear equations

$$\begin{cases} {}^C D_{+0,t}^{\alpha} \Delta_{\mathbb{H}} u + \Delta_{\mathbb{H}} u^m + |u|^q = 0, & 0 < \alpha < 1, \quad (t, \eta) \in (0, T) \times \mathbb{H}^n \\ u(0, \eta) = u_0(\eta), & \eta \in \mathbb{H}^n, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} {}^C D_{+0,t}^\beta \Delta_{\mathbb{H}} u + \Delta_{\mathbb{H}} u^m + |u|^q = 0, & 1 < \beta < 2, \quad (t, \eta) \in (0, T) \times \mathbb{H}^n \\ u(0, \eta) = u_0(\eta), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, \eta) = u_1(\eta), & \eta \in \mathbb{H}^n, \end{cases} \quad (2)$$

and study instantaneous blow-up of these problems, where ${}^C D_{+0,t}^\gamma$, $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ is Caputo fractional derivative of γ order, $\Delta_{\mathbb{H}}$ is the sub-Laplacian operator on the Heisenberg group \mathbb{H}^n , m, q are parameters such that $m > 1$, $q > 1$, $q > m$, and $u_0(\eta), u_1(\eta)$ are given functions on \mathbb{H}^n . For more information about the Heisenberg group, we note work [1].

We proved the following theorems.

Theorem 1. *Let $u_0 \in L_{loc}^q(\mathbb{H}^n)$. If*

$$1 < q \leq q_{cr} = \frac{Qm}{Q-2}$$

then the problem (1) has no local weak solution for any $T > 0$, i.e., there is an instantaneous blow-up of the local weak solution of the Cauchy problem (1), where $Q = 2n + 2$ is the homogeneous dimension of \mathbb{H}^n .

Theorem 2. *Let $u_0 \in L_{loc}^q(\mathbb{H}^n)$ and $u_1 \in L_{loc}^q(\mathbb{H}^n)$. If*

$$1 < q \leq q_{cr} = \frac{Qm}{Q-2}$$

then the problem (2) admits no nontrivial local weak solution for any $T > 0$, i.e., there is an instantaneous blow-up of the local weak solution of the Cauchy problem (2).

To prove our results we use the method of test functions.

References

1. *Ruzhansky M., Suragan D.* Hardy inequalities on homogeneous groups. Progress in Mathematics. Vol. 314. Birkhauser, Basel. 2019.

EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREMS FOR THE FIRST-ORDER NON-LINEAR IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTIPOINT BOUNDARY CONDITIONS

Mardanov M. J.^{1,a}, Sharifov Y. A.^{2,b}

¹*Institute of Mathematics and Mechanics*

²*Baku State University, Baku, Azerbaijan*

^a*misirmardanov@yahoo.com*, ^b*sharifov22@rambler.ru*

We study the existence and uniqueness of solutions of nonlinear differential equations of the type

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad t \neq \eta \in (0, T),$$

with multipoint boundary conditions

$$\sum_{i=0}^m l_i x(t_i) = \alpha,$$

and the impulsive condition

$$x(\eta^+) - x(\eta) = J(x(\eta)),$$

where l_i ($i = 1, 2, \dots, m$) are constant square matrices of order n such that $\det N \neq 0$, $N = \sum_{i=0}^m l_i$; $f : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$ and $J : R^n \rightarrow R^n$ are given functions; points t_i ($i = 1, 2, \dots, m$) satisfies the condition of $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = T$ and $\eta \in (t_k, t_{k+1})$, $\Delta x(\eta) = x(\eta^+) - x(\eta^-)$; where $x(\eta^+) = \lim_{h \rightarrow +0} x(\eta + h)$, $x(\eta^-) = \lim_{h \rightarrow +0} x(\eta - h) = x(\eta)$ are the right- and left-hand limits of $x(t)$ at $t = \eta$, respectively.

Banach contraction principle, Schaefer's and Krasnoselskii's fixed point theorem are particularly useful for proving the existence and uniqueness results. The main goal of this paper is to prove these results.

Similar problems for two-point and integral boundary value problems are considered in [1].

Reference

1. *Mardanov M. J., Sharifov Y. A., Aliyev H. N., Sardarova R. A.* Existence and uniqueness of solutions for the first order non-linear differential equations with multi-point boundary conditions // *European Journal of Pure and Applied Mathematics* 2020. Vol. 13, no. 3. Pp. 414–426.

DIRICHLET–NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH DELAY

Mazhghikhova M. G.

*Institute of Applied Mathematics and Automation of the KBSC RAS,
Nalchik, Russia; mazhghikhova.madina@yandex.ru*

We consider the delay differential equation with the fractional Riemann–Liouville derivative of the order $\alpha \in (n - 1, n]$, $n \in \mathbb{N}$

$$D_{0t}^\alpha u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t - \tau)u(t - \tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

where λ and μ are arbitrary constants, τ is positive constant, the Riemann–Liouville integro-differentiation operator is defined as

$$D_{0t}^\alpha g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{g(\xi) d\xi}{(t - \xi)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0; \\ g(t), & \alpha = 0; \\ \frac{d^n}{dt^n} D_{0t}^{\alpha-n} g(t), & n - 1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$\Gamma(z)$ is Euler's gamma function.

A regular solution to equation (1) is called a function $u(t)$, which satisfies the equation (1) and belongs to the class $D_{0t}^{\alpha-n}u(t) \in C^n(0,1)$, $u(t) \in L(0,1)$.

The problem is to find a regular solution to equation (1) that satisfies the boundary conditions

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-\beta_i} u(t) &= a_i, & i &= \overline{1, p}, \\ \lim_{t \rightarrow 1} D_{0t}^{\alpha-\delta_j} u(t) &= b_j, & j &= \overline{1, q}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $p + q = n$, a_i, b_j are given constants, β_i, δ_j are elements from the set $\{1, \dots, n\}$ and not repeated among themselves.

The Dirichlet–Neumann boundary value problem for equation (1) is studied. Green’s function for the problem (1), (2) is constructed. A condition for unique solvability is obtained. A theorem on the existence and uniqueness of solution to the problem is proved.

References

1. *Nakhushev A. M.* Fractional calculus and its application. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p. (in Russian).

TIME DEPENDENT INVERSE SOURCE PROBLEM FOR PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH MEMORY

Mukhambetkaliyev M. B.

*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
mukhambetkaliyevmurat@gmail.com*

In this work we study the following time dependent inverse source problem for the following pseudoparabolic equation with memory:

$$u_t(x, t) - \alpha \Delta u(x, t) - \beta \Delta u_t - \int_0^t K(t-\tau) \Delta u(x, \tau) d\tau = f(t)g(x, t) \text{ in } Q_T, \quad (1)$$

supplemented by the initial condition

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

and boundary condition

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad (3)$$

and the integral over determination condition

$$\int_{\Omega} (u\omega + \beta u_x \omega_x) dx = \varphi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Here, Q_T denotes the time-space cylinder $(0, T) \times \Omega$, $\Omega \subset R^d, d \geq 2$ is a bounded domain and T is a given positive constant.

Let's consider another algorithm to solving the same problem. Instead of condition (2) we will minimize the sum of squares of distances between hyperplane (1) and statistical points [1, 2]

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_1 \tilde{x}_{1i} + \alpha_2 \tilde{x}_{2i} + \dots + \alpha_k \tilde{x}_{ki} - \tilde{z}_i)^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_k^2 + 1} \rightarrow \min. \quad (4)$$

We introduce the following notations

$$A_i = \alpha_1 \tilde{x}_{1i} + \alpha_2 \tilde{x}_{2i} + \dots + \alpha_k \tilde{x}_{ki} - \tilde{z}_i, \quad \beta = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_k^2 + 1.$$

Then condition (4) can be rewritten in the form

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n A_i^2}{\beta} \rightarrow \min. \quad (5)$$

In order to find unknown coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ it is necessary to solve the equation systems of type (3) for expression (5).

It is easy to obtain from (5), that system of type (3) is cast to the form

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n A_i \tilde{x}_{1i} - \alpha_1 \left(\frac{\sum_{i=1}^n A_i^2}{\beta} \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^n A_i \tilde{x}_{2i} - \alpha_2 \left(\frac{\sum_{i=1}^n A_i^2}{\beta} \right) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n A_i \tilde{x}_{ki} - \alpha_k \left(\frac{\sum_{i=1}^n A_i^2}{\beta} \right) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

The solution of nonlinear system (6) can be obtained by iteration methods, for example, Newton's method. It is obvious that the solution of system (6) is not possess the property of uniqueness.

Calculations were carried out to find a linear correlation function depending on three variables using a prepositional algorithm. The final formula looks like this:

$$Y = 94.78 + 17.82X_1 - 34.11X_2 + 0.11X_3.$$

From the values of the obtained coefficients, it follows that the factor X_3 is insignificant and when analyzing statistical data or planning experiments it can be ignored.

References

1. *Oshkhunov M. M., Oshkhunova Z. M., Dzhanakulaeva M. A.* Non-classical variant of regressions analysis // Scientific bulletins Belgorod State University. Series: Mathematics, Physics. 2014. Vol. 34, no. 5 (176). Pp. 61–66.
2. *Oshkhunov M. M., Ulbasheva M. M.* About modification of least square method for the date approximation // 50 years of Development of Grid-Characteristic method, march 31 – april 3 2018, MIPT. Pp. 43.

**SHORT-TIME PROGNOSTIC MODELS FOR COVID-19 DISTRIBUTION
BY MODIFIED LEAST SQUARE METHOD**

**Oshkhunov M. M.^a, Zhazaeva E. M.^b, Bechelova A. R.^c,
Esankulova M. H.^d**

*Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nalchik,
Russia; ^amuaed@inbox.ru, ^bzhazaeva@list.ru, ^cbechelova1956@mail.ru,
^dkertbieva96@bk.ru*

Covid-19 distribution models by modified least square method are presented. Least square method is the minimization of sum square deflections of statistic points from strait line. Such method sometimes leads to non-uniqueness of solution. In contrast to the classical approach the value of dispersion in this ease is less than the same value for classical approximation in $1 + k^2$ times, where k -the coefficient for the tangent of the angle in classical linear approach. The many numerical experiment for prognosis of Covid-19 spread infection for KBR region from 1 April to end of Julian are presented. In the case of short-term forecast (no more than 10 days) the prognosis accuracy is more than 95 %. It means that errors between real number of cases and prognostic values is less than 5 %. These results are was used for management decision by government of KBR.

This program complex is recommended to be use for decision making about infections distribution on short-term in other regions with same problems. To solve the problem, two statistical approaches are considered.

1) Classical algorithm:

$$S(k, b) = \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (1)$$

The solution of problem (1) has a following form:

$$k = \frac{(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_l \tilde{y}_l)}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2}, \quad b = \bar{y} - k\bar{x}. \quad (2)$$

Here, $\tilde{x}_l = x_i - \bar{x}$, $\tilde{y}_l = y_i - \bar{y}$,

$$\bar{x} = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)}{n}, \quad \bar{y} = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)}{n}. \quad (3)$$

Classical approach of view (1) gives the single solution of the problem.

2) The modified non classic algorithm of least square method.

Let's consider the new algorithm for definition of k , b from the minimization condition of sum square deviation from statistic points to the straight line

$$S_2(k, b) = \sum_{i=1}^n \frac{(kx_i + b - y_i)^2}{k^2 + 1} \rightarrow \min.$$

The solution of this problem leads to the non-uniqueness in contrast to classical algorithm (2). It can be show that the solution of this problem has a form:

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2, \quad b_1 = \bar{y} - k_1\bar{x}, \quad b_2 = \bar{y} - k_2\bar{x}.$$

Here k_1, k_2 — solutions of equation

$$\left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{y}_i \right) k^2 + \left(\sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i^2 - \tilde{x}_i^2) \right) k - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{y}_i = 0.$$

Where $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \bar{y}, \bar{x}$ are calculated according to formulas (1)–(3).

It can be shown that new method leads to smaller approximation error than the classical one by $k^2 + 1$ times [1, 2].

Based on the official data provided by the Ministry of Health forecast schedules from April to July were calculated and plotted. Figure 1 shows one of the options for forecasting diseases in Kabardino-Balkaria.

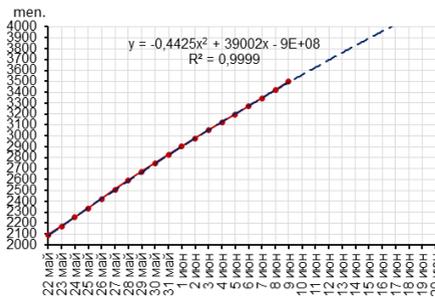


Figure 1: Favorable prognosis of COVID-19 morbidity in the Kabardino-Balkarian Republic from 22.05.2020 – 20.06.2020

The analysis of the data from the comparison with the real indicators of the disease showed that the forecast error does not exceed 3–5% for short-term forecasts (no more than 10 days). Based on the developed programs, the analysis of the latest data on coronavirus in the KBR was carried out.

References

1. *Oshkhunov M.M., Ulbasheva M.M.* About modification of least square method for the date approximation // 50 years of Development of Grid-Characteristic method, march 31 – april 3 2018, MIPT. P. 43.
2. *Lawson Ch., Henson R.* Numerical solution of problems by the method of least squares. M.: Science. 1986. 230 p.

COMPOSITE FINITE ELEMENT METHOD IMPLEMENTATION FOR
NONLINEAR PARABOLIC PROBLEMS IN NONCONVEX DOMAINS

Pramanick T.^{1,a}, Sinha R. K.^{2,b}

¹*Department of Mathematics, National Institute of Technology (NIT) Calicut, Kozhikode, India;* ²*Department of Mathematics, Indian Institute of Technology (IIT) Guwahati, Guwahati, India;* ^a*tamal@nitc.ac.in,* ^b*rajen@iitg.ac.in*

In this paper we address one of the major difficulties which is the non-convex behaviour of the domains while finding the solution of the problems. We study the nonlinear parabolic problem in nonconvex polygonal domain and for the approximation of the solution we use the Composite Finite Element (CFE) method, which is a classification of the Finite Element Method. The so called CFEs was first introduced by Hackbusch and Sauter, Numer. Math., 1997; 75:447-472 [1, 2, 3]. CFE discusses the two-scale discretization- the larger mesh also known as the coarse mesh with the size H and the smaller mesh, also known as the fine mesh with the size h [4, 5]. It helps in reducing the dimension of the domain space of consideration. The fine scale grid resolves the nonconvexity of the boundary whereas the coarse scale grid is comprised of larger grids at a suitable distance near the boundary. The degrees of freedom depends on the coarse grid.

This is the precedence of CFE over other methods, i.e., it eases the task of reducing the domain complexity. In this article, we consider two approaches- the semidiscrete analysis and the fully discrete analysis. In the fully discrete analysis both the time and space discretization is done using the backward Euler method. We study the error analysis in the $L^\infty(L^2)$ -norm. Also, we check for the optimal results and we have obtained the optimal results in both time and space. With this, we have also considered the linearized modifications of the nonlinear problems and derived the error analysis in the $L^\infty(L^2)$ -norm, which again gives the optimal order convergence in the nonconvex domains. As we are working on nonconvex domains, therefore reentrant corner is occur at the boundary. At the reentrant corner the analysis is not straightforward. We have derived newly estimates for Ritz projections or elliptic projections for the nonconvex domains and we have used the estimate in our error analysis. Finally, numerical computations are implemented to validate the theoretical results in various kind of nonconvex domains such as L -shaped, H -shaped and Zic-Zac domain.

We have considered the following nonlinear problem: For $u = u(x, t)$ and $I = (0, \bar{t}]$:

$$\begin{aligned} u_t - \nabla \cdot (a(u)\nabla u) &= f(u) \quad \text{in } \Omega, \quad t \in I, \\ u &= 0, \quad \text{on } \Gamma, \quad t \in I, \\ u(x, 0) &= v \quad \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

where Ω is a polygonal domain space which is bounded and nonconvex in \mathbb{R}^2 with boundary Γ . Here u_t is used for denoting $\frac{\partial u}{\partial t}$ and Δ is used for

denoting the Laplacian $\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

We assume a and f are smooth function on \mathbb{R} such that, for $u \in \mathbb{R}$,

$$0 < \mu \leq a(u) \leq M, \quad |a'(u)| + |f'(u)| \leq B. \quad (2)$$

The theorem for the error estimate is stated as follows:

Theorem. *Let u be the solution of (1) and U^n be the solution of fully discrete CFE formulation of (1). The under the assumption of (2), we have*

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq C\|v^{\text{CFE}} - v\| + C(u)(H^{2s} \widetilde{\text{Log}}^s(H/h) + k), \quad t_n \in \bar{I}, \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1.$$

Remark. Here $\widetilde{\text{Log}}^s(H/h) = \max\{\log(h_T/h_T^{\min}) : T \in \mathbb{T}_\Gamma\}$, where

$$\widetilde{\log}(h_T/h_T^{\min}) = \mathbb{C}_{\text{ol},1} \max_{\tau \in \mathfrak{s}(T)} (1 + \log(h_T/h_\tau)) \geq \mathbb{T}_{\text{ol}}(\tau), \quad \forall T \in \mathbb{T}_\Gamma.$$

References

1. *Hackbusch W., Sauter S. A.* Adaptive composite finite elements for the solution of PDEs containing nonuniformly distributed micro-scales // *Mater. Model.* 1996. Vol. 8, no. 9. Pp. 31–43.
2. *Hackbusch W., Sauter S. A.* A new finite element approach for problems containing small geometric details // *Arch. Math.* 1998. Vol. 34, no. 1. Pp. 105–117.
3. *Hackbusch W., Sauter S. A.* Composite finite elements for problems containing small geometric details // Part II: Implementation and numerical results. *Comput. Vis. Sci.* 1997. Vol. 1, no. 1. Pp. 15–25.
4. *Pramanick T., Sinha R. K.* Two-scale composite finite element method for parabolic problems with smooth and nonsmooth initial data // *J. Appl. Math. Comput.* 2018. Vol. 58, no. 1-2. Pp. 469–501.
5. *Pramanick T., Sinha R. K.* Error estimates for two-scale composite finite element approximations of parabolic equations with measure data in time for convex and nonconvex polygonal domains // *Appl. Numer. Math.* 2019. Vol. 143. Pp. 112–132.

TAKING INTO ACCOUNT THE STATE OF A DYNAMIC OBJECT AT CURRENT AND DELAYED MOMENTS IN TIME WHEN CONTROLLING IT WITH FEEDBACK

Providas E.^{1,a}, Parasidis I.^{1,b}, Guliyev S.Z.^{2,3,c}

¹*University of Thessaly, School of Technology, Greece;* ²*Azerbaijan State Oil and Industry University;* ³*Institute of Control Systems, Baku, Azerbaijan*
^a*providas@uth.gr,* ^b*paras@uth.gr,* ^c*azcpopal@gmail.com*

We study feedback control problems for dynamic, in the general case, nonlinear systems with lumped parameters, described by systems of ordinary differential equations, based on continuous and discrete feedback on the object's state. We assume that only a certain part of the phase vector components is controllable. Problems of this kind arise, for example, when

it is technically impossible to measure some parameters of the object's phase state in the online mode, or, for example, when the measurement data are characterized by large errors. Such components of the phase vector include, for example, the rate of change of the object's state with respect to spatial coordinates, which, as a rule, are measured indirectly or obtained by means of calculations.

To calculate the values of the parameters of the synthesized control, we propose to use the measured values of the observable components of the phase vector at the current and some past moments of time in order to compensate for the inability to measure all the components of the object's phase state. As a result, the process under consideration will be described by ordinary differential equations with time-constant delay arguments in the phase state. The stated feedback control problem is solved numerically by reducing it to a finite-dimensional optimization problem using the technique proposed in [3–6].

The essence of the proposed approach lies in the fact that the entire object's state space is initially divided into a finite number of subsets (the so-called "zones"), in each of which the parameters of the control actions, which depend on the measured values of a part of the phase state at the current and past moments of time, are assumed to be constant. This kind of parameters of the synthesized control are called "zonal". Since the number of phase space zones is finite, the number of optimizable parameters in the reduced problem will be finite. Accordingly, in the long run, the original feedback problem is reduced to a specific problem of parametric optimal control, namely, to a finite-dimensional conditional optimization problem.

References

1. *Rapaport E. Ya.* Optimal Control of Systems with Distributed Parameters. Moscow: Higher School, 2009. 676 p. (in Russian)
2. *Fursikov A. V.* Optimal control of distributed systems: Theory and applications. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1999. 305 p.
3. *Aida-zade K. R., Guliyev S. Z.* Hydraulic resistance coefficient identification in pipelines // Autom. and Rem. Cont. 2016. Vol. 77, no. 7. Pp. 1225–1239.
4. *Guliyev S. Z.* On numerical solution of one class of inverse problems for discontinuous dynamic systems // Journal of Automation and Information Sciences 2013. Vol. 45, no. 7. Pp. 74–86.
5. *Aida-zade K. R., Guliyev S. Z.* Hydraulic resistance coefficient identification in pipelines // Autom. and Rem. Cont. 2012. Vol. 73, no. 5. Pp. 786–796.
6. *Aida-zade K. R., Guliyev S. Z.* Numerical solution of nonlinear inverse coefficient problems for ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. Vol. 51, no. 5. Pp. 803–815.
7. *Parasidis I., Providas E.* Exact solutions to problems with perturbed differential and boundary operators. In: Rassias T., Zagrebnov V., Eds. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Analysis and Operator Theory. Springer Optimization and Its Applications, 2019. Vol. 46, Cham.: Springer

Pyatkov S. G.

Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russia; pyatkov@math.nsc.ru

We examine the parabolic equation

$$Mu = u_t - Lu = f, \quad Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(t, x) u_{x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(t, x) u_{x_i} - a_0(t, x) u, \tag{1}$$

where $x \in G, t \in (0, T), G \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with boundary Γ of class C^2 . Let $Q = (0, T) \times G, S = (0, T) \times \Gamma$. We assume that a domain G is divided into two open sets G^+ and $G^-, \overline{G^-} \subset G, \overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \emptyset$. Let $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-, S_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$. The equation (1) is furnished with the initial and boundary conditions

$$B(t, x)u|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

where $Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \beta u$ or $Bu = u, \frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_j}(t, x) n_i$, with $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ the outward unit normal to S , and the transmission conditions

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(t, x) - \sigma(t, x)(u^+(t, x) - u^-(t, x)) = g^+(t, x), \quad (t, x) \in S_0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial u^+}{\partial N}(t, x), \quad (t, x) \in S_0, \tag{4}$$

where

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t, x_0) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \nu_j, \quad u^\pm(t, x_0) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} u(t, x)$$

and ν is the unit outward normal to ∂G^- . The inverse problem is to find a solution u to the problem (1)–(4) and the function $\sigma = \sum_{i=1}^m q_i(t) \Phi_i(t, x)$, where the functions q_i are unknowns and $\{\Phi_i(t, x)\}$ are some basis functions. It is naturally to assume that they depend only on x but it is possible to take them depending on all variables. We consider two classes of overdetermination conditions. In the former case we use additional integral data of the form

$$\int_G u(t, x) \varphi_k(x) dx = \psi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{5}$$

In the latter case we use the pointwise overdetermination condition.

$$u(t, b_j) = \psi_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, m, b_j \in G). \tag{6}$$

The inverse problem on the form (1)–(5) or (1)–(4), (6) or close to them arise in various problems of mathematical physics: control of heat transfer

processes and design of thermal protection, diagnostics and identification of heat transfer in supersonic heterogeneous flows, identification and modeling of heat transfer in heat-shielding materials and coatings, modeling of properties and thermal regimes of reusable thermal protection aerospace vehicles, composite materials, ecology, etc. A particular attention is paid to numerical methods for solving the problems. The transmission condition (3), (4) agree with the conventional imperfect contact condition at the interface.

We study the conditions on the data and the coefficients of the problems which ensure well-posedness of the problems (1)–(5) or (1)–(4), (6). In particular, we obtain existence and uniqueness of solutions to these problems in Sobolev classes.

**ON WEAKLY PERIODIC p -ADIC GENERALIZED GIBBS MEASURES
FOR THE p -ADIC ISING MODEL ON THE CAYLEY TREE
OF ORDER THREE**

Rahmatullaev M.^{1,2,a}, Abdukahorova Z.^{2,b}

¹ *V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of
Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

² *Namangan state university, Namangan, Uzbekistan*

^a *mrahmatullaev@rambler.ru, ^b zulkumorabdukaxorova@gmail.com*

Let \mathbb{Q} be the field of rational numbers. For a fixed prime p , every rational number $x \neq 0$ can be represented in the form $x = p^r \frac{n}{m}$, where $r, n \in \mathbb{Z}$, m is a positive integer, and m and n are relatively prime with p . The p -adic norm of x is given by

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

This norm is non-Archimedean and satisfies the strong triangle inequality $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ for all $x, y \in \mathbb{Q}$.

The completion of \mathbb{Q} with respect to the p -adic norm defines the p -adic field \mathbb{Q}_p (see [1]).

We consider p -adic Ising model on the Cayley tree Γ^k . Let $\Phi = \{-1, 1\}$. A configuration σ on V is defined by the function $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$. Similarly, one can define the configuration σ_n and $\varphi^{(n)}$ on V_n and W_n , respectively. The set of all configurations on V (resp. V_n, W_n) is denoted by $\Omega = \Phi^V$ (resp. $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}, \Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$).

A formal p -adic Hamiltonian $H : \Omega \rightarrow \mathbb{Q}_p$ of the p -adic Ising model is defined by

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y),$$

where $0 < |J|_p < p^{-1/(p-1)}$.

We define a function $h : x \rightarrow h_x, \forall x \in V \setminus \{x_0\}, h_x \in \mathbb{Q}_p$ and consider p -adic probability distribution $\mu_h^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_h^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n^{(h)}} \exp_p\{H_n(\sigma_n)\} \prod_{x \in W_n} h_x^{\varphi^{(n)}(x)} \quad n = 1, 2, \dots,$$

where $Z_n^{(h)}$ is the normalizing constant

$$Z_n^{(h)} = \sum_{\varphi \in \Omega_{V_n}} \exp_p \{H_n(\varphi)\} \prod_{x \in W_n} h_x^{\varphi^{(n)}(x)}.$$

A p -adic probability distribution $\mu_h^{(n)}$ is said to be consistent if for all $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$, we have

$$\sum_{\varphi^{(n)} \in \Omega_{W_n}} \mu_h^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \varphi^{(n)}) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1}).$$

In this case, by the p -adic analogue of the Kolmogorov theorem there exists a unique measure μ_h on the set Ω such that $\mu_h(\{\sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}) = \mu_h^{(n)}(\sigma_n)$ for all n and $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ (see [3]).

Let G_k^* be a normal subgroup of the group G_k and

$$G_k/G_k^* = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}, \quad r \geq 1$$

be a quotient group.

Definition 1. A set of quantities $h = \{h_x, x \in G_k\}$ is called G_k^* -periodic if $h_x = h_i$ for all $x \in H_i$. A G_k -periodic function is called translation-invariant.

Definition 2. A set of quantities $h = \{h_x, x \in G_k\}$ is called G_k^* -weakly periodic if $h_x = h_{ij}$ for any $x \in H_i$ and $x_j \in H_j$.

Definition 3. A p -adic generalized Gibbs measure μ_h is said to be G_k^* -(weakly) periodic if it corresponds to a G_k^* -(weakly) periodic h . A G_k -periodic measure is called a translation-invariant measure.

Let

$$H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ is an even number}\},$$

where $\emptyset \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, 3, \dots, k+1\}$, and $\omega_x(a_i)$ is the number of letters a_i in a word $x \in G_k$. Note that H_A is a normal subgroup of the G_k (see [2]). The H_A -weakly periodic collection h_x has the following form

$$h_x = \begin{cases} h_{00}, & \text{if } x \in H_A, & x_\downarrow \in H_A, \\ h_{01}, & \text{if } x \in H_A, & x_\downarrow \in G_k \setminus H_A, \\ h_{10}, & \text{if } x \in G_k \setminus H_A, & x_\downarrow \in H_A, \\ h_{11}, & \text{if } x \in G_k \setminus H_A, & x_\downarrow \in G_k \setminus H_A. \end{cases}$$

Denote $I = \{h_{00} = h_{11}, h_{01} = h_{10}\}$.

Theorem 1. Let $k = 3$ and $|A| = 1$. Then all H_A -weakly periodic p -adic generalized Gibbs measures on the set I_2 are translation-invariant or H_A -weakly periodic.

References

1. Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. V. p -adic analysis and mathematical physics. Singapore: World Sci., 1994.
2. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. Singapore: World Sci., 2013.

3. *Khakimov O. N.* On a generalized p-adic Gibbs measure for Ising model on trees // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl., 2014. 6(3). Pp. 207–217.

**A FREE BOUNDARY PROBLEM FOR A QUASILINEAR
LESLIE-GOWER PREY-PREDATOR SYSTEM**

Rasulov M. S.

*V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of
Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; rasulovms@bk.ru*

In biomathematics, the interactions among species and the spatial distributions of populations have always been the hot topics of ecosystems, and are important for developing research on economic benefits, pest control, and environmental governance. The Leslie-Gower predator-prey model has been deeply studied in [1, 2].

In this article, we study a diffusive Leslie-Gower predator-prey system with free boundary:

$$u_t - (d_1(u, v) u_x)_x = u(a_1 - b_1 u) - c_1 uv, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < s(t), \quad (1)$$

$$v_t - (d_2(u, v) v_x)_x = v \left(a_2 - \frac{b_2 v}{u + c_2} \right), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < s(t), \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq s(0) \equiv s_0, \quad (3)$$

$$v(0, x) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \quad (4)$$

$$u_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$v_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

$$v(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$s'(t) = -\mu(u_x(t, s(t)) + \rho v_x(t, s(t))), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

where $s(t)$ is a free boundary to be determined, $s_0, \mu, \rho, d_i, m_i, a_i, b_i, c_i$ ($i=1,2$) are given positive constants.

Assume that the data of the problem satisfy the following conditions:

a) $d_i(u, v) \in C^{1+\alpha}(D)$, $0 < \alpha < 1$, $d_i(u, v) \geq d_{i0} > 0$, $d_{i0} = \text{const}$, $i = 1, 2$;

b) $u_0(x) \in C^{2+\alpha}$, $0 < u_0(x) < M_1$, $0 \leq x \leq s_0$,

$$u'_0(0) = 0, \quad u_0(s_0) = 0, \quad u'_0(s_0) < 0,$$

$$v_0(x) \in C^{2+\alpha}, \quad 0 \leq v_0(x) \leq M_2, \quad 0 \leq x \leq s_0,$$

$$v'_0(0) = 0, \quad v_0(s_0) = 0, \quad v'_0(s_0) < 0,$$

c) $\lim_{x \rightarrow s_0} \frac{u_0(x)}{s_0 - x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow s_0} \frac{v_0(x)}{s_0 - x} = 0$.

From a biological point of view, model (1)–(9) describes how the two species evolve if they initially occupy the bounded region $[0, s_0]$. The homogeneous Neumann boundary condition at $x = 0$ indicates that the left boundary is fixed, with the population confined to move only to right of the

boundary point $x = 0$. We assume that both species have a tendency to emigrate thought the right boundary point to obtain their new habitat: the free boundary $x = s(t)$ represents the spreading front.

In this article, we have been working under the following assumption:

$$c_1 c_2 + c_1 < 1.$$

Problem (1)–(9) was studied in [2] in the case $d_i = \text{const}$, $i = 1, 2$.

First of all, by using the method based on the construction of a priori estimates, we find the restrictions imposed on the parameters of the problem under which it is globally solvable. The first fundamental estimate gives the required initial information with the help of which we can move step by step upward along the scale of Banach spaces and obtain more and more complete and exact data about the constructed solution.

Theorem 1. *Suppose that functions $(s(t), u(t, x), v(t, x))$ give a solution of problem (1)–(9). Then there exist positive constants M_1 and M_2 independent of T for which the estimates*

$$0 < u(t, x) \leq M_1, \quad (t, x) \in D,$$

$$0 < v(t, x) \leq M_2, \quad (t, x) \in D,$$

$$0 < s'(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Theorem 2. *Let all the assumptions of Theorem 1 be satisfied, in addition,*

$$\frac{d}{dx} d_1(u, v) > 0, \quad \frac{d}{dx} d_2(u, v) > 0.$$

Then $s'(t) \leq M_3$, where M_3 depends solely on the data of the problem and is independent of T .

References

1. Liu Y., Guo Z., El Smaily M., Wang L. Biological invasion in a predator-prey model with a free boundary // *Boundary Value Problems*. 2019. Vol. 33, no. 22.
2. Liu Y., Guo Z., El Smaily M., Wang L. A Leslie-Gower predator-prey model with a free boundary // *Discrete and Continuous Dynamical Systems – S*. 2019. Vol. 12, no. 7. Pp.2063–2083.

STOCHASTIC STABILITY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

Shumafov M. M., Tlyachev V. B.

Adyge State University, Maykop, Russia; magomet_sh@mail.ru

Over the last five decades, the theory of stochastic differential equations has developed rapidly. Many results concerning the stochastic stability were obtained by Kushner [1], Khasminskii [2], L. Arnold, Friedman [4], Mao [5] and other researches.

The stability property and related questions for some classes of linear and nonlinear stochastic differential equations of the second order were studied in papers [6–10]. Some special cases are considered in books [1–5].

The aim of this talk is to present some new results concerning the globally asymptotic stability in probability of solutions for stochastic differential equations of the second order, which are typical for nonlinear dynamics.

Here we formulate one of our results.

Firstly, we give the definition of stochastic stability.

Consider a stochastic system

$$dx(t) = f(x)dt + \sigma(x)d\xi(t), \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ is a vector function, $\sigma(x)$ is a $(n \times m)$ -matrix function, $\xi(t)$ is a m -dimensional Wiener process. Assume that $f(0) = \sigma(0) = 0$.

Definition. A trivial solution $x(t, \omega) \equiv 0$ of the system (1) is said to be globally asymptotically stochastically stable for $t \geq 0$, if for any $t_0 \geq 0$ $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} P\{\sup_{t \geq t_0} \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon\} = 1,$$

and moreover, for any $r > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\|x(t; t_0, x_0)\| > r\} = 0.$$

Here ω is an elementary event, P denotes probability.

Consider the stochastic Levinson–Smith equation

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = \sigma(\dot{x})\dot{\xi}(t), \quad (2)$$

where $\dot{\xi}(t)$ is a “white noise”.

The equation (2) can rewrite as a system of two equations

$$dx = ydt, \quad dy = [-yf(x, y) - g(x)]dt + \sigma(y)d\xi(t). \quad (3)$$

Assume that the functions $f(x, y)$, $g(x)$ and $\sigma(y)$ satisfy the Lipschitz condition in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R} respectively.

The following statement holds.

Theorem. Suppose there exist numbers b and σ_0 such that

- 1) $f(x, y) > b$ for all x, y ,
- 2) $xg(x) > 0$ for all $x \neq 0$,
- 3) $\int_0^x g(s)ds \rightarrow \infty$ as $|x| \rightarrow \infty$,
- 4) $0 < \sigma(y)/y < \sigma_0^2$,
- 5) $\sigma_0^2 < 2b$.

Then the trivial solution $(x(t, \omega) \equiv 0, y(t, \omega) \equiv 0)$ of the system (3) is globally asymptotically stochastically stable.

The proof of the theorem is based on Lyapunov-like function method developed by Kushner and Khasminskii for the stochastic equations.

References

1. *Kushner H. J.* Stochastic stability and control. New York: Academic Press, 1967. 198 p.
2. *Khasminskii R. Z.* Stochastic stability of differential equations. New York: Springer Berlin, Heidelberg, 2012. 342 p.
3. *Arnold L.* Stochastic differential equations: Theory and Applications. New York: John Wiley and Sons, 1974. 228 p.
4. *Friedman A.* Stochastic differential equations and applications. Vol. 1. New York: Academic Press, 1975. 248 p.
5. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. Chichester: Horwood Publishing Limited, 2007. 422 p.
6. *Kushner H. J.* On the construction stochastic Lyapunov functions // IEEE Trans. Aut. Control. 1965. Vol. 10, no. 4. Pp. 477–478.
7. *Shumafov M. M.* Construction of Lyapunov functions for some second-order nonlinear stochastic differential equations and questions of stability // Differ. Uravn. 1981. Vol. 17, no. 6. Pp. 1143–1145.
8. *Shumafov M. M.* On the dissipativity of random processes defined by some nonlinear second-order differential equations // Differ. Uravn. 1993. Vol. 29, no. 1. Pp. 175–176.
9. *Shumafov M. M.* On the stochastic stability of some two-dimensional dynamical systems // Differ. Uravn. 2010. Vol. 46, no. 6. Pp. 892–896.
10. *Shumafov M. M., Tlyachev V. B.* Construction of Lyapunov functions for second-order linear stochastic stationary systems // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. 2018. no. 149. Pp. 118–128.

INVERSE SOURCE PROBLEM FOR THE SPACE-TIME FRACTIONAL PARABOLIC EQUATION ON A STAR GRAPH WITH INTEGRAL OVER-DETERMINATION CONDITION

Sobirov Z. A.^{1,2,a}, **Turemuratova A. A.**^{2,3,b}

¹*V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan;* ²*National University of Uzbekistan;*

³*Branch of Russian Economic University named after G. V. Plekhanov in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan*

^a*z.sobirov@nuu.uz,* ^b*ariuxanturemuratova@gmail.com*

We consider the star graph Γ with n bonds consists of a finite set of vertices $V = \{\nu_k\}_0^n$ and a finite set of edges $E = \{e_k\}_1^n$, where e_k connect the vertices V_0 and V_k , $k = \overline{1, n}$ [1]. By assigning the interval $(0, l_k)$, to the bond e_k , $k = \overline{1, n}$ of the graph we define the coordinates x_k on each of the bonds. Where the vertex of the graph has a coordinate 0 in each bond. Further, without loss of generality, we will use x instead of x_k .

We are interested in the following inverse source problem for the space-time fractional parabolic equations

$$\partial_{0,t}^\alpha u^{(k)}(x, t) + \partial_{x,l_k}^\beta (\gamma^{(k)}(x) D_{0,x}^\beta u^{(k)}(x, t)) = f(t)g^{(k)}(x, t), \quad k = \overline{1, n},$$

$$\begin{aligned}
u^{(k)}(x, 0) &= 0, \quad x \in \bar{e}_k, \quad k = \overline{1, n}, \\
I_{0,x}^{1-\beta} u^{(1)}(0, t) &= I_{0,x}^{1-\beta} u^{(2)}(0, t) = \dots = I_{0,x}^{1-\beta} u^{(n)}(0, t), \\
\sum_{k=1}^n (\gamma^{(k)}(0) D_{0,x}^\beta u^{(k)}(0, t)) &= 0, \quad t \in (0, T], \\
I_{0,x}^{1-\beta} u^{(k)}(l_k, t) &= 0, \quad t \in (0, T], \quad k = \overline{1, n},
\end{aligned}$$

where $\partial_{0,t}^\alpha$ denotes the generalized left Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (0, 1)$ with respect to the time variable t , $D_{0,x}^\beta$ and ∂_{x,l_k}^β , $k = \overline{1, n}$ stand for the left Riemann–Liouville and the right Caputo generalized fractional derivatives of order $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ with respect to the spatial variable x , $I_{0,x}^{1-\beta}$ is the left Riemann–Liouville fractional integral of order $1 - \beta$. The real-valued functions $\gamma^{(k)}(x) \in C[0, l_k]$ satisfy condition $0 < p_1 \leq |\gamma^{(k)}(x)| \leq p_2$, $g^{(k)}(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ are known functions.

Also, we give an integral overdetermination condition in the following way

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \eta^{(k)}(x) u^{(k)}(x, t) dx = \psi(t), \quad t \in (0, T],$$

where $\eta^{(k)}(x)$, $k = \overline{1, n}$, $\psi(t)$ are given functions.

We investigate the inverse source problem of founding unknown functions $\{u, f\}$ with the use of the integral over-determination condition [2]. We reduced the inverse problem to the operator-based equation and proved that the corresponding resolvent operator is well-defined and continuous from $L_2[0, t]$ to $L_2[0, t]$.

References

1. Berkolaiko G., Kuchment P. Introduction to quantum graphs // Mathematical surveys and monographs, AMS. 2013. Vol. 186.
2. Kamiynin V. L. On the solvability of the inverse problem for determining the right-hand side of a degenerate parabolic equation with integral observation // Mathematical Notes. 2015. Vol. 98, no. 5. Pp. 765–777.

ON THE MATHEMATICAL MODEL OF TUMOR-IMMUNE INTERACTIONS

Takhirov J. O.

Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan; prof.takhirov@yahoo.com

Progress in tumor immunology and advances in immunotherapy suggest that the immune system plays an important role in the fight against tumor cells [1–3]. Therefore, it is important to investigate the algorithms underlying the immune response to tumor cells using mathematical models.

To study the interaction of immune cells and tumor cells, the authors of [4] propose a mathematical model covering those elements of the immune system that play an important role in controlling tumor growth. The model

consists of three components: NK cells, CTLs and tumor cells. Both tumor cells and NK cells are expected to grow logistically.

The model is built on the basis of the following basic assumptions:

- the growth of the tumor cell population is exponential for small quantities. Growth slows at larger population sizes;
- NK cells are present and active in the host body constantly, even in the absence of tumor cells;
- NK and CTL cells are capable of killing tumor cells. But CTLs play a leading role in the destruction of tumors as part of adaptive immunity.

The ODE model describing the growth, death and interactions of these populations is defined as follows:

$$N'(t) = aN(t)(1 - bN(t)) - \alpha_1(t)T(t),$$

$$L'(t) = rN(t)T(t) - \mu L(t) - \beta_1 L(t)T(t),$$

$$T'(t) = cT(t)(1 - dT(t)) - \alpha_2 N(t)T(t) - \beta_2 L(t)T(t),$$

with initial conditions $N(0) = N_0 \geq 0$, $L(0) = L_0 \geq 0$ and $T(0) = T_0 \geq 0$.

Here $N(t)$, $L(t)$ and $T(t)$ are the number of NK cells, CTL and tumor cells at time t , respectively. The parameters a , b , c , d , r , μ , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 are positive constants.

The main novelty of this model lies in the integration of the dynamics of important parts of the immune system. The main advantage of this model is the use of two populations of immune cells to reduce tumor burden and a clear understanding of the interaction between tumor cells and the immune system.

To study the influence of spatial dynamics on this model, we propose to extend it to include spatial diffusion. When constructing models, it is assumed that the disease spreads throughout the entire territory at once, despite the fact that infectivity is initially limited to a very small part of the territory. But diseases always spread gradually. To model the gradual spread of a disease, it is best to describe the process using free boundary problems. This method is widely used in mathematical modeling of many medical, biological and physical processes.

References

1. *Lopez A. G. et al.* Destruction of solid tumors by immune cells // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. Vol. 44. 2017. Pp. 390–403.
2. *Bottcher J. P. et al.* NK cells stimulate recruitment of cDC1 into the tumor microenvironment promoting cancer immune control // Cell. Vol. 172. 2018. Pp. 1022–1037.
3. *Dianat-Moghadam H. et al.* Natural killer cell-based immunotherapy: From transplantation toward targeting cancer stem cells // J. Cell Physiol. Vol. 234. 2019. Pp. 259–273.
4. *Ge Song et al.* A mathematical model of cell-mediated immune response to tumor // MBE. Vol. 18, no. 1. 2020. Pp. 373–385.

**SPECTRA OF THE ENERGY OPERATOR OF TWO-MAGNON
SYSTEMS WITH FOUR-SPIN EXCHANGE HAMILTONIAN
IN THE LATTICE**

Tashpulatov S. M.

*Institute of Nuclear Physics of the Academy of Science of the Republic
of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru, toshpul@inp.uz

In theoretical investigations of magnetically ordered systems and in the interpretation of experimental data, the starting point was usually the Heisenberg exchange Hamiltonian (for arbitrary spin s),

$$H = J \sum_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}), \quad (1)$$

where J is the parameter of the bilinear exchange interaction between the nearest-neighbor atoms, \vec{S}_m is the atomic spin operator for the spin s at the m th lattice site in the ν - dimensional lattice Z^ν , and the summation over τ ranges the nearest neighbors. For an arbitrary spin s , the isotropic spin exchange Hamiltonian in fact has the form [1]

$$H = \sum_{m,\tau} \sum_{n=1}^{2s} J_n (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau})^n, \quad (2)$$

where J_n are the parameters of the multipole exchange interactions between the nearest-neighbor atoms. Hamiltonian (2) coincides with (1) only for $s = \frac{1}{2}$, whereas if $s > \frac{1}{2}$, then some terms containing higher degrees of $(\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau})$ appear, which must be taken into consideration in studying magnets with spins $s > \frac{1}{2}$. Expression (2) is called a non-Heisenberg Hamiltonian.

In crystals, it is also necessary to take into account that in addition to the two-spin exchange, there is also a multi-spin exchange. In the general case, the isotropic exchange Hamiltonian has the form

$$H = - \sum_n \sum_{\langle f \rangle} J_n (f_1, f_2, \dots, f_n) (\vec{S}_{f_1} \vec{S}_{f_2}) \dots (\vec{S}_{f_{2n-1}} \vec{S}_{f_{2n}}).$$

For the first time, attention was drawn to the existence of multi-spin exchange in [2] and [3], when analyzing the quasi-polar model of metal, although, in fact, the considerations given there were based only on the properties of the symmetry of the exchange interaction. Here we consider two-magnon system with four-exchange Hamiltonian. Hamiltonian of the considering system has the form

$$H = J \sum_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}) (\vec{S}_{m+2\tau} \vec{S}_{m+3\tau}), \quad (3)$$

where $J < 0$ parameter, $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ is the atom spin operator in the site $m \in Z^\nu$, $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, here e_j are unit mutually orthogonal vectors. Hamiltonian (3) acts in the symmetric Fock space \mathcal{H}_{symm} .

We let φ_0 denote the vector, called the vacuum, uniquely defined by the conditions $S_m^+ \varphi_0 = 0$, and $S_m^z \varphi_0 = s \varphi_0$, where $\|\varphi_0\| = 1$. We set $S_m^\pm = S_m^x \pm i S_m^y$, where S_m^+ and S_m^- are the magnon creation and annihilation operators at the site m . The vectors $S_m^- S_n^- \varphi_0$ describes the state of the system of two magnons at the sites m and n with spin s . The vector space spanned by them denoted by \mathcal{H}_2 . We denote the restriction of H to the space \mathcal{H}_2 by H_2 .

Theorem 1. *The space \mathcal{H}_2 is invariant under the operator H . The operator H_2 is a bounded self-adjoint operator; it generates a bounded self-adjoint operator \overline{H}_2 acting in the space $l_2((Z^\nu)^2)$ as*

$$\begin{aligned} (\overline{H}_2 f)(p, q) = & J \sum_{p, q, \tau} \{ [2s^2 \delta_{p, q+2\tau} + 2s^2 \delta_{p+2\tau, q} + s^2 \delta_{p+\tau, q} + s^2 \delta_{p, q+\tau} + s^2 \delta_{p+3\tau, q} + \\ & + s^2 \delta_{p, q+3\tau}] f(p, q) + (-s^2 \delta_{p+3\tau, q} - 2s^2 \delta_{p+2\tau, q} - s^2 \delta_{p+\tau, q}) f(p - \tau, q) + \\ & + (-s^2 \delta_{p, q+3\tau} - 2s^2 \delta_{p, q+2\tau} - s^2 \delta_{p, q+\tau}) f(p, q - \tau) + (-s^2 \delta_{p+3\tau, q} - 2s^2 \delta_{p+2\tau, q} - \\ & - s^2 \delta_{p+\tau, q}) f(p + \tau, q) + (-s^2 \delta_{p, q+3\tau} - 2s^2 \delta_{p, q+2\tau} - s^2 \delta_{p, q+\tau}) f(p, q + \tau) + \\ & + 2s^2 \delta_{p+2\tau, q} f(p - \tau, q - \tau) + (s^2 \delta_{p+3\tau, q} + s^2 \delta_{p, q+\tau}) f(p + \tau, q - \tau) + \\ & + (s^2 \delta_{p, q+3\tau} + s^2 \delta_{p+\tau, q}) f(p - \tau, q + \tau) + 2s^2 \delta_{p+2\tau, q} f(p + \tau, q + \tau) \}, \end{aligned}$$

where $\delta_{k, j}$ is the Kronecker symbol. The operator H_2 acts on the vector $\psi \in \mathcal{H}_2$ by the formula $H_2 \psi = \sum_{p, q} (\overline{H}_2 f)(p, q) S_p^- S_q^- \varphi_0$.

Let $\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^2) \rightarrow L_2((T^\nu)^2) \equiv \mathcal{H}_2$ be the Fourier transform, where T^ν is the ν -dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i.e., $\lambda(T^\nu) = 1$. We set $\tilde{H}_2 = \mathcal{F} \overline{H}_2 \mathcal{F}^{-1}$.

Theorem 2. *The Fourier transform of operator \overline{H}_2 is an operator $\tilde{H}_2 = \mathcal{F} \overline{H}_2 \mathcal{F}^{-1}$ acting in the space $L_2^{symm}((T^\nu)^2)$ by the formula*

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_2 f)(\lambda, \mu) = & J \sum_{i=1}^{\nu} \int_{T^\nu} f(s, \Lambda - s) \{ 8s^2 \cos(\Lambda - 2s) \cos(\Lambda - 2\lambda) + \\ & + 4s^2 \cos\left(\frac{3\Lambda}{2} - 3s\right) \cos\left(\frac{3\Lambda}{2} - 3\lambda\right) - 4s^2 \cos\left(\frac{\Lambda}{2} - 2s\right) \cos\left(\frac{3\Lambda}{2} - 3\lambda\right) - \\ & - 4s^2 \cos s \cos(\Lambda - 2\lambda) - 4s^2 \cos(2\Lambda - 3s) \cos(\Lambda - 2\lambda) - \\ & - 4s^2 \cos\left(\frac{3\Lambda}{2} - 2s\right) \cos\left(\frac{\Lambda}{2} - \lambda\right) - 4s^2 \cos(\Lambda - 3s) \cos(\Lambda - \lambda) + \\ & + 4s^2 \cos 2s \cos\left(\frac{\Lambda}{2} - \lambda\right) + 4s^2 \cos\left(\frac{3\Lambda}{2} - 3s\right) \cos\left(\frac{\Lambda}{2} - \lambda\right) - \\ & - 4s^2 \cos(\Lambda - s) \cos(\Lambda - 2\lambda) - 4s^2 \cos\left(\frac{3\Lambda}{2} - 2s\right) \cos\left(\frac{3\Lambda}{2} - 3\lambda\right) + \\ & + 4s^2 \cos(\Lambda - 2\lambda - s) \cos(\Lambda - 2\lambda) + 4s^2 \cos(2\Lambda - 2s) \cos(\Lambda - 2\lambda) \} ds. \end{aligned}$$

Theorem 3. *Let $\nu = 1$. The continuous spectrum of the operator H_2 is consists of the point 0 and discrete spectrum of the operator H_2 is consists of no more than six eigenvalues.*

References

1. *Schrodinger E.* Spin and exchange // Proc. Roy. Irish. Acad, 47 A. 1941. Pp. 39–52.
2. *Bogolubov N. N.* Lectures on quantum statistics. Gordon and Breach, 1970.
3. *Nagaev E. L.* Anomalous magnetic structures and phase transitions in non-heisenberg magnets // Advances in physical sciences. 1982. Vol. 132, no. 1. Pp. 61–103. (in Russian)

LAURICELLA FUNCTION AND ITS APPLICATION TO THE EXTERIOR NEUMANN PROBLEM FOR A MULTIDIMENSIONAL SINGULAR ELLIPTIC EQUATION

Tulakova Z. R.

Fergana branch of the Tashkent University of Information Technologies, Fergana, Uzbekistan; ziyodacoders@gmail.com

Let \mathbb{R}_m be the m – dimensional Euclidean space $x := (x_1, \dots, x_m)$ – arbitrary point in it and n is a natural number ($m \geq 2$), and $n \leq m$. The 2^n -th part of the Euclidean space \mathbb{R}_m is defined as follows:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}_m : x_i > 0, i = 1, \dots, n; -\infty < x_j < +\infty, j = n + 1, \dots, m\}.$$

Fundamental solutions have an essential role in studying partial differential equations. The explicit form of the fundamental solution makes it possible to correctly formulate the problem statement and to study in detail the various properties of the solution of the equation under consideration. Fundamental solutions of singular elliptic equations are directly connected with multiple hypergeometric functions, the number of variables of which is determined by the number of singular coefficients. Indeed, all fundamental solutions of the following elliptic equation with n singular coefficients

$$E_\alpha^{(m,n)}(u) \equiv \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^n \frac{2\alpha_j}{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

in the hyperoctant Ω are expressed by the Lauricella hypergeometric function $F_A^{(n)}$ in n variables where $m \geq 2$ is a dimension of the Euclidean space; $n \geq 1$ is a number of the singular coefficients; $m \geq n$; α_j are real constants and $0 < 2\alpha_j < 1$ ($j = \overline{1, n}$).

Multiple Lauricella hypergeometric function $F_A^{(n)}$ in $n \in N$ (real or complex) variables is defined as following :

$$\begin{aligned} & F_A^{(n)}(a, b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n) = \\ & = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(a)_{|\mathbf{k}|} (b_1)_{k_1} \dots (b_n)_{k_n}}{k_1! \dots k_n! (c_1)_{k_1} \dots (c_n)_{k_n}} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \end{aligned}$$

$$[c_i \neq 0, -1, -2, \dots; i = \overline{1, n}; |x_1| + \dots + |x_n| < 1],$$

where

$$|\mathbf{k}| := k_1 + \dots + k_n, \quad k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0.$$

Consider equation (1) in the infinite domain Ω .

We introduce the following notation:

$$x := (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_m; \quad R^2 := \sum_{i=1}^m x_i^2; \quad dx := \prod_{i=1}^m dx_i; \quad x^{(2\alpha)} := \prod_{j=1}^n x_j^{2\alpha_j};$$

$$\tilde{x}_k := (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_{m-1}; \quad d\tilde{x}_k := \frac{dx}{dx_k}; \quad \tilde{x}_k^{(2\alpha)} := \frac{x^{(2\alpha)}}{x_k^{2\alpha_k}};$$

$$x_k^0 := (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_m;$$

$$S_k = \{x : x_1 > 0, \dots, x_{k-1} > 0, x_k = 0, x_{k+1} > 0, \dots, x_n > 0, \\ -\infty < x_{n+1} < +\infty, \dots, -\infty < x_m < +\infty\}, \quad m \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n \leq m.$$

The Neumann problem. Find a regular solution $u(x)$ of equation (1) from the class $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, satisfying the conditions:

$$\left(x_k^{2\alpha_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \Big|_{x_k=0} = \nu_k(\tilde{x}_k), \quad \tilde{x}_k \in S_k; \quad \lim_{R \rightarrow \infty} u(x) = 0,$$

where $\nu_k(\tilde{x}_k)$ are given continuous functions.

The functions $\nu_k(\tilde{x}_k)$ can also turn to infinity of order less than $1 - 2\alpha_k$ and for sufficiently large values of R the inequalities are valid

$$|\nu_k(\tilde{x}_k)| \leq \frac{c_k}{(1 + x_1^2 + \dots + x_{k-1}^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_m^2)^{(1 - 2\alpha_k + \varepsilon_k)/2}},$$

where $c_k = \text{const} > 0$, $0 < 2\alpha_k < 1$, and ε_k are small enough positive numbers ($k = \overline{1, n}$).

Theorem. The unique solution to the Neumann problem is expressed by the formula

$$u(\xi) := u(\xi_1, \dots, \xi_m) = - \sum_{k=1}^n \int_{S_k} \tilde{x}_k^{(2\alpha)} \nu_k(\tilde{x}_k) q(x_k^0, \xi) dS_k,$$

where $\nu_k(\tilde{x}_k)$ are given functions, and $q(x, \xi)$ is fundamental solution of equation (1) [1]:

$$q(x, \xi) = \gamma r^{-2\beta} F_A^{(n)} \left(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n; 2\alpha_1, \dots, 2\alpha_n; -\frac{4x_1\xi_1}{r^2}, \dots, -\frac{4x_n\xi_n}{r^2} \right),$$

$$\beta := \frac{m-2}{2} + \alpha, \quad \gamma = 2^{2\beta-m} \frac{\Gamma(\beta)}{\pi^{m/2}} \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(\alpha_k)}{\Gamma(2\alpha_k)}, \quad r^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - \xi_i)^2.$$

References

1. Ergashev T. G. Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients // J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys. 2020. Vol. 13, no. 1. Pp. 48–57.

Научное издание

МАТЕРИАЛЫ

VII Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики»

Макет выполнен в Институте прикладной математики
и автоматизации – филиале Федерального государственного
бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр
«Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»

Издание сборника материалов конференции осуществлено при финансовой
поддержке Кабардино-Балкарского государственного университета
им. Х. М. Бербекова в рамках программы «Приоритет 2030».

ISBN 978-5-907725-30-0



Подписано в печать 17.11.2023.
Формат 60x84/16. Печать цифровая.
Бумага офсетная. 23.75 усл.п.л.
Тираж 200 экз. Заказ № 142
г. Нальчик, 2023

Изготовлено в издательской типографии
«Принт Центр»
г. Нальчик, ул. Братьев Кушховых 79 «А»
www.print07.ru

СООРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ:



ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ КБНЦ РАН
(НАЛЬЧИК, РОССИЯ)



АДЫГСКАЯ (ЧЕРКЕССКАЯ) МЕЖДУНАРОДНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК



КАБАРДИНО-БАЛКАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Х. М. БЕРБЕКОВА (НАЛЬЧИК, РОССИЯ)



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР В АКАДЕМГОРОДКЕ (НОВОСИБИРСК, РОССИЯ)



ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
(АЛМАТЫ, КАЗАХСТАН)



ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. В. И. РОМАНОВСКОГО АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН (ТАШКЕНТ, УЗБЕКИСТАН)



ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ НАН АЗЕРБАЙДЖАНА
(БАКУ, АЗЕРБАЙДЖАН)

